Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Πως θα βρω την αντίστροφη της συνάρτησης f

$\downarrow$

Θα βρω το πεδίο ορισμού της f

$\downarrow$

Αποδεικνύω οτι η f είναι "1−1"

$\downarrow$

Επειδή η f είναι "1−1" υπάρχει η f^{-1}

$\downarrow$

Λύνω την σχέση $y=f(x)$ ως προς x. Έστω $x=g(y)\,(1)$

$\downarrow$

Στην σχέση (1) θέτω όπου x το y και x το y. Έτσι προκύπτει ο τύπος της f^{-1}

$\downarrow$

D_f : Το πεδίο ορισμού της f $x\in D_f \Leftrightarrow g(y)\in D_f \Leftrightarrow$ (Προσδιορίζω το σύνολο που ανήκει το y) $\Leftrightarrow$ (Το σύνολο που ανήκει το y είναι το σύνολο τιμών της f)

$\downarrow$

Το σύνολο σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1}

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1..

Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{10^{2x}-1}{2\bullet 10^{x}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:10^x\neq 0\right\}$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $10^x>0\Rightarrow 10^x\neq 0$

Οπότε : $D_f=\mathbb{R}$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{10^{2x_1}-1}{\cancel{2}\bullet 10^{x_1}}=\frac{10^{2x_2}-1}{\cancel{2}\bullet 10^{x_2}}\Rightarrow\left(10^{2x_1}-1\right)10^{x_2}=10^{x_1}\left(10^{2x_2}-1\right)$$

$$\Rightarrow 10^{2x_1} \bullet 10^{x_2} - 10^{x_2} - 10^{x_1} \bullet 10^{2x_2} + 10^{x_1} = 0 \xRightarrow[10^{2x_2}=10^{x_2}\bullet 10^{x_2}]{10^{2x_1}=10^{x_1}\bullet 10^{x_1}}$$

$$10^{x_1} \bullet 10^{x_1} \bullet 10^{x_2} - 10^{x_1} \bullet 10^{x_2} \bullet 10^{x_2} + 10^{x_1} - 10^{x_2} = 0 \Rightarrow$$

$$10^{x_1} \bullet 10^{x_1+x_2} - 10^{x_2} \bullet 10^{x_1+x_2} + 10^{x_1} - 10^{x_2} = 0 \Rightarrow$$

$$10^{x_1+x_2}\left(10^{x_1} - 10^{x_2}\right) \bullet 10^{x_1+x_2} + 1 \bullet \left(10^{x_1} - 10^{x_2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(10^{x_1} - 10^{x_2}\right)\left(10^{x_1+x_2} + 1\right) = 0 \, (1)$$

$$Έχω: 10^{x_1+x_2} > 0 \Rightarrow 10^{x_1+x_2} + 1 > 1 > 0 \Rightarrow 10^{x_1+x_2} + 1 > 0 \Rightarrow 10^{x_1+x_2} + 1 \neq 0$$

$$\text{Τότε απο την σχέση } (1) \text{ θα έχω}:$$

$$10^{x_1} - 10^{x_2} = 0 \Rightarrow 10^{x_1} = 10^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{Συνεπώς η } f \text{ είναι } "1-1". \text{Οπότε υπάρχει η } f^{-1}$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{10^{2x} - 1}{2 \bullet 10^{x}} \Leftrightarrow 10^{2x} - 1 = 2y \bullet 10^{x} \Leftrightarrow \left(10^{x}\right)^2 - 2y \bullet 10^{x} - 1 = 0 \, (2)$$

$$\text{Θέτω}: t = 10^{x}, t > 0 \, (3)$$

$$\text{Απο τις σχέσεις } (2),(3) \text{ θα έχω}:$$

$$t^2 - 2yt - 1 = 0 \, (4)$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4y^2 + 4 = 4\left(y^2 + 1\right)$$

$$y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 + 1 \geq 1 > 0 \Rightarrow y^2 + 1 > 0 \Rightarrow 4\left(y^2 + 1\right) > 0$$

$$\text{Επειδή } \Delta > 0 \text{ η δευτεροβάθμια εξίσωση } (1) \text{ έχει δυο ρίζες πραγματικές}$$
$$\text{και άνισες}:$$

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2y \pm \sqrt{4\left(y^2 + 1\right)}}{2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} =$$

$$\frac{2\left(y \pm \sqrt{y^2 + 1}\right)}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\text{Έστω } t = y - \sqrt{y^2 + 1}$$

$$1 > 0 \Rightarrow 1 + y^2 > y^2 \Rightarrow \sqrt{1 + y^2} > \sqrt{y^2} \xRightarrow{\sqrt{a^2} = |a|} \sqrt{1 + y^2} > |y| \xRightarrow{|a| \geq a} \sqrt{1 + y^2} > |y| \geq y \Rightarrow$$

$$\sqrt{1 + y^2} > y \Rightarrow y < \sqrt{1 + y^2} \Rightarrow y - \sqrt{1 + y^2} < 0 \Rightarrow t < 0 \, (\text{Άτοπο})$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ t = y+\sqrt{y^2+1} \overset{t=10^x}{\Longleftrightarrow} 10^x = y+\sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow x = \log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$

$\text{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon : D_{f^{-1}} = f\left(D_f\right) = \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), x \in \mathbb{R}$

2.

$\text{N}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \eta\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau\rho o\varphi\eta\ \tau\eta\varsigma\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\varsigma\ f(x) = \begin{cases} x-3, x \le 1 \\ 2x-2, x > 1 \end{cases}$

$\kappa\alpha\iota\ \sigma\tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\alpha\ \nu\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta o\acute{\upsilon}\nu\ \tau\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \tau o\mu\acute{\eta}\varsigma\ \tau\omega\nu\ \kappa\alpha\mu\pi\upsilon\lambda\acute{\omega}\nu$

$C_f\ \kappa\alpha\iota\ C_{f^{-1}}$

$D_f = \mathbb{R}$

$\text{A}\nu\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ x_1 < x_2 .\ \Delta\iota\alpha\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\iota\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma :$

$$\left\{\begin{matrix} (\text{I})\, x_1, x_2 \in (-\infty, 1], x_1 < x_2 \\ (\text{II})\, x_1, x_2 \in (1, +\infty), x_1 < x_2 \\ (\text{III})\, x_1 \in (-\infty, 1], x_2 \in (1, +\infty) \end{matrix}\right\}$$

$\underline{\Delta\varepsilon\nu\ \mu\pi o\rho\varepsilon\acute{\iota}\ \nu\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ x_2 \in (-\infty, 1], x_1 \in (1, +\infty)\ \gamma\iota\alpha\tau\iota\ x_1 < x_2\ !!!}$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta (\text{I}):$

$$\left\{\begin{matrix} x_1 < x_2 \\ x_1, x_2 \in (-\infty, 1] \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 - 3 < x_2 - 3 \\ x_1, x_2 \in (-\infty, 1] \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta (\text{II}):$

$$\left\{\begin{matrix} x_1 < x_2 \\ x_1, x_2 \in (1, +\infty) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 2x_1 < 2x_2 \\ x_1, x_2 \in (1, +\infty) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 2x_1 - 2 < 2x_2 - 2 \\ x_1, x_2 \in (1, +\infty) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta (\text{III}):$

$$\left\{\begin{matrix} x_1 \in (-\infty, 1] \\ x_2 \in (1, +\infty) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 \le 1 \\ x_2 > 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 - 1 \le 0 \\ x_1 \in (-\infty, 1] \\ 2x_2 > 2 \\ x_2 \in (1, +\infty) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} f(x_1) \le 0 \\ 2x_2 - 2 > 0 \\ x_2 \in (1, +\infty) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} f(x_1) \le 0 \\ f(x_2) > 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε είναι "1−1"

Άρα υπάρχει η f^{-1}

$$\begin{Bmatrix} y=f(x) \\ x\in(-\infty,1] \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=x-1 \\ x\le 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=y+1 \\ x\le 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=y+1 \\ y+1\le 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=y+1 \\ y\in(-\infty,0] \end{Bmatrix}$$

Οπότε: $\boxed{f^{-1}(x)=x+1, x\in(-\infty,0]}$

$$\begin{Bmatrix} y=f(x) \\ x\in(1,+\infty) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=2x-2 \\ x>1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x=y+2 \\ x>1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\dfrac{y+2}{2} \\ x>1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\dfrac{y+2}{2} \\ \dfrac{y+2}{2}>1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x=\dfrac{y+2}{2} \\ 2\dfrac{y+2}{2}>2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\dfrac{y+2}{2} \\ y+2>2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\dfrac{y+2}{2} \\ y\in(0,+\infty) \end{Bmatrix}$$

Οπότε: $\boxed{f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{2}, x\in(0,+\infty)}$

$$D_{f^{-1}}=(-\infty,0]\cup(0,+\infty)=\mathbb{R},\ f^{-1}(x)=\begin{cases} x+1, x\in(-\infty,0] \\ \dfrac{x+2}{2}, x\in(0,+\infty) \end{cases}$$

Επειδή η συνάρτηση f γνησίως αύξουσα τα σημεία τομής των καμπυλών C_f και $C_{f^{-1}}$ ταυτίζονται με τα σημεία τομής με την ευθεία $(\varepsilon): y=x$

$$\mathrm{A}(x,y)\in C_f\cap(\varepsilon) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \mathrm{A}(x,y)\in C_f \\ \mathrm{A}(x,y)\in(\varepsilon): y=x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=f(x) \\ y=x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{pmatrix} x=f(x) \\ y=x \\ x\in(-\infty,1] \end{pmatrix} ή \begin{pmatrix} x=f(x) \\ y=x \\ x\in(-\infty,1] \end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{pmatrix} x=x-1 \\ y=x \\ x\in(-\infty,1] \end{pmatrix} ή \begin{pmatrix} x=2x-2 \\ y=x \\ x\in(-\infty,1] \end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 0x=-1(\mathrm{Αδύνατη}) \\ y=x \\ x\in(-\infty,1] \end{pmatrix} ή \begin{pmatrix} x=2 \\ y=x \\ x\in(-\infty,1] \end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow x=y=2$$

Οπότε οι καμπύλες C_f και $C_{f^{-1}}$ τέμνονται στο σημείο $\mathrm{A}(2,2)$

ΠΡΟΣΟΧΗ
Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα τα κοινά σημεία των καμπυλών C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=x$ ή τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y=x$

3.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f^3(x)+2f(x)=x+2$

I) Να αποδείξετε οτι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1}

II) Να βρείτε τα σημεία τομής της f και f^{-1}

III) Να λυθεί η εξίσωση $f(e^{x-1})=f(2-x)$

I) $D_f=\mathbb{R}$; Έστω η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα. Τότε θα υπάρχουν $x_1<x_2$ με $f(x_1)\ge f(x_2)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)\ge f(x_2) \\ f^3(x_1)\ge f^3(x_2) \end{array}\right\}(+)$$

$$\overline{f(x_1)+f^3(x_1)\ge f(x_2)+f^3(x_2)}$$

$$\Rightarrow x_1+2\ge x_2+2 \Rightarrow x_1\ge x_2\ (\text{Άτοπο})$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς υπάρχει η f^{-1}

Έστω $y=f(x)$

$$f^3(x)+2f(x)=x+2 \Leftrightarrow y^3+2y=x+2 \Leftrightarrow x=y^3+2y-2$$

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f^{-1}(x)=x^3+2x-2$$

II) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα τα σημεία τομής της C_f και $C_{f^{-1}}$ ειναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=x \\ y=x \end{array}\right\}$$

$$f^3(x)+2f(x)=x+2 \Leftrightarrow x^3+2x=x+2 \Leftrightarrow x^3+2x-x-2=0 \Leftrightarrow$$

$$x^3+x-1-1=0 \Leftrightarrow x^3-1^3+x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x\bullet 1+1^2)+x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^2+x+1+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} x-1=0 \\ \text{ή} \\ x^2+x+2=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=1 \\ \text{ή} \\ x^2+x+2=0 \end{array}\right\}$$

$x^2+x+2=0(1)$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\bullet1\bullet2=1-8=-7<0$

$\text{Επειδή}\ \Delta<0\ \eta\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho o\beta\acute{\alpha}\theta\mu\iota\alpha\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ (1)\ \delta\varepsilon\nu\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\ \rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\varsigma$

$\text{Οπότε}: y=x=1$

$\text{Οπότε το σημείο τομής της}\ C_f\ \text{και}\ C_{f^{-1}}\ \text{ειναι το}\ (1,1)$

$\text{III)Έχω}\ f(e^{x-1})=f(2-x)\ \text{και επειδή η}\ f\ \text{είναι}\ "1-1"\ \text{θα έχω}:$

$e^{x-1}=2-x\Leftrightarrow e^{x-1}+x-2=0(2)$

$\text{Θεωρώ τη συνάρτηση}\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=e^{x-1}+x-2$

$\text{Αν}\ x_1<x_2:$

$$x_1<x_2\Rightarrow\left.\begin{cases}x_1-1<x_2-1\\ x_1<x_2\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}e^{x_1-1}<e^{x_2-1}\\ x_1<x_2\end{cases}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}e^{x_1-1}+x_1<e^{x_2-1}+x_2\Rightarrow$$

$e^{x_1-1}+x_1-2<e^{x_2-1}+x_2-2\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$

$\text{Οπότε η συνάρτηση}\ g\ \text{είναι γνησίως αύξουσα}$

$\text{Άρα η}\ g\ \text{είναι}\ "1-1"$

$g(1)=e^{1-1}+1-2=1+1-2=0$

$$(2)\Leftrightarrow e^{x-1}+x-2=0\Leftrightarrow g(x)=g(1)\overset{\text{Η } g \text{ είναι } "1-1"}{\Longleftrightarrow}x=1$$

4.

$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση}\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \text{για την οποία για κάθε}\ x\in\mathbb{R}$

$\text{ισχύει}: f^3(x)+f(f(x))=2x+6$

$\text{I)Να αποδείξετε οτι η}\ f\ \text{αντιστρέφεται}$

$\text{II)}\ f^{-1}(x)=\dfrac{f(x)+x^3-6}{2}$

$\text{III)Να λυθεί η εξίσωση}\ f(2x^3+x)=f(4-x)$

$\text{IV)Να λυθεί η εξίσωση}\ f(x)=x$

$\text{I)Έστω}\ f(x_1)=f(x_2)$

$$\left.\begin{array}{l}f(f(x_1))=f(f(x_2))\\ f^3(x_1)=f^3(x_2)\end{array}\right\}\Rightarrow f(f(x_1))+f^3(x_1)=f(f(x_2))+f^3(x_2)\Rightarrow$$

$2x_1+6=2x_2+6\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$

$\text{Οπότε η}\ f\ \text{είναι}\ "1-1" \text{Συνεπώς υπάρχει η}\ f^{-1}$

$\text{II)Έστω}\ y=f(x)$

$f^3(x)+f(f(x))=2x+6\Leftrightarrow y^3+f(y)=2x+6\Leftrightarrow 2x=y^3+f(y)-6\Leftrightarrow$

$$x=\frac{y^3+f(y)-6}{2}$$

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f^{-1}(x)=\frac{f(x)+x^3-6}{2}$$

$$\text{III)}\ f(2x^3+x)=f(4-x)\overset{\text{Η } f \text{ είναι "1–1}}{\Longleftrightarrow} 2x^3+x=4-x$$

$$2x^3+x-4+x=0\Leftrightarrow 2x^3+2x-4=0\Leftrightarrow 2(x^3+x-2)=0\Leftrightarrow$$

$$x^3+x-2=0\Leftrightarrow x^3+x-1-1=0\Leftrightarrow x^3-1^3+x-1=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x\bullet 1+1^2)+x-1=0\Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^2+x+1+1)=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2)=0\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} x-1=0 \\ ή \\ x^2+x+2=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x=1 \\ ή \\ x^2+x+2=0\end{matrix}\right\}$$

$$x^2+x+2=0(1)$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\bullet 1\bullet 2=1-8=-7<0$$

Επειδή $\Delta<0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες

$$\text{III)}\ f(x)=x\Leftrightarrow x=f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}(x)=\frac{f(x)+x^3-6}{2}\Leftrightarrow x=\frac{x+x^3-6}{2}\Leftrightarrow x+x^3-6=2x\Leftrightarrow$$

$$x+x^3-6-2x=0\Leftrightarrow x^3-x-6=0\Leftrightarrow x^3-x-8+2=0\Leftrightarrow$$

$$x^3-8-x+2=0\Leftrightarrow x^3-2^3-(x-2)=0\Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x^2+x\bullet 2+2^2)-(x-2)=0\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4-1)=0\Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x^2+2x+3)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x-2=0 \\ ή \\ x^2+2x+3=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x-2=0 \\ ή \\ x^2+2x+3=0\end{matrix}\right\}$$

$$x^2+2x+3=0(2)$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\bullet 1\bullet 3=4-12=-8<0$$

Επειδή $\Delta<0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση (2) δεν έχει πραγματικές ρίζες

5.

Α)Δίνεται η συνάρτηση $H:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, H(x)=xe^x$. Να αποδείξετε οτι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της $H:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$
Β)Αν για κάθε $x>1$ για τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ ισχύει $\frac{e^{f(x)}}{x}=\frac{\ln x}{f(x)}$, να βρείτε την $f(x)$ για $x>1$
Γ)Να λύσετε την εξίσωση: $e^6\lambda^2e^{\lambda^2}+6e^6e^{\lambda^2}-5\lambda e^{5\lambda}<0$ όταν $\lambda>0$

Α)$\textit{Δίνεται η συνάρτηση } \mathrm{H}:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, \mathrm{H}(x)=xe^{x}. \textit{Να αποδείξετε οτι}$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1<x_2 \\ x_1,x_2\in(0,+\infty)\end{array}\right\} \overset{\substack{\text{Αν } \alpha>1 \text{ τότε ισχύει η ισοδυναμία:} \\ x<y\Leftrightarrow a^{x}<a^{y}}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} e^{x_1}<e^{x_2} \\ x_1<x_2 \\ x_1,x_2\in(0,+\infty)\end{array}\right\} \overset{\left\{\substack{a<\beta \\ \gamma<\delta \\ \alpha,\beta,\gamma,\delta>0}\right\}\Rightarrow\alpha\gamma<\beta\delta}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1e^{x_1}<x_2e^{x_2} \\ x_1,x_2\in(0,+\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{H}(x_1)<\mathrm{H}(x_2)$$

$\textit{Άρα η συνάρτηση της } \mathrm{H}:(0,+\infty)\to\mathbb{R} \textit{ είναι γνησίως αύξουσα.Συνεπώς}$

$$\text{Β)}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{e^{f(x)}}{x}=\dfrac{\ln x}{f(x)} \\ x>1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} f(x)e^{f(x)}=x\ln x \\ x>1\end{array}\right\}\overset{e^{\ln\theta}=\theta,\theta>0}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{l} f(x)e^{f(x)}=\ln xe^{\ln x} \\ x>1\end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{l} \textit{Έχω}: x>1\Rightarrow\ln x>\ln 1\Rightarrow\ln x>0.\textit{Επειδή } \ln x>0 \textit{ υπάρχει το} \\ \mathrm{H}(\ln x)=\ln xe^{\ln x}\end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \mathrm{H}(f(x))=\mathrm{H}(\ln x) \\ x>1\end{array}\right\}\overset{f\ \text{"1-1"}}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{l} f(x)=\ln x \\ x>1\end{array}\right\}$$

$$\Gamma)\left\{\begin{array}{l} e^{6}\lambda^{2}e^{\lambda^{2}}+6e^{6}e^{\lambda^{2}}-5\lambda e^{5\lambda}<0 \\ \lambda>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \lambda^{2}e^{\lambda^{2}+6}+6e^{\lambda^{2}+6}<5\lambda e^{5\lambda} \\ \lambda>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} e^{\lambda^{2}+6}(\lambda^{2}+6)<5\lambda e^{5\lambda} \\ \lambda>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \mathrm{H}(\lambda^{2}+6)<\mathrm{H}(5\lambda) \\ \lambda>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \lambda^{2}+6<5\lambda \\ \lambda>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda^{2}-5\lambda+6<0 \\ \lambda>0\end{array}\right\}$$

$\textit{Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση}: \lambda^{2}-5\lambda+6=0\,(1)$

$\Delta=\beta^{2}-4\alpha\gamma=(-5)^{2}-4\cdot1\cdot6=25-24=1>0$

$\textit{Επειδή } \Delta>0 \textit{ η δευτεροβάθμια εξίοσωση } (1) \textit{ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες}:$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{array}{l}\nearrow\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3 \\ \searrow\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2\end{array}$$

λ	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$\lambda^2-5\lambda+6$		+	0	−	0	+	

$\lambda^2-5\lambda+6<0 \Leftrightarrow \lambda\in(2,3)$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda^2-5\lambda+6<0\\ \lambda>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\lambda\in(2,3)\\ \lambda>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lambda\in(2,3)$$

6.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2, x>1\\ x^3-3x^2+3x, x\le 1\end{cases}$

Ι)Να αποδείξετε οτι η f είναι "1−1"

ΙΙ)Να βρεθεί η αντίστροφη της f

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2, x>1\\ x^3-3x^2+3x, x\le 1\end{cases}=\begin{cases}x^2-2x+1+1, x>1\\ x^3-3x^2+3x-1+1, x\le 1\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}1^2-2\bullet 1\bullet x+x^2+1, x>1\\ x^3-3x^2\bullet 1+3x\bullet 1^2-1^3+1, x\le 1\end{cases}=\begin{cases}(x-1)^2+1, x>1\\ (x-1)^3+1, x\le 1\end{cases}$$

Αν $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2$

$$\left.\begin{array}{l}x_1<x_2\\ x_1>1\\ x_2>1\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x_1-1<x_2-1\\ x_1-1>0\\ x_2-1>0\end{array}\right\}\Rightarrow (x_1-1)^2<(x_2-1)^2\Rightarrow$$

$\Rightarrow (x_1-1)^2+1<(x_2-1)^2+1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Άρα $f\underset{\wedge}{\uparrow}(1,+\infty)$

Αν $x_1,x_2\in(-\infty,1]$ με $x_1<x_2$

$x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1\Rightarrow (x_1-1)^3<(x_2-1)^3\Rightarrow$

$\Rightarrow (x_1-1)^3-1<(x_2-1)^3-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Άρα $f\underset{\wedge}{\uparrow}(-\infty,1]$

Θα αποδείξω οτι $f\underset{\wedge}{\uparrow}$.Έστω $x_1<x_2$ διακρίνω τις περιπτώσεις :

$$\begin{cases}\text{I})x_1,x_2\in(-\infty,1] \text{ με } x_1<x_2\\ \text{II})x_1,x_2\in(1,+\infty) \text{ με } x_1<x_2\\ \text{III})x_1\in(-\infty,1], x_2\in(1,+\infty)\end{cases}$$

Ι)Επειδή $x_1,x_2\in(-\infty,1]$ με $x_1<x_2$ και $f\underset{\wedge}{\uparrow}(-\infty,1]$ έχω $f(x_1)<f(x_2)$

ΙΙ)Επειδή $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ και $f\underset{\wedge}{\uparrow}(1,+\infty)$ έχω $f(x_1)<f(x_2)$

$\text{III)}x_1 \in (-\infty,1] \Rightarrow x_1 \le 1 \Rightarrow x_1 - 1 \le 0 \Rightarrow (x_1-1)^3 \le 0 \Rightarrow (x_1-1)^3 + 1 \le 1 \Rightarrow$

$f(x_1) \le 1$

$x_2 \in (1,+\infty) \Rightarrow x_2 \ne 1 \Rightarrow x_2 - 1 \ne 0 \Rightarrow (x_2-1)^2 > 0 \Rightarrow (x_2-1)^2 + 1 > 1 \Rightarrow$

$f(x_2) > 1$

Επειδή $f(x_1) \le 1$ *και* $f(x_2) > 1$ *έχω* $f(x_1) < f(x_2)$

Οπότε *για κάθε* $x_1 < x_2$ *έχω* $f(x_1) < f(x_2)$. *Συνεπώς* $f\underset{\wedge}{\uparrow}$

Επειδή $f\underset{\wedge}{\uparrow}$ *η είναι* "1−1"

II)Επειδή $f\underset{\wedge}{\uparrow}$ *η είναι* "1−1" *υπάρχει η αντίστροφη της* f

$$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ x \in (-\infty,1] \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = (x-1)^3 + 1 \\ x \in (-\infty,1] \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} (x-1)^3 = y-1 \\ x-1 \le 0 \\ y-1 \le 0 \end{matrix}\right\} \overset{\left\{\begin{smallmatrix} x^{2\nu+1}=\alpha \\ \alpha<0 \end{smallmatrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{smallmatrix} x=-\sqrt[2\nu+1]{-\alpha} \\ \alpha<0 \end{smallmatrix}\right\}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left.\begin{matrix} x-1 = -\sqrt[3]{-(1-y)} \\ x \le 1 \\ y \le 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 1-\sqrt[3]{1-y} \\ x \le 1 \\ y \le 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 1-\sqrt[3]{1-y} \\ 1-\sqrt[3]{1-y} \le 1 \\ y \le 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 1-\sqrt[3]{1-y} \\ -\sqrt[3]{1-y} \le 0 \\ y \le 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} x = 1-\sqrt[3]{1-y} \\ \sqrt[3]{1-y} \ge 0 \\ y \le 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 1-\sqrt[3]{1-y} \\ y \le 1 \end{matrix}\right\}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = 1-\sqrt[3]{1-x},\ x \in (-\infty,1]}$$

$$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ x \in (1,+\infty) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = (x-1)^2 + 1 \\ x \in (1,+\infty) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} (x-1)^2 = y-1 \\ x-1 > 0 \\ y-1 > 0 \end{matrix}\right\} \overset{\left\{\begin{smallmatrix} x^{2\nu}=\alpha \\ x,\alpha>0 \end{smallmatrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{smallmatrix} x=\sqrt[2\nu]{\alpha} \\ \alpha>0 \end{smallmatrix}\right\}}{\Longleftrightarrow} \left.\begin{matrix} x-1 = \sqrt{y-1} \\ x > 1 \\ y-1 > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} x = 1+\sqrt{y-1} \\ x > 1 \\ y > 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 1+\sqrt{y-1} \\ 1+\sqrt{y-1} > 1 \\ y > 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 1+\sqrt{y-1} \\ \sqrt{y-1} > 0 \\ y > 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 1+\sqrt{y-1} \\ y > 1 \end{matrix}\right\}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = 1+\sqrt{x-1},\ x \in (1,+\infty)}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 1-\sqrt[3]{1-x},\ x \in (-\infty,1] \\ 1+\sqrt{x-1},\ x \in (1,+\infty) \end{cases},\ D(f^{-1}) = \mathbb{R}$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1..

Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{3^{2x}-1}{2 \bullet 3^x}$

2.

Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} 7x, x \le 0 \\ 4x^2, x > 0 \end{cases}$ *και στην συνέχεια να βρεθούν τα σημεία τομής των καμπυλών* C_f *και* $C_{f^{-1}}$