Πως θα βρω τους παραμέτρους λ,μ και το είδος των τοπικών ακρότατων στις θέσεις x_1 και x_2
I) Στο τύπο της συνάρτησης f εμφανίζονται οι παράμετροι λ,μ
II) Η συνάρτηση f έχει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1 και x_2

↓

Θα βρώ την παράγωγο της f

↓

I) Αν x_1 εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f
II) Το x_1 είναι θέση τοπικού ακρότατου
III) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_1

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα έχω $f'(x_1) = 0$

I) Αν x_2 εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f
II) Το x_2 είναι θέση τοπικού ακρότατου
III) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_2

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα έχω $f'(x_2) = 0$

↓

Από τις σχέσεις $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$ προσδιορίζω τα λ,μ…

↓

Αντικαθιστώ τις τιμές των λ,μ στους τύπους των συναρτήσεων f και f΄

↓

Αποδεικνύω ότι έχω τοπικά ακροτάτα στις θέσεις x_1 και x_2

Το θεώρημα του Fermat

Αν:
I) Το x_o είναιεσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f
II) Το x_o είναι θέση τοπικού ακρότατου
III) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o

Τότε θα έχω $f'(x_o) = 0$

Δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Fermat !!!
Έστω η συνάρτηση $f(x)= x^3$.Το πεδίο ορισμού της f είναι το IR Η συνάρτηση f είναι γνήσιως αύξουσα στο IR.Πράγματι : Αν $x_1< x_2 \Longrightarrow x_1^3< x_2^3 \Longrightarrow f(x_1)< f(x_2)$ Οποτε η συνάρτηση f δεν έχει τοπικά ακρότατα Ισχύει $f'(x)=(x^3)'= 3x^2$ Το $x_o = 0$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της για το οποίο ισχύει $f'(x_o)= f'(0)= 3\cdot 0^2 =3\cdot 0 =0$ Άρα δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Fermat !!!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Αν για κάθε x∈IR ισχύει $\alpha^x \geq x+1 (\alpha>0)$να αποδειχθεί ότι α=e

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)= \alpha^x-x-1$, x∈IR
$f(0)= \alpha^0-0-1=1-1=0$
$f'(x)=(\alpha^x-x-1)'=(\alpha^x)'-(x)'-(1)'= \alpha^x \ln\alpha-1$
Για κάθε x∈IR έχω :
$\alpha^x \geq x+1 \Longleftrightarrow \alpha^x-x-1 \geq 0 \Longleftrightarrow f(x) \geq f(0)$
Άρα η συνάρτηση f έχει ακρότατο στη θέση $x_o=0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{I) Αν } x_0=0 \text{ εσωτερικό σημείο του} \\ \quad\text{πεδίου ορισμού της f} \\ \text{II) Το } x_0=0 \text{ είναι θέση ακρότατου} \\ \text{III) Η συνάρτηση f είναι} \\ \quad\text{παραγωγίσιμη στο σημείο } x_0=0\end{array}\right\}$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα έχω :
$f'(x_0) = 0 \Longleftrightarrow f'(0) = 0 \Longleftrightarrow \alpha^0\ln\alpha-1=0 \Longleftrightarrow \ln\alpha-1=0 \Longleftrightarrow$
$\ln\alpha=1 \Longleftrightarrow \ln\alpha= \ln e \Longleftrightarrow \alpha=e$
Αν α=e θα έχω :
$f(x)= e^x-x-1$
$f'(x)= (e^x-x-1)'= (e^x)'- (x)'-(1)'= e^x- 1-0= e^x- 1$

$f'(x)>0 \Longleftrightarrow e^x- 1>0 \Longleftrightarrow e^x >1 \Longleftrightarrow e^x >e^0 \Longleftrightarrow x>0$
$f'(x)= 0 \Longleftrightarrow e^x- 1=0 \Longleftrightarrow e^x =1 \Longleftrightarrow e^x =e^0 \Longleftrightarrow x=0$
$f'(x)<0 \Longleftrightarrow x<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f ΄	–	0	+
f	$\searrow$		$\nearrow$

min

Επειδή:
- I) f συνεχής στο $x_o = 0$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- II) $f΄(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$
- III) $f΄(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

Η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στη θέση $x_o = 0$ τον αριθμό :
$f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$
Οπότε για λάθε $x \in IR$ ισχύει :
$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x+1$

2.

Αν για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $\log_\alpha x \leq x-1 \,(0<\alpha\neq1)$ να αποδειχθεί ότι $\alpha=e$

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)= \log_\alpha x - x + 1$, $x \in IR$
$f(1)= \log_\alpha 1 - 1 + 1 = 0$

$$f΄(x)=(\log_\alpha x - x + 1)΄=(\log_\alpha x)΄-(x)΄+(1)΄=\left(\frac{\ln x}{\ln\alpha}\right)΄-1=\frac{(\ln x)΄}{\ln\alpha}-1=$$

$$=\frac{1}{x\ln\alpha}-1$$

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχω :
$\log_\alpha x \leq x-1 \Longleftrightarrow \log_\alpha x - x + 1 \leq 0 \Longleftrightarrow f(x) \leq f(1)$
Άρα η συνάρτηση f έχει ακρότατο στη θέση $x_o=1$

I) Αν $x_0=1$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f
II) Το $x_0=1$ είναι θέση ακρότατου
III) Η συνάρτηση f είναι

παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα έχω :

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1 \cdot \ln\alpha} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln\alpha} = 1 \Leftrightarrow$$

$\ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \ln\alpha = \ln e \Leftrightarrow \alpha = e$

Αν $\alpha = e$ θα έχω :

$f(x) = \ln x - x + 1,\ x \in (0, +\infty)$

$$f'(x) = (\ln x - x + 1)' = (\ln x)' - (x)' + (1)' = \frac{1}{x} - 1 - 0 = \frac{1}{x} - \frac{x}{x} =$$

$$= \frac{1-x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1-x}{x} > 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 1-x > 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -x > -1 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-x}{-1} < \frac{-1}{-1} \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1-x}{x} = 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 1-x = 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -x = -1 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-x}{-1} = \frac{-1}{-1} \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x > 1$$

x	0	1	$+\infty$
f'	+	0	–
f	↗	max	↘

Επειδή:
I) f συνεχής στο $x_o = 1$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
II) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$
III) $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

Η συνάρτηση f έχει μέγιστο στη θέση $x_o = 1$τον αριθμό :
$f(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$
Οπότε για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει :
$f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow \ln x - x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq x - 1$

3.

> Να βρείτε τις τιμές των α,β,γ και για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης
>
> $f(x) = 2x^3 - 3\alpha x^2 + \beta x + \gamma$
>
> διέρχεται από το σημείο Α(1,24) και έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 4$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$f'(x) = (2x^3 - 3\alpha x^2 + \beta x + \gamma)' = (2x^3)' - (3\alpha x^2)' + (\beta x)' + (\gamma)' =$
$= 2(x^3)' - 3\alpha(x^2)' + \beta(x)' + (\gamma)' = 2 \cdot 3x^2 - 3\alpha \cdot 2x + \beta \cdot 1 + 0 =$

$= 6x^2 - 6\alpha x + \beta$

Επειδή το σημείο Α(1,24) ανήκει στην γραφική της συνάρτησης f θα έχω :

$f(1) = 24 \Leftrightarrow 2 \cdot 1^3 - 3\alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + \gamma = 24 \Leftrightarrow 2 - 3\alpha + \beta + \gamma = 24$
$\Leftrightarrow -3\alpha + \beta + \gamma = 24 + 2 \Leftrightarrow -3\alpha + \beta + \gamma = 26 (1)$

Το σημείο Α(α,β) ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης y = f(x) όταν ισχύει β = f(α)

$$\left.\begin{array}{l}\text{I) Το } x_1 = 1 \text{ εσωτερικό σημείο του} \\ \text{πεδίου ορισμού της } f \\ \text{II) Το } x_1 = 1 \text{ είναι θέση τοπικού ακρότατου} \\ \text{III) Η συνάρτηση } f \text{ είναι} \\ \text{παραγωγίσιμη στο σημείο } x_1 = 1\end{array}\right\}$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα έχω $f'(x_1) = 0$

$f'(1) = 0 \Longleftrightarrow 6 \cdot 1^2 - 6\alpha \cdot 1 + \beta = 0 \Longleftrightarrow 6 - 6\alpha + \beta = 0 \Longleftrightarrow -6\alpha + \beta = -6 (2)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{I) Το } x_2 = 4 \text{ εσωτερικό σημείο του} \\ \text{πεδίου ορισμού της } f \\ \text{II) Το } x_2 = 4 \text{ είναι θέση τοπικού ακρότατου} \\ \text{III) Η συνάρτηση } f \text{ είναι} \\ \text{παραγωγίσιμη στο σημείο } x_2 = 4\end{array}\right\}$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα έχω $f'(x_2) = 0$

$f'(4) = 0 \Longleftrightarrow 6 \cdot 4^2 - 6\alpha \cdot 4 + \beta = 0 \Longleftrightarrow 96 - 24\alpha + \beta = 0 \Longleftrightarrow$

$-24\alpha + \beta = -96 (3)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) θα έχω :

$$\left.\begin{array}{l}-6\alpha+\beta=-6 \\ \\ -24\alpha+\beta=-96\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l}-6\alpha+\beta=-6 \\ \\ 24\alpha-\beta=96\end{array}\right\} (+)$$

$$-6\alpha+\beta+24\alpha-\beta=-6+96 \Longleftrightarrow 18\alpha = 90$$

$$\frac{18\alpha}{18} = \frac{90}{18} \Longleftrightarrow \alpha=5$$

Θέτω α= 5 στην σχέση (2) :

$-6\alpha+\beta=-6 \Longleftrightarrow -6 \cdot 5+\beta=-6 \Longleftrightarrow -30+\beta=-6 \Longleftrightarrow \beta=30-6 \Longleftrightarrow \beta= 24$

Θέτω α= 5 και β=24 στην σχέση (1):

$-3\alpha+\beta+\gamma=26 \Longleftrightarrow -3 \cdot 5+24+\gamma=26 \Longleftrightarrow -15+24+\gamma=26 \Longleftrightarrow 9+\gamma=26$

$\gamma=26-9 \Longleftrightarrow \gamma=17$
Αν α=5 , β= 24 και γ=17 θα έχω :
$f(x)=2x^3-15x^2+24x+17$
$f'(x)=6x^2-15x+24=6(x^2-5x+4)$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση :

$\boxed{1}\ x^2\ \boxed{-5}\ x\ \boxed{+4} = 0 \quad (3)$
$\alpha=1 \quad \beta=-5 \quad \gamma=4$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\bullet1\bullet4=25-16=9>0$

Επειδή Δ > 0 η δευτεροβάθμια εξίσωση (3) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\bullet1}=\frac{5\pm3}{2}$$

$$x_1=\frac{5+3}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$x_2=\frac{5-2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		+	0	–	0	+	

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
f ΄		+	0	–	0	+	
f		↗		↘		↗	
			τ.μ		τ.ε		

$$\text{Επειδή: } \begin{cases} \text{I) f συνεχής στο } x_1 = 1 \text{ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων} \\ \text{II) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 1) \\ \text{III) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (1, 4) \end{cases}$$

Η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = 1$

$$\text{Επειδή: } \begin{cases} \text{I) f συνεχής στο } x_2 = 2 \text{ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων} \\ \text{II) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (1, 4) \\ \text{III) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (4, +\infty) \end{cases}$$

Η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = 2$

4.

Να βρείτε τα α,β єIR ώστε η συνάρτηση f με τύπο $f(x)= \alpha \ln x+ \beta x^2 -3x+2$ με $x>0$ να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1=1$ και $x_2=2$.Στη συνέχεια να βρεθούν τα ακρότατα και το είδος αυτών των ακρότατων

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

$$f'(x)= (\alpha \ln x+ \beta x^2 -3x+2)'= (\alpha \ln x)'+ (\beta x^2)'-(3x)'+(2)' =$$

$$= \alpha (\ln x)'+ \beta (x^2)'- 3 (x)'+ 0 = \alpha \frac{1}{x} + 2\beta x - 3 \cdot 1 =$$

$$= \frac{\alpha}{x} + 2\beta x - 3$$

$$f'(x)= \frac{\alpha}{x} + 2\beta x - 3 \ , x > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{I) Αν } x_1 = 1 \text{ εσωτερικό σημείο του} \\ \text{πεδίου ορισμού της } f \\ \text{II) Το } x_1 = 1 \text{ είναι θέση τοπικού ακρότατου} \\ \text{III) Η συνάρτηση } f \text{ είναι} \\ \text{παραγωγίσιμη στο σημείο } x_1 = 1 \end{array}\right\}$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα έχω $f'(x_1) = 0$:

$$f'(x_1) = 0 \Longleftrightarrow f'(1) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{1} + 2\beta \cdot 1 - 3 = 0$$

$$\alpha + 2\beta - 3 = 0 \Longleftrightarrow \alpha + 2\beta = 3 \ (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{I) Αν } x_1 = 2 \text{ εσωτερικό σημείο του} \\ \text{πεδίου ορισμού της } f \\ \text{II) Το } x_2 = 2 \text{ είναι θέση τοπικού ακρότατου} \\ \text{III) Η συνάρτηση } f \text{ είναι} \\ \text{παραγωγίσιμη στο σημείο } x_2 = 2 \end{array}\right\}$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα έχω $f'(x_2) = 0$:

$$f'(x_2) = 0 \Longleftrightarrow f'(2) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{2} + 2\beta \cdot 2 - 3 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{2} + 4\beta - 3 = 0 \Longleftrightarrow 2\left(\frac{\alpha}{2} + 4\beta - 3\right) = 2 \cdot 0 \Longleftrightarrow$$

$$2\frac{\alpha}{2} + 2 \cdot 4\beta + 2(-3) = 0 \Longleftrightarrow \alpha + 8\beta - 6 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\alpha + 8\beta = 6 \ (2)$$

Από τις σχέσεις (1)και (2) θα έχω :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + 2\beta = 3 \\ \alpha + 8\beta = 6 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{στην πρώτη εξίσωση}]{\text{Αλλάζω τα πρόσημα}} \left.\begin{array}{l} -\alpha - 2\beta = -3 \\ \alpha + 8\beta = 6 \end{array}\right\} (+)$$

$$\cancel{-\alpha} - 2\beta + \cancel{\alpha} + 8\beta = -3 + 6$$

$$6\beta = 3 \Longleftrightarrow \frac{6\beta}{6} = \frac{3}{6} \Longleftrightarrow \beta = \frac{3:3}{6:3} \Longleftrightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

Θέτω $\beta = \frac{1}{2}$ στην σχέση (1) :

$$\alpha + 2\beta = 3 \Longleftrightarrow \alpha + 2\,\frac{1}{2} = 3 \Longleftrightarrow \alpha + 1 = 3 \Longleftrightarrow$$

$$\alpha = 3 - 1 \Longleftrightarrow \alpha = 2$$

Θέτω $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$ στους τύπους των συναρτήσεων f και f΄ :

$$f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 - 3x + 2 = 2 \ln x + \frac{x^2}{2} - 3x + 2 \;,\; x>0$$

$$f'(x) = \frac{\alpha}{x} + 2\beta\, x - 3 = \frac{2}{x} + 2\,\frac{1}{2}\, x - 3 = \frac{2}{x} + x - 3 =$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{x^2}{x} - \frac{3x}{x} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \;,\; x>0$$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση :

$$\boxed{1}\; x^2 \;\boxed{-3}\; x \;\boxed{+2} = 0 \quad (3)$$

$\alpha = 1 \quad \beta = -3 \quad \gamma = 2$

$$\Delta = \beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Επειδή $\Delta > 0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση (3) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\,\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3 + 1}{3} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		+	0	–	0	+	

Επειδή x>0 θα έχω

x	0		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	‖	+	0	–	0	+	

x	0		1		2		$+\infty$
f΄	‖	+	0	–	0	+	
f	‖	↗		↘		↗	
			τ.μ		τ.ε		

Επειδή:
- I) f συνεχής στο $x_1 = 1$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- II) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$
- III) $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$

Η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = 1$ τον αριθμό :

$$f(x_1) = f(1) = 2\ln 1 + \frac{1^2}{2} - 3 \cdot 1 + 2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}$$

Επειδή:

I) f συνεχής στο $x_2 = 2$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

II) $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$

III) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$

Η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = 2$ τον αριθμό :

$$f(x_2) = f(2) = 2\ln 2 + \frac{2^2}{2} - 3\cdot 2 + 2 = 2\ln 2 - 2$$

5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \dfrac{2\alpha}{x} + \beta, x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$

$(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$ η οποία μηδενίζεται στο σημείο $x_1 = 1$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_2 = 2$.

I) Να βρεθούν τα α και β

II) Να βρεθεί το είδος του ακρότατου και η τιμή του

$$f'(x) = (x^2 + 2\alpha x^{-1} + \beta)' = (x^2)' + (2\alpha x^{-1})' + (\beta)' = 2x + 2\alpha (x^{-1})' + 0 =$$

$$= 2x + 2\alpha(-1)x^{-1-1} = 2x - 2\alpha x^{-2} = 2x - 2\alpha \frac{1}{x^2} = \frac{2x\cdot x^2}{x^2} - \frac{2\alpha}{x^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - 2\alpha}{x^2} = \frac{2(x^3 - \alpha)}{x^2}$$

Επειδή η συνάρτηση f μηδενίζεται στο σημείο $x_1 = 1$ θα έχω :

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + \frac{2\alpha}{1} + \beta = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -2\alpha - 1 \quad (1)$$

I) Αν $x_2 = 2$ εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$

II) Το $x_2 = 2$ είναι θέση τοπικού ακρότατου

III) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_2 = 2$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα έχω $f'(x_2) = 0$:

$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(2^3 - \alpha)}{2^2} = 0 \Leftrightarrow 8 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 8$$

Θέτω α=8 στην σχέση (1) :
β= –2α –1= –2•8 –1= –16 –1=–17
Αν α=8 και β=–17 θα έχω :

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x} - 17\ ,\ x\in(-\infty,0)\cup(0,-\infty)$$

$$f'(x)= \frac{2(x^3-8)}{x^2} = \frac{2(x^3-2^3)}{x^2} = \frac{2(x-2)\,(x^2+x\cdot 2+2^2)}{x^2} =$$

$$= \frac{2(x-2)\,(x^2+2\cdot x+4)}{x^2} = \frac{2(x-2)\,(x^2+2\cdot x+1+3)}{x^2} =$$

$$= \frac{2(x-2)\,(x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2+3)}{x^2} = \frac{2(x-2)\,[(x+1)^2+3]}{x^2} =$$

$$= \frac{2\,[(x+1)^2+3]}{x^2}\,(x-2)\ ,\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

Για κάθε x∈(–∞,0)U(0,+∞) θα έχω :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x^2} > 0 \\ (x+1)^2 \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x^2} > 0 \\ (x+1)^2+3 \ge 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x^2} > 0 \\ (x+1)^2+3 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x^2}\cdot[(x+1)^2+3] > 0 \Rightarrow \frac{2\,[(x+1)^2+3]}{x^2} > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)>0 \\ x \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x-2>0 \\ x \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x>2 \\ x \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x\in(2,+\infty)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ x \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x-2=0 \\ x \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x=2 \\ x \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x=2$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)<0 \\ x \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(0,2)$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		↘	‖	↘		↗	

τ.ε

Επειδή:

I) f συνεχής στο $x_2 = 2$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

II) $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$

III) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$

Η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = 2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^{2x} \geq 2x+1$ $(\alpha>0)$ να αποδειχθεί ότι $\alpha=e$

2.

Αν για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $\log_\alpha 2x \leq 2x-1$ $(0<\alpha\neq1)$ να αποδειχθεί ότι $\alpha=e$

3.

Να βρείτε τις τιμές των α,β,γ και για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = 2x^3 - 6\alpha x^2 + 6\beta x + \gamma$$

διέρχεται από το σημείο Α(1,0) και έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$

4.

Να βρείτε τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = 2\alpha \ln x + \frac{\beta}{2} x^2 - 3x + 2 \text{ με } x>0$$

να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1=1$ και $x_2=2$. Στη συνέχεια να βρεθούν τα ακρότατα και το είδος αυτών των ακρότατων