ΚΥΡΤΕΣ ΚΑΙ ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Αν :
- I) Αν f συνεχής σε ένα διάστημα Δ
- II) $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ
- III)Το Δ θα έχει την μορφή $[\alpha,\beta],(\alpha,\beta],[\alpha,\beta),(\alpha,\beta),(-\infty,\alpha],(-\infty,\alpha),[\alpha,+\infty),(\alpha,+\infty),IR$

Τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο διάστημα Δ

Αν :
- I) Αν f συνεχής σε ένα διάστημα Δ
- II) $f''(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ
- III)Το Δ θα έχει την μορφή $[\alpha,\beta],(\alpha,\beta],[\alpha,\beta),(\alpha,\beta),(-\infty,\alpha],(-\infty,\alpha),[\alpha,+\infty),(\alpha,+\infty),IR$

Τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα Δ

Αν :
- I)Το σημείο x_o είναι θέση σημείου καμπής
- II)Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο x_o

Τότε θα ισχύει $f''(x_o)=0$

Σημείο καμπής

Αν:
- I) Η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα (α,x_o) και τακοιλα προς τα κάτω στο διάστημα(x_o,β)ή αντίστροφα
- II)Υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$

Τότε σημείο $A(x_o, f(x_o))$ είναι σημείο καμπής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-2x^3+6x^2+1$
α)Να βρείτε σε ποια διαστήματα κυρτή και σε ποια κοίλη η συνάρτηση
β)Να βρεθεί το σημείο καμπής της C_f

α)

$f''(x)$ …

$f'(x)=(-2x^3+6x^2+1)'= (-2x^3)'+(6x^2)'+(1)'= -2(x^3)'+6(x^2)'+0 =$
$= -2\bullet 3x^2+6\bullet 2\, x = -6x^2+12x$
$f''(x)=(-6x^2+12x)'=(-6x^2)'+(12x)'= -6(x^2)'+12(x)' =-6\bullet 2x+12=$
$=-12x+12=12(-x+1)$

$f''(x)>0 \Longleftrightarrow 12(-x+1)>0 \Longleftrightarrow -x+1>0 \Longleftrightarrow -x>-1 \Longleftrightarrow$

$\dfrac{-x}{-1} < \dfrac{-1}{-1} \Longleftrightarrow x<1$

$f''(x)=0 \Longleftrightarrow 12(-2x+1)=0 \Longleftrightarrow -x+1=0 \Longleftrightarrow -x=-1 \Longleftrightarrow x=1$

$f''(x)>0 \Longleftrightarrow x>1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	+	0	–
f			

Σ.Κ

I) f συνεχής στο $(-\infty,1]$

II) $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)$

Οπότε η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα $(-\infty,1]$

I) f συνεχής στο $[1, +\infty)$

II) $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[1, +\infty)$

Οπότε η f στρέφει τα κοιλα προς τα κάτω στο διάστημα $[1, +\infty)$

β)

I) Η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα $(-\infty,1)$

II Η f στρέφει τα κοιλα προς τα κάτω στο διάστημα $(1,+\infty)$

III)Υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ γιατί η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o=1$

Οπότε το σημείο $A(x_o ,f(x_o))$ είναι σημείο καμπής
$f(1)=-2\cdot1^3+6\cdot1^2+1=-2+6+1=5$
Άρα το σημείο A(1,5) είναι σημείο καμπής
2.

Να βρείτε σε ποια διαστήματα κυρτή και σε ποια κοίλη η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$f'(x)=\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)'=\left(\frac{x^4}{4}\right)' - \left(\frac{3}{2}x^2\right) +(2x)'=$$

$$= \frac{(x^4)'}{4} - \frac{3}{2}(x^2)'+2(x)'= \frac{4x^3}{4} - \frac{3}{2}2x+2 = x^3 - 3x + 2$$

$$f''(x) = (x^3 - 3x + 2)' =(x^3)' - (3x)' +(2)' = 3x^2 - 3(x)' + 0 =$$
$$= 3x^2 - 3 \cdot 1 = 3x^2 - 3$$

Οπότε : $f''(x) = 3x^2 - 3$
Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση : $3x^2 - 3 = 0$

$$3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$3x^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \iff$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1} \iff$$

$$x = \pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$3x^2 - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

I) f συνεχής στο $(-\infty,-1]$

II) $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$

Οπότε η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα $(-\infty,-1]$

I) f συνεχής στο $[-1,1]$

II) $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,1)$

Οπότε η f στρέφει τα κοιλα προς τα κάτω στο διάστημα$[-1,1]$

I) f συνεχής στο $[1,+\infty)$

II) $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$

Οπότε η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα$[1,+\infty)$

3.

Να βρείτε σε ποια διαστήματα κυρτή και σε ποια κοίλη η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x\in(0,+\infty)$

$$f(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'x-\ln x\,(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\bullet x-\ln x\bullet 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)'=\frac{(1-\ln x)'\,x^2-(1-\ln x)\,(x^2)'}{(x^2)^2}=$$

$$=\frac{[(1)'-(\ln x)']\,x^2-(1-\ln x)\,2x}{x^4}=\frac{-\frac{1}{x}\,x^2-(1-\ln x)\,2x}{x^4}=$$

$$=\frac{-x-(1-\ln x)2x}{x^4}=\frac{x[-1-2(1-\ln x)]}{x^4}=\frac{-1-2+3\ln x}{x^3}=$$

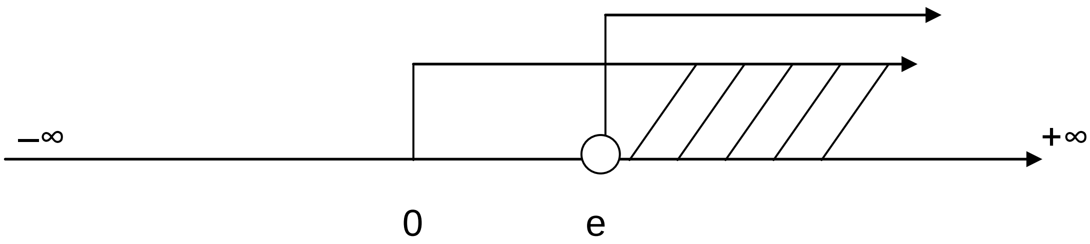
$$=\frac{3\ln x-3}{x^3}=\frac{3(\ln x-1)}{x^3}=\frac{3}{x^3}(\ln x-1)$$

Επειδή $x>0$ θα έχω :

$$x^3>0\Rightarrow\frac{1}{x^3}>0\Rightarrow\frac{3}{x^3}>0$$

$$\left.\begin{matrix}f''(x)>0\\ x>0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\ln x-1>0\\ x>0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\ln x>1\\ x>0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\ln x>\ln e\\ x>0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}x>e\\ x>0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x>e$$



$\left.\begin{array}{l} f''(x)=0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \ln x-1=0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \ln x = 1 \\ x>0 \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \ln x = \ln e \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} x=e \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x=e$

$\left.\begin{array}{l} f''(x)=0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 0<x<e$

x	0	e	+∞
f ´´	–	0	+
f			

$\left.\begin{array}{l} \text{I) f συνεχής στο } (0,e] \\ \\ \text{II) } f''(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(0,e) \end{array}\right\}$

Οπότε η f στρέφει τα κοιλα προς τα κάτω στο διάστημα (0,e]

$$\left.\begin{array}{l}\text{I) f συνεχής στο [e, +∞)}\\[2ex]\text{II) f΄΄(x)>0 για κάθε x∈(e, +∞)}\end{array}\right\}$$

Οπότε η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα (e, +∞)

4.

Να βρείτε σε ποια διαστήματα κυρτή και σε ποια κοίλη η συνάρτηση f(x)= $x^3e^{-x^2}$

f΄(x)= ($x^3e^{-x^2}$)΄=

$$(x^3)' e^{-x^2} + x^3(e^{-x^2})' = 3x^2e^{-x^2} + x^3e^{-x^2}(-x^2)' =$$

$$= 3x^2e^{-x^2} + x^3e^{-x^2}(-2x) = 3x^2e^{-x^2} - 2x^4e^{-x^2}$$

$$f''(x) = (3x^2e^{-x^2} - 2x^4e^{-x^2})' = (3x^2e^{-x^2})' - (2x^4e^{-x^2})' =$$

$$= 3(x^2e^{-x^2})' - 2(x^4e^{-x^2})' =$$

$$= 3[(x^2)' e^{-x^2} + x^2(e^{-x^2})'] - 2[(x^4)' e^{-x^2} + x^4(e^{-x^2})'] =$$

$$= 3[2xe^{-x^2} + x^2e^{-x^2}(-x^2)'] - 2[4x^3e^{-x^2} + x^4e^{-x^2}(-x^2)'] =$$

$$= 3[2xe^{-x^2} + x^2e^{-x^2}(-2x)'] - 2[4x^3e^{-x^2} + x^4e^{-x^2}(-2x)'] =$$

$$= 3(2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2}) - 2(4x^3e^{-x^2} - 2x^5e^{-x^2}) =$$

$$= 3\bullet 2xe^{-x^2} - 3\bullet 2x^3e^{-x^2} - 2\bullet 4x^3e^{-x^2} - 2(-2x^5e^{-x^2}) =$$

$$= 6xe^{-x^2} - 6x^3e^{-x^2} - 8x^3e^{-x^2} + 4x^5e^{-x^2} =$$

$$= 6xe^{-x^2} - 14x^3e^{-x^2} + 4x^5e^{-x^2} =$$

$$= 2xe^{-x^2}(3 - 7x^2 + 2x^4) = 2xe^{-x^2}(3 - 7x^2 + 2x^4) =$$

$$= 2xe^{-x^2}(3 - x^2 - 6x^2 + 2x^4) = 2xe^{-x^2}[-(x^2 - 3) + 2x^2(x^2 - 3)] =$$

$$= 2e^{-x^2}x(x^2 - 3)(2x^2 - 1)$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	

Θεωρώ τη εξίσωση : $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x^2 - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Θεωρώ τη εξίσωση :$2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2}{2} = \dfrac{1}{2}$

$$x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$x = \pm\frac{1 \bullet \sqrt{2}}{\sqrt{2} \bullet \sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$2x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x^2-1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x^2-3)(2x^2-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Έχω: $\sqrt{3} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ γιατί $(\sqrt{3})^2=3>\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		∩		∪		∩		∪		∩		∪	

Επειδή $f''(x)<0$ για κάθε $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(-\infty, -\sqrt{3})$

Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x \in \left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Επειδή $f''(x)<0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Επειδή $f''(x)<0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}\right)$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}\right)$

Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $(\sqrt{3}, +\infty)$

5.

Να δείξετε ότι τα σημεία καμπής της f(x)=$\dfrac{x}{x^2+1}$ βρίσκονται στην ευθεία y= $\dfrac{x}{4}$

$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 > 0 \Rightarrow x^2+1 > 0 \Rightarrow x^2+1 \neq 0$

Οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{1(x^2+1) - x[(x^2)' + (1)']}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2+1-x \bullet 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως ρητή

$$f''(x) = \left[\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right]' = \frac{(1-x^2)'(x^2+1)^2 - (1-x^2)[(x^2+1)^2]'}{[(x^2+1)^2]^2} =$$

$$= \frac{[(1)' - (x^2)'](x^2+1)^2 - (1-x^2)2(x^2+1)(x^2+1)'}{[(x^2+1)^2]^2} =$$

$$= \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)2(x^2+1)[(x^2)' + (1)']}{[(x^2+1)^2]^2} =$$

$$= \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(x^2+1)[x^2+1+2(1-x^2)]}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2+1+2-2x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x[-(x^2-3)]}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)]}{(x^2+1)^3}$$

$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x^2 - 3$		+	0	–	0	+	

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x(x^2-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f΄΄		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f									
			Σ.Κ		Σ.Κ		Σ.Κ		

Επειδή f΄΄(x)<0 για κάθε x∈$(-\infty,-\sqrt{3})$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(-\infty,-\sqrt{3})$

Επειδή f΄΄(x)>0 για κάθε x∈$(-\sqrt{3},0)$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $(-\sqrt{3},0)$

Επειδή $f''(x)<0$ για κάθε $x \in (0,\sqrt{3})$ η f στρέφει τα κοίλα προς

τα κάτω στο $(0,\sqrt{3})$

Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$ η f στρέφει τα κοίλα προς

τα κάτω στο $(\sqrt{3},+\infty)$

I) Η f στρέφει τα κοιλα προς τα κάτω στο διάστημα $(-\infty,-\sqrt{3})$

II Η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα $(-\sqrt{3},0)$

III)Υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3}))$ γιατί
η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_1=-\sqrt{3}$

Οπότε το σημείο $x_o=-\sqrt{3}$ είναι θέση σημείου καμπής

$$f(-\sqrt{3})=\frac{-\sqrt{3}}{(-\sqrt{3})^2+1}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Οπότε έχω το σημείο καμπής $A(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4})$

$$\text{Έχω}: y_A=\frac{-\sqrt{3}}{4}=\frac{x_A}{4}\ \text{Οπότε το σημείο}\ A(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4})\ \text{ανήκει στην ευθεία}\ y=\frac{x}{4}$$

I) Η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα $(-\sqrt{3},0)$

II Η f στρέφει τα κοιλα προς τα κάνω στο διάστημα $(0,\sqrt{3})$

III)Υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο σημείο B(0, f(0)) γιατί
η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_2=0$

Οπότε το σημείο $x_o=0$ είναι θέση σημείου καμπής

$$f(0)=\frac{0}{0^2+1}=0$$

Οπότε έχω το σημείο καμπής O(0,0)

$$\acute{E}\chi\omega: y_{O} = 0 = \frac{0}{4} = \frac{x_{O}}{4} \text{ Οπότε το σημείο } O(0,0) \text{ ανήκει στην}$$

$$\text{ευθεία } y = \frac{x}{4}$$

I) Η f στρέφει τα κοιλα προς τα κάτω στο διάστημα $(0,\sqrt{3})$

II Η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα $(\sqrt{3},+\infty)$

III)Υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο σημείο Γ($\sqrt{3}$, f($\sqrt{3}$)) γιατί η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_3=\sqrt{3}$

Οπότε το σημείο $x_3=\sqrt{3}$ είναι θέση σημείου καμπής

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Οπότε έχω το σημείο καμπής Γ($\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$)

$$\acute{E}\chi\omega: y_{\Gamma} = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{x_{\Gamma}}{4} \text{ Οπότε το σημείο } \Gamma(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}) \text{ ανήκει στην}$$

$$\text{ευθεία } y = \frac{x}{4}$$

6.

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ησυνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{3}x^4 + \alpha x^3 + \frac{1}{2}x - 2x - 1$ στρέφει τα κοίλα προς τα άνω

$$f'(x) = [\frac{1}{3}x^4 + \alpha x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1]' = (\frac{1}{3}x^4)' + (\alpha x^3)' + (\frac{1}{2}x^2)' - (2x)' - (1)' =$$

$$= \frac{1}{3}(x^4)' + \alpha(x^3)' + \frac{1}{2}(x^2)' - 2(x)' - 0 = \frac{1}{3}4x^3 + \alpha \bullet 3x^2 + \frac{1}{2}2x - 2 \bullet 1 =$$

$$= \frac{4}{3}x^3 + 3\alpha x^2 + x - 2$$

$$f''(x) = [\frac{4}{3}x^3 + 3\alpha x^2 + x - 2]' = (\frac{4}{3}x^3)' + (3\alpha x^2)' + (x)' - (2)' =$$

$$= \frac{4}{3}(x^3)' + 3\alpha(x^2)' + (x)' - 0 = \frac{4}{3}3x^2 + 3\alpha \bullet 2x + 1 = 4x^2 + 6\alpha x + 1$$

Επειδή η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $\mathbb{R}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα ισχύει $f''(x)\geq 0$.Οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα έχω $4x^2+6\alpha x+2\geq 0$.Άρα : $\Delta\leq 0$

$\Delta\leq 0\Leftrightarrow(6\alpha)^2-4\bullet 4\bullet 1\leq 0\Leftrightarrow 36\alpha^2-16\leq 0\Leftrightarrow 36\alpha^2\leq 16\Leftrightarrow\sqrt{36}\leq\sqrt{16}$

$\Leftrightarrow\sqrt{36}\sqrt{\alpha^2}\leq 4\Leftrightarrow 6|\alpha|\leq 4\Leftrightarrow\dfrac{6|\alpha|}{6}\leq\dfrac{4}{6}\Leftrightarrow|\alpha|\leq\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow-\dfrac{2}{3}\leq\alpha\leq\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow$

$\alpha\in\left[-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right]$

Αν $\alpha\in\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ έχω $\Delta<0$.Οπότε $4x^2+6\alpha x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Συνεπώς $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Οπότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω

Αν $\alpha=\pm\dfrac{2}{3}$.Τότε η δευτεροβάθμια εξίσωση $4x^2+6\alpha x+2=0$ έχει μια ρίζα διπλή την $\rho=-\dfrac{6\alpha}{2\bullet 4}=-\dfrac{3\alpha}{4}$.Τότε θα έχω :

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ f''(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(-\infty,\rho)\\ (\mathrm{II})\ f''(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(\rho,+\infty)\\ (\mathrm{III})\ \text{Η } f' \text{ είναι συνεχής στο σημείο } x_0=\rho \text{ ως παραγωγίσιμη}\end{array}\right\}$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.Συνεπώς η f' είναι κυτρή στο $\mathbb{R}$

7.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=(x^3-x)\lvert x\rvert$.Να βρεθούν οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής

$$f(x)=(x^3-x)|x|=\begin{cases}(x^3-x)|x|, x<0\\(x^3-x)|x|, x\geq 0\end{cases}=\begin{cases}(x^3-x)(-x), x<0\\(x^3-x)x, x\geq 0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}-x^4+x^2, x<0\\x^4-x^2, x\geq 0\end{cases}$$

Αν $x\in(-\infty,0)$ θα έχω : $f'(x)=(-x^4+x^2)'=-(x^4)'+(x^2)'=-4x^3+2x$

Αν $x\in(0,+\infty)$ θα έχω : $f'(x)=(x^4-x^2)'=(x^4)'-(x^2)'=4x^3-2x$

Θα εξετάσω αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$

Θεωρώ τη συνάρτηση $\lambda(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=$

$$= \frac{f(h)-0}{h} = \begin{cases} \dfrac{-h^4+h^2}{h}, h<0 \\ \dfrac{h^4-h^2}{h}, h>0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{h^2(-h^2+1)}{h}, h<0 \\ \dfrac{h^2(h^2-1)}{h}, h>0 \end{cases} = \begin{cases} h(-h^2+1), h<0 \\ h(h^2-1), h>0 \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \lambda(h) = \lim_{h\to 0^-} h(-h^2+1) = 0$$

$$\lim_{h\to 0^+} \lambda(h) = \lim_{h\to 0^+} h(h^2-1) = 0$$

$\text{Επειδή} \lim_{h\to 0^-} \lambda(h) = \lim_{h\to 0^+} \lambda(h) = 0 \;\; \theta\alpha\acute{\varepsilon}\chi\omega : \lim_{h\to 0} \lambda(h) = 0$

$\text{Οπότε} : f'(0) = \lim_{h\to 0} \lambda(h) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} -4x^3+2x, x<0 \\ 4x^3-2x, x\geq 0 \end{cases}$$

$\text{Αν } x\in(-\infty,0) \;\; \theta\alpha \;\; \acute{\varepsilon}\chi\omega : f''(x) = (-4x^3+2x)' = -4(x^3)'+2(x)' =$

$= -4 \bullet 3x^2 + 2 = -12x^2 + 2$

$\text{Αν } x\in(0,+\infty) \;\; \theta\alpha \;\; \acute{\varepsilon}\chi\omega : f''(x) = (4x^3-2x)' = 4(x^3)'-2(x)' =$

$= 4 \bullet 3x^2 - 2 = 12x^2 - 2$

Θα εξετάσω αν η f' *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0 = 0$

Θεωρώ τη συνάρτηση $\lambda_1(h) = \dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} = \dfrac{f'(0+h)-f'(0)}{h} =$

$$= \frac{f'(h)-0}{h} = \begin{cases} \dfrac{-4h^3+2h}{h}, h<0 \\ \dfrac{4h^3-2h}{h}, h>0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{h(-4h^2+2)}{h}, h<0 \\ \dfrac{h(4h^2-2)}{h}, h>0 \end{cases} = \begin{cases} -4h^2+2, h<0 \\ 4h^2-2, h>0 \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \lambda_1(h) = \lim_{h\to 0^-} (-4h^2+2) = 2$$

$$\lim_{h\to 0^+} \lambda_1(h) = \lim_{h\to 0^+} (4h^2-2) = -2$$

Επειδή $\lim_{h\to 0^-} \lambda_1(h) \neq \lim_{h\to 0^+} \lambda_1(h)$ *δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης* λ_1 *στοσημείο* $h_0 = 0$. *Άρα η συνάρτηση* f *δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0 = 0$

$$f''(x) = \begin{cases} -12x^2+2, x<0 \\ 12x^2-2, x>0 \end{cases}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -12x^2+2=0 \\ x<0 \end{pmatrix} \acute{\eta} \begin{pmatrix} 12x^2-2=0 \\ x>0 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{pmatrix}-12x^2=-2\\ x<0\end{pmatrix} \acute{\eta} \begin{pmatrix}12x^2=2\\ x>0\end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{pmatrix}\frac{-12x^2}{-12}=\frac{-2}{-12}\\ x<0\end{pmatrix} \acute{\eta} \begin{pmatrix}\frac{12x^2}{12}=\frac{2}{12}\\ x>0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{pmatrix}x^2=\frac{1}{6}\\ x<0\end{pmatrix} \acute{\eta} \begin{pmatrix}x^2=\frac{1}{6}\\ x>0\end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{pmatrix}x=-\sqrt{\frac{1}{6}}\\ x<0\end{pmatrix} \acute{\eta} \begin{pmatrix}x=\sqrt{\frac{1}{6}}\\ x>0\end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\left(x=-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \acute{\eta} \left(x=\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\} \Leftrightarrow \left\{\left(x=-\frac{1\bullet\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}}\right) \acute{\eta} \left(x=\frac{1\bullet\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}}\right)\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\left(x=-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \acute{\eta} \left(x=\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right\}$$

Τα πιθανά σημεία τα οποία είναι θέση σημείου καμπής είναι αυτα τα οποία η f'' δεν παραγωγίζεται ή η δεύτερη παράγωγος της f είναι μηδέν.Οπότε τα πιθανά σημεία τα οποία είναι θέση σημείου καμπής είναι $-\frac{\sqrt{6}}{6}, 0, \frac{\sqrt{6}}{6}$

8.

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = α x^3–3x^2.Να βρεθεί οπραγματικός αριθμός α όταν η f παρουσιάζει σημείο καμπής στη θέση x_o=1

f΄(x) = (α x^3–3x^2)΄= (α x^3) ΄–(3x^2)΄= α(x^3)΄–3(x^2)΄= α•3x^2–3•2x=
=3αx^2–6x

f΄΄(x) =(3αx^2–6x)΄=(3αx^2)΄–(6x)΄= 3α(x^2)΄– 6(x)΄= 3α•2x– 6•1=
=6αx– 6=6(αx–1)

I)Το σημείο x_o=1 είναι θέση σημείου καμπής

II)Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο x_o=1

Οπότε f΄(x$_o$)=0 ⟺ f΄(1)=0 ⟺ 6(α•1– 1)=0 ⟺ α–1=0 ⟺α=1

Αν α=1 θα έχω :

f΄΄(x) =6(x–1)

f΄΄(x)>0 ⟺ x–1>0 ⟺ x>1

f΄΄(x)=0 ⟺ x–1=0 ⟺ x=1

f΄΄(x)<0 ⟺ x–1<0 ⟺ x<1

x	–∞	1	+∞
f ΄΄	+	0	–
f			

Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x \in (-\infty,1)$ η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα $(-\infty,1)$
Επειδή $f''(x)<0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$ η f στρέφει τα κοιλα προς τα κάτω στο διάστημα $(1,+\infty)$

I) Η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα $(-\infty,1)$

II Η f στρέφει τα κοιλα προς τα κάτω στο διάστημα $(1,+\infty)$

III)Υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ γιατί η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o=1$

Οπότε το σημείο $x_o=1$ είναι θέση σημείου καμπής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-4x^3+12x^2+2$
α)Να βρείτε σε ποια διαστήματα κυρτή και σε ποια κοίλη η συνάρτηση
β)Να βρεθεί το σημείο καμπής της C_f

2.

Να βρείτε σε ποια διαστήματα κυρτή και σε ποια κοίλη η συνάρτηση $f(x) = \frac{5x^4}{4} - \frac{15}{2}x^2 + 10x$.

3.

Να βρείτε σε ποια διαστήματα κυρτή και σε ποια κοίλη η συνάρτηση $f(x)= \frac{\ln 2x}{x}$, $x \in (0,+\infty)$

4.

Να βρείτε σε ποια διαστήματα κυρτή και σε ποια κοίλη η συνάρτηση f(x)= x^3e^{-x}

5.

Να δείξετε ότι τα σημεία καμπής της $f(x)=\frac{x}{4x^2+1}$ βρίσκονται στην ευθεία $y= \frac{x}{4}$

6.

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{1}{3}x^4+2\alpha x^3+\frac{1}{2}x-2x-1$ στρέφει τα κοίλα προς τα άνω