# ΚΥΡΤΕΣ ΚΑΙ ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ Η ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΤΗΣ f΄

**Πότε η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ;;;**

Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ όταν :

- I) f συνεχής στο διάστημα Δ
- II) f παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του διαστήματος Δ
- III) f΄ γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του διαστήματος Δ

Τότε γράφουμε:

f Δ

**Πότε η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ;;;**

Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ όταν :

- I) f συνεχής στο διάστημα Δ
- II) f παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του διαστήματος Δ
- III) f΄ γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του διαστήματος Δ

Τότε γράφουμε:

f Δ

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

| |
|---|
| Ι)Αν μια συνάρτηση $f$ είναι κοίλη σε ένα διάστημα $\Delta$ τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ |
| ΙΙ)Αν $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε οτι: $\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta}$ |

Ι)Έστω $x_1 < x_2$

$$\begin{cases} \text{Ι)Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο διάστημα } [x_1, \frac{x_1+x_2}{2}] \\ \text{ΙΙ)Η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα } [x_1, \frac{x_1+x_2}{2}] \end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση $f$ ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα $[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x_1, \frac{x_1+x_2}{2})$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1}$$

$$\left.\begin{aligned} & f'(\xi) = \frac{f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1} \\ & \xi_1 \in (x_1, \frac{x_1+x_2}{2}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} & f'(\xi) = \frac{f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - \frac{2x_1}{2}} \\ & \xi_1 \in (x_1, \frac{x_1+x_2}{2}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} & f'(\xi) = \frac{f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1)}{\frac{x_2-x_1}{2}} \\ & \xi_1 \in (x_1, \frac{x_1+x_2}{2}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} & f'(\xi) = 2\frac{f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1)}{x_2-x_1} \\ & \xi_1 \in (x_1, \frac{x_1+x_2}{2}) \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{cases} \text{I)Η } \textit{συνάρτηση } f \textit{ είναι συνεχής στο διάστημα } [\frac{x_1+x_2}{2}, x_2] \\ \text{II)Η } \textit{συνάρτηση } f \textit{ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα } [\frac{x_1+x_2}{2}, x_2] \end{cases}$$

Ο*πότε η συνάρτηση* $f$ *ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα* $[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2]$.Ο*πότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi_2 \in (\frac{x_1+x_2}{2}, x_2)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει*

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}} \\ \xi_2 \in (\frac{x_1+x_2}{2}, x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})}{\frac{2x_1}{2} - \frac{x_1+x_2}{2}} \\ \xi_2 \in (\frac{x_1+x_2}{2}, x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})}{\frac{2x_2}{2} - \frac{x_1+x_2}{2}} \\ \xi_2 \in (\frac{x_1+x_2}{2}, x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})}{\frac{2x_2 - (x_1+x_2)}{2}} \\ \xi_2 \in (\frac{x_1+x_2}{2}, x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})}{\frac{2x_2 - x_1 - x_2}{2}} \\ \xi_2 \in (\frac{x_1+x_2}{2}, x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\xi_2) = 2\dfrac{f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})}{x_2 - x_1} \\ \xi_2 \in (\frac{x_1+x_2}{2}, x_2) \end{array}\right\}$$

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Leftrightarrow 2f(\frac{x_1+x_2}{2}) > f(x_1) + f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) + f(\frac{x_1+x_2}{2}) > f(x_1) + f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1) > f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\frac{x_1+x_2}{2})-f(x_1)}{x_2-x_1} > \frac{f(x_2)-f(\frac{x_1+x_2}{2})}{x_2-x_1} \Leftrightarrow (x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0)$$

$$2\frac{f(\frac{x_1+x_2}{2})-f(x_1)}{x_2-x_1} > 2\frac{f(x_2)-f(\frac{x_1+x_2}{2})}{x_2-x_1} \Leftrightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$$

$\text{Επειδή } x_1 < \xi_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < \xi_2 < x_2 \text{ έχω } \xi_1 < \xi_2$

$\text{Επειδή } \xi_1 < \xi_2 \text{ και η } f' \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα } (x_1, x_2)$

$\text{θαέχω } f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$

II)$\text{Αν } \alpha, \beta \in (0, +\infty) \text{ να αποδείξετε οτι}:$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta}$$

$\text{Αν } \alpha = \beta = \theta > 0 \text{ θαέχω}:$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\theta \bullet \theta} = \sqrt{\theta^2} = |\theta| = \theta \\ \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\theta+\theta}{2} = \frac{2\theta}{2} = \theta \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} = \sqrt{\alpha\beta}$$

$\text{Αν } \alpha < \beta \text{ Θεωρώ την συνάρτηση } f(x) = \ln x, x > 0$

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$\text{Αν } x_1 < x_2 \text{ με } x_1, x_2 \in (0, +\infty) \text{ θα έχω}:$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ x_1, x_2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$\text{Οπότε η συνάρτηση } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα.Επειδή η } f' \text{ είναι}$
$\text{γνησίως φθίνουσα στο } (0, +\infty) \text{ η } f \text{ είναι κοίλη στο } (0, +\infty)\text{.Άρα θα έχω}:$

$$f(\frac{\alpha+\beta}{2}) > \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \Leftrightarrow \ln\frac{\alpha+\beta}{2} > \frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2} \Leftrightarrow \ln\frac{\alpha+\beta}{2} > \frac{\ln\alpha\beta}{2} \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{\alpha+\beta}{2} > \ln(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} > (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} > \sqrt{\alpha\beta}$$

2.

I)Αν μια συνάρτηση $f$ είναι κυρτή σε ένα διάστημα $\Delta$ τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

II)Αν $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε οτι:

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3 \leq \frac{\alpha^3+\beta^3}{2}$$

I)Έστω $x_1 < x_2$

$$\begin{cases} \text{I)Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο διάστημα } [x_1, \frac{x_1+x_2}{2}] \\ \text{II)Η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα } [x_1, \frac{x_1+x_2}{2}] \end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση $f$ ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα$[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x_1, \frac{x_1+x_2}{2})$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi) = \dfrac{f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1} \\ \xi_1 \in (x_1, \frac{x_1+x_2}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\xi) = \dfrac{f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - \frac{2x_1}{2}} \\ \xi_1 \in (x_1, \frac{x_1+x_2}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\xi) = \dfrac{f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1)}{\frac{x_2-x_1}{2}} \\ \xi_1 \in (x_1, \frac{x_1+x_2}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\xi) = 2\dfrac{f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1)}{x_2-x_1} \\ \xi_1 \in (x_1, \frac{x_1+x_2}{2}) \end{array}\right\}$$

$$\begin{cases} \text{I)Η } \textit{συνάρτηση } f \textit{ είναι συνεχής στο διάστημα } [\frac{x_1+x_2}{2}, x_2] \\ \text{II)Η } \textit{συνάρτηση } f \textit{ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα } [\frac{x_1+x_2}{2}, x_2] \end{cases}$$

Ο*πότε η συνάρτηση* $f$ *ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα* $[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2]$.Ο*πότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi_2 \in (\frac{x_1+x_2}{2}, x_2)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει*

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}} \\ \xi_2 \in (\frac{x_1+x_2}{2}, x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})}{\frac{2x_1}{2} - \frac{x_1+x_2}{2}} \\ \xi_2 \in (\frac{x_1+x_2}{2}, x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})}{\frac{2x_2}{2} - \frac{x_1+x_2}{2}} \\ \xi_2 \in (\frac{x_1+x_2}{2}, x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})}{\frac{2x_2 - (x_1+x_2)}{2}} \\ \xi_2 \in (\frac{x_1+x_2}{2}, x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})}{\frac{2x_2 - x_1 - x_2}{2}} \\ \xi_2 \in (\frac{x_1+x_2}{2}, x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\xi_2) = 2\dfrac{f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2})}{x_2 - x_1} \\ \xi_2 \in (\frac{x_1+x_2}{2}, x_2) \end{array}\right\}$$

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Leftrightarrow 2f(\frac{x_1+x_2}{2}) < f(x_1) + f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) + f(\frac{x_1+x_2}{2}) < f(x_1) + f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) - f(x_1) < f(x_2) - f(\frac{x_1+x_2}{2}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\frac{x_1+x_2}{2})-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_2)-f(\frac{x_1+x_2}{2})}{x_2-x_1}\Leftrightarrow (x_2>x_1\Rightarrow x_2-x_1>0)$$

$$2\frac{f(\frac{x_1+x_2}{2})-f(x_1)}{x_2-x_1}<2\frac{f(x_2)-f(\frac{x_1+x_2}{2})}{x_2-x_1}\Leftrightarrow f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$$

$\text{Επειδή } x_1<\xi_1<\dfrac{x_1+x_2}{2}<\xi_2<x_2 \text{ έχω } \xi_1<\xi_2$

Επειδή $\xi_1<\xi_2$ και η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(x_1,x_2)$ θαέχω $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$

II)

Αν $\alpha=\beta$ θα έχω:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{2}=\dfrac{\alpha^3+\alpha^3}{2}=\dfrac{2\alpha^3}{2}=\alpha^3\\ \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^3=\left(\dfrac{\alpha+\alpha}{2}\right)^3=\left(\dfrac{2\alpha}{2}\right)^3=\alpha^3\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3=\frac{\alpha^3+\beta^3}{2}$$

Αν $\alpha<\beta$ Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=x^3, x>0$

$f'(x)=(x^3)'=3x^2$

Αν $x_1<x_2$ με $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ θα έχω:

$$\left.\begin{array}{l}x_1<x_2\\ x_1,x_2>0\end{array}\right\}\Rightarrow x_1^2<x_2^2\Rightarrow 3x_1^2<3x_2^2\Rightarrow f'(x_1)<f'(x_2)$$

Οπότε η συνάρτηση $f'$ είναι γνησίως αύξουσα.Επειδή η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ η $f$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.Άρα θα έχω:

$$f(\frac{\alpha+\beta}{2})<\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3\leq\frac{\alpha^3+\beta^3}{2}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

I)Αν μια συνάρτηση $f$ είναι κοίλη σε ένα διάστημα $\Delta$ τότε για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ με $2x_1\neq x_2$ ισχύει:

$$f(\frac{2x_1+x_2}{2})>\frac{f(2x_1)+f(x_2)}{2}$$

II)Αν $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ να αποδείξετε οτι:

$$\frac{2\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{2\alpha\beta}$$

2.

I)Αν μια συνάρτηση $f$ είναι κυρτή σε ένα διάστημα $\Delta$ τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $2x_1 \neq x_2$ ισχύει:

$$f\left(\frac{2x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(2x_1) + f(x_2)}{2}$$

II)Αν $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε οτι:

$$\left(\frac{2\alpha + \beta}{2}\right)^3 \leq \frac{8\alpha^3 + \beta^3}{2}$$

3.

I)Αν μια συνάρτηση $f$ είναι κοίλη σε ένα διάστημα $\Delta$ τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $3x_1 \neq x_2$ ισχύει:

$$f\left(\frac{3x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(3x_1) + f(x_2)}{2}$$

II)Αν $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε οτι:

$$\frac{3\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{3\alpha\beta}$$

4.

I)Αν μια συνάρτηση $f$ είναι κυρτή σε ένα διάστημα $\Delta$ τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $3x_1 \neq x_2$ ισχύει:

$$f\left(\frac{3x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(3x_1) + f(x_2)}{2}$$

II)Αν $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε οτι:

$$\left(\frac{3\alpha + \beta}{2}\right)^3 \leq \frac{27\alpha^3 + \beta^3}{2}$$