ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Πως θα μελετήσω την συνάρτηση f

Θα βρω το πεδίο ορισμού της f

↓

Θα μελετήσω την f ως προς την συνέχεια

↓

Θα μελετήσω την f ως προς την μονοτονία και ακρότατα

↓

Θα μελετήσω την f ως προς τα κοιλά τα κυρτά και τα σημείο καμπής

↓

Κατασκευάζω τον πίνακα μεταβολής της συνάρτησης f

↓

Θα βρω τις ασύμπτωτες της C_f

↓

Θα βρω τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες Χ΄Χ και Υ΄Υ

↓

Θα εξετάσω αν η συνάρτηση f είναι άρτια περιττή , περιοδική

↓

Κατασκευάζω την γραφική παράσταση της συνάρτησης f

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

$\text{N}\alpha\ \mu\varepsilon\lambda\varepsilon\tau\eta\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$

$\text{N}\alpha\ \mu\varepsilon\lambda\varepsilon\tau\eta\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$

$\underline{\Theta\alpha\ \beta\rho\omega\ \tau o\ \pi\varepsilon\delta\acute{\iota}o\ o\rho\iota\sigma\mu o\acute{\upsilon}\ \tau\eta\varsigma\ f}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}:x+2\neq 0\}$

$\theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta: x+2=0\Leftrightarrow x=-2$

$x\in D_f \Leftrightarrow x+2\neq 0\Leftrightarrow x\neq -2\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$

$D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$

$\underline{\text{M}o\nu o\tau o\nu\acute{\iota}\alpha\ \kappa\alpha\iota\ \alpha\kappa\rho\acute{o}\tau\alpha\tau\alpha\ \tau\eta\varsigma\ f}$

$$f'(x)=\left(\frac{2x+3}{x+2}\right)'=\frac{(2x+3)'(x+2)-(2x+3)(x+2)'}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{\left[2(x)'+(3)'\right](x+2)-(2x+3)\left[(x)'+(2)'\right]}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{2(x+2)-(2x+3)}{(x+2)^2}=\frac{2x+4-2x-3}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}$$

$\text{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ f'(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\alpha\theta\varepsilon\ x\in(-\infty,-2)\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma$ $\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ (-\infty,-2).\text{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ f'(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\alpha\theta\varepsilon\ x\in(-2,+\infty)$ $\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ (-2,+\infty).$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{(x+2)^2}\right)'=\left((x+2)^{-2}\right)'=-2(x+2)^{-2-1}(x+2)'=$$

$$=-2(x+2)^{-3}\left[(x)'+(2)'\right]=-\frac{2}{(x+2)^3}=-\frac{2}{x+2}\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)>0 \\ x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -\dfrac{2}{x+2}\dfrac{1}{(x+2)^2}>0 \\ x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{2}{x+2}>0 \\ x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+2<0 \\ x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x<-2 \\ x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty) \end{array}\right\} \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)<0 \\ x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -\dfrac{2}{x+2}\dfrac{1}{\left(x+2\right)^2}<0 \\ x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{2}{x+2}<0 \\ x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+2>0 \\ x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x>-2 \\ x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty) \end{array}\right\} \Leftrightarrow x\in(-2,+\infty)$$

Ε*πειδή* $f''(x)>0$ *για κάθε* $(-\infty,-2)$ *η* f *είναι κυρτή στο* $(-\infty,-2)$.Ε*πειδή* $f''(x)<0$ *για κάθε* $(-2,+\infty)$ *η* f *είναι κοίλη στο* $(-2,+\infty)$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'	$+$		$+$
f''	$+$		$-$
f			

<u>$\text{Κατακόρυφη ασύπτωτη}$</u>

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{2x+3}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2}\left(2x+3\right) = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2} \lim_{x\to -2^+} \left(2x+3\right) =$$
$$= (+\infty)\left[2\left(-2\right)+3\right] = (+\infty)\left(-1\right) = -\infty$$

Άρα η C_f *έχει* $\frac{1}{2}$ *κατακόρυφη ασύμτωτη την ευθεία* $x=-2$

<u>*Πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες* :</u>

$$\lambda = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x+3}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{x\left(x+2\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\bullet\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\frac{2+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} \frac{2+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x}}{1+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}} =$$

$$= 0\bullet\frac{2+0}{1+0} = 0$$

$$\mu = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+3}{x+2}-0x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+3}{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{2+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x}}{1+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}} = \frac{2+0}{1+0} = 2$$

Άρα η C_f *έχει ασύπτωτη την ευθεία*

$y = \lambda x + \mu \Leftrightarrow y = 0x + 2 \Leftrightarrow y = 2$

Ο*πότε η ευθεία* $y=2$ *είναι οριζόντια ασύπτωτη της* C_f

<u>*Σημεία τομής της* C_f *με τον άξονα* $\mathrm{X'X}$:</u>

Α*ν* $\mathrm{A}(x,y)$ *σημείο τομής της* C_f *με τον άξονα* $\mathrm{X'X}$.

Τ*ότε θα έχω*: $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}(x,y)\in C_f \\ \mathrm{A}(x,y)\in \mathrm{X'X} \\ x\neq -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\frac{2x+3}{x+2} \\ y=0 \\ x\neq -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+3=0 \\ y=0 \\ x\neq -2 \end{array}\right\}$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x=-3 \\ y=0 \\ x\neq -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{2x}{2}=-\frac{3}{2} \\ y=0 \\ x\neq -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{3}{2} \\ y=0 \\ x\neq -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{3}{2} \\ y=0 \end{array}\right\}$$

$Αρα\ η\ C_f\ τέμνει\ τον\ άξονα\ \mathrm{X'X}\ στο\ σημείο\ \mathrm{A}(-\frac{3}{2},0)$

<u>$Σημεία\ τομής\ της\ C_f\ με\ τον\ άξονα\ \mathrm{Y'Y}:$</u>

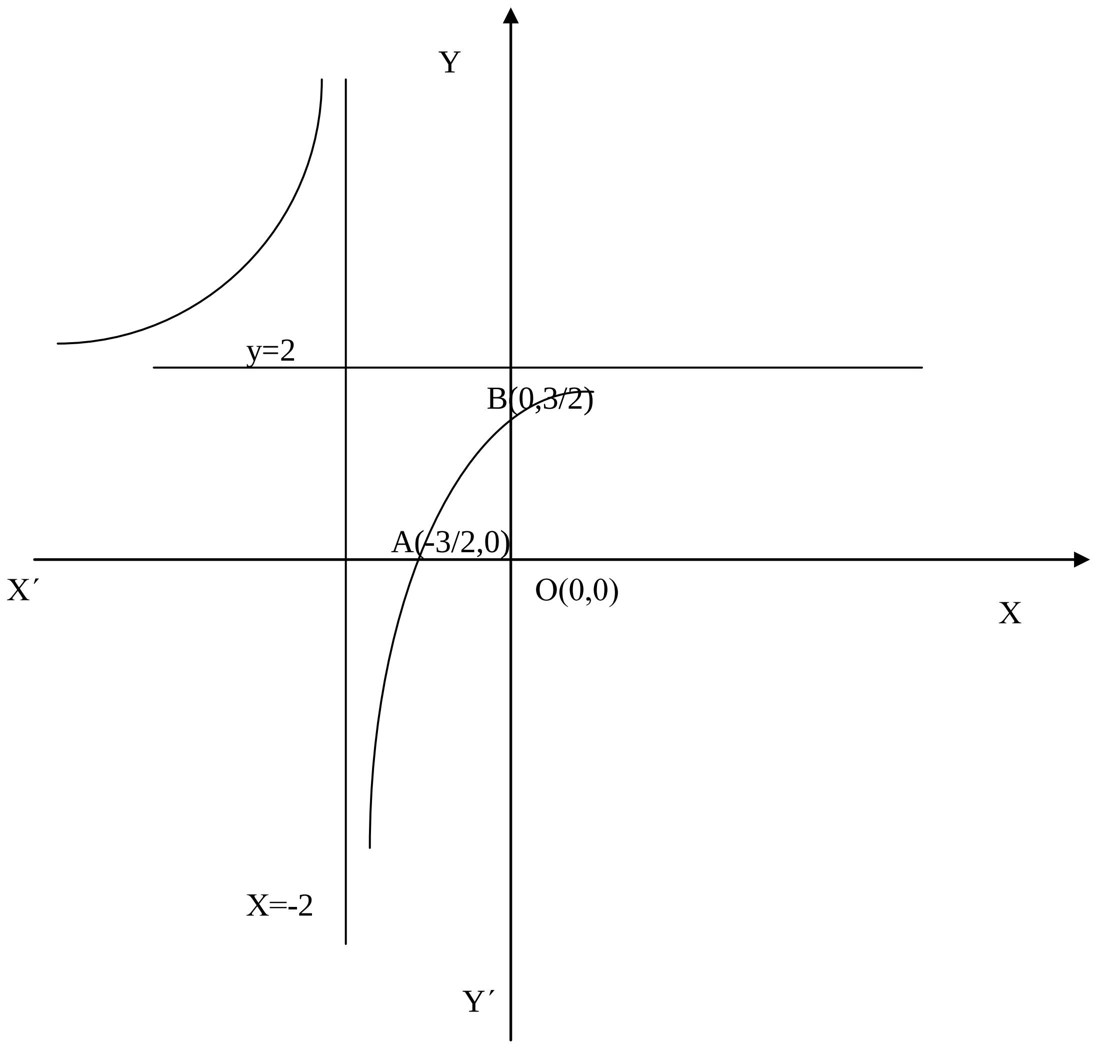
$\mathrm{A}ν\ \mathrm{B}(x,y)\ σημείο\ τομής\ της\ C_f\ με\ τον\ άξονα\ \mathrm{Y'X}.$

$$\mathrm{T}ότε\ θα\ έχω: \left\{\begin{matrix} \mathrm{B}(x,y)\in C_f \\ \mathrm{B}(x,y)\in \mathrm{Y'Y} \\ x\neq -2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y=\frac{2x+3}{x+2} \\ x=0 \\ x\neq -2 \\ \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y=\frac{2\bullet 0+3}{0+2} \\ x=0 \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y=\frac{3}{2} \\ x=0 \end{matrix}\right\}$$

$Αρα\ η\ C_f\ τέμνει\ τον\ άξονα\ Y'Y\ στο\ σημείο\ B(\frac{3}{2},0)$

<u>Χάραξη γραφικής παράστασης</u>



2.

Δίνεται συνάρτηση $f(x)= \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} x^2 + 2x$

Να μελετηθεί η συνάρτηση f και να γίνει η γραφική της παράσταση

$f'(x)=\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)'=\left(\frac{x^4}{4}\right)' - \left(\frac{3}{2}x^2\right) + (2x)'=$

$= \frac{(x^4)'}{4} - \frac{3}{2}(x^2)'+2(x)'= \frac{4x^3}{4} - \frac{3}{2} 2x+2 = x^3 - 3x + 2$

$f'(x)= x^3 - 3x + 2= x^3 - x-2x + 2= x(x^2 - 1)-2(x-1)=$

$=x(x-1)(x + 1)-2(x-1)= (x-1)[x(x + 1)-2] =$

$=(x-1)(x^2+x-1-1)= (x-1)(x^2-1+x-1)= (x-1)(x^2-1+x-1)=$

$=(x-1)[(x-1)(x+1)+ x-1]= =(x-1)(x-1)(x+1+1)=(x-1)^2(x+2)$

$(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		+	0	+	

$x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

$x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	+	

x	$-\infty$	-2		1		$+\infty$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^2(x+2)$	$-$	0	$+$	0	$+$	

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -2)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -2)$

Επειδή: I) f συνεχής στο $x_1 = 1$ ως πολυωνυμική

II) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-2, 1)$

III) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-2, -\infty)$

Επειδή:

I) f συνεχής στο $x_2 = -2$ ως πολυωνυμική

II) $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -2)$

III) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-2, 1)$

Η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_1 = -1$ τον αριθμό :

$$f(x_2) = f(-2) = \frac{(-2)^4}{4} - \frac{3}{2}(-2)^2 + 2(-2) = 4 - 12 - 4 = -12$$

$$f''(x) = (x^3 - 3x + 2)' = (x^3)' - (3x)' + (2)' = 3x^2 - 3(x)' + 0 =$$
$$= 3x^2 - 3 \cdot 1 = 3x^2 - 3$$

Οπότε : $f''(x) = 3x^2 - 3$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση : $3x^2 - 3 = 0$

$$3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$3x^2 = 3 \Leftrightarrow$$
$$\frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Leftrightarrow$$
$$x^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow$$
$$x = \pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$3x^2 - 3$		+	0	–	0	+	

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f ΄΄	+	0 –	0 +	
f				

I) f συνεχής στο $(-\infty,-1]$

II) $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$

Οπότε η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα $(-\infty,-1]$

I) f συνεχής στο $[-1,1]$

II) $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,1)$

Οπότε η f στρέφει τα κοιλα προς τα κάτω στο διάστημα$[-1,1]$

I) f συνεχής στο $[1,+\infty)$

II) $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$

Οπότε η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα$[1,+\infty)$

I) Η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα $(-\infty,-1\ )$

II Η f στρέφει τα κοιλα προς τα κάτω στο διάστημα $(-1\ ,1)$

III)Υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-1, f(-1))$ γιατί η f είναι παραγωγίσιμη στη θέσω $x_3=-1$

Οπότε το σημείο $x_3=-1$ είναι θέση σημείου καμπής

Οπότε έχω το σημείο καμπής $A(-1,-\frac{13}{4})$

I) Η f στρέφει τα κοιλα προς τα κάτω στο διάστημα (–1,1)

II Η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα (–1 ,+∞)

III)Υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο σημείο B(1, f(1)) γιατί η f είναι παραγωγίσιμη στη θέσω $x_1=1$

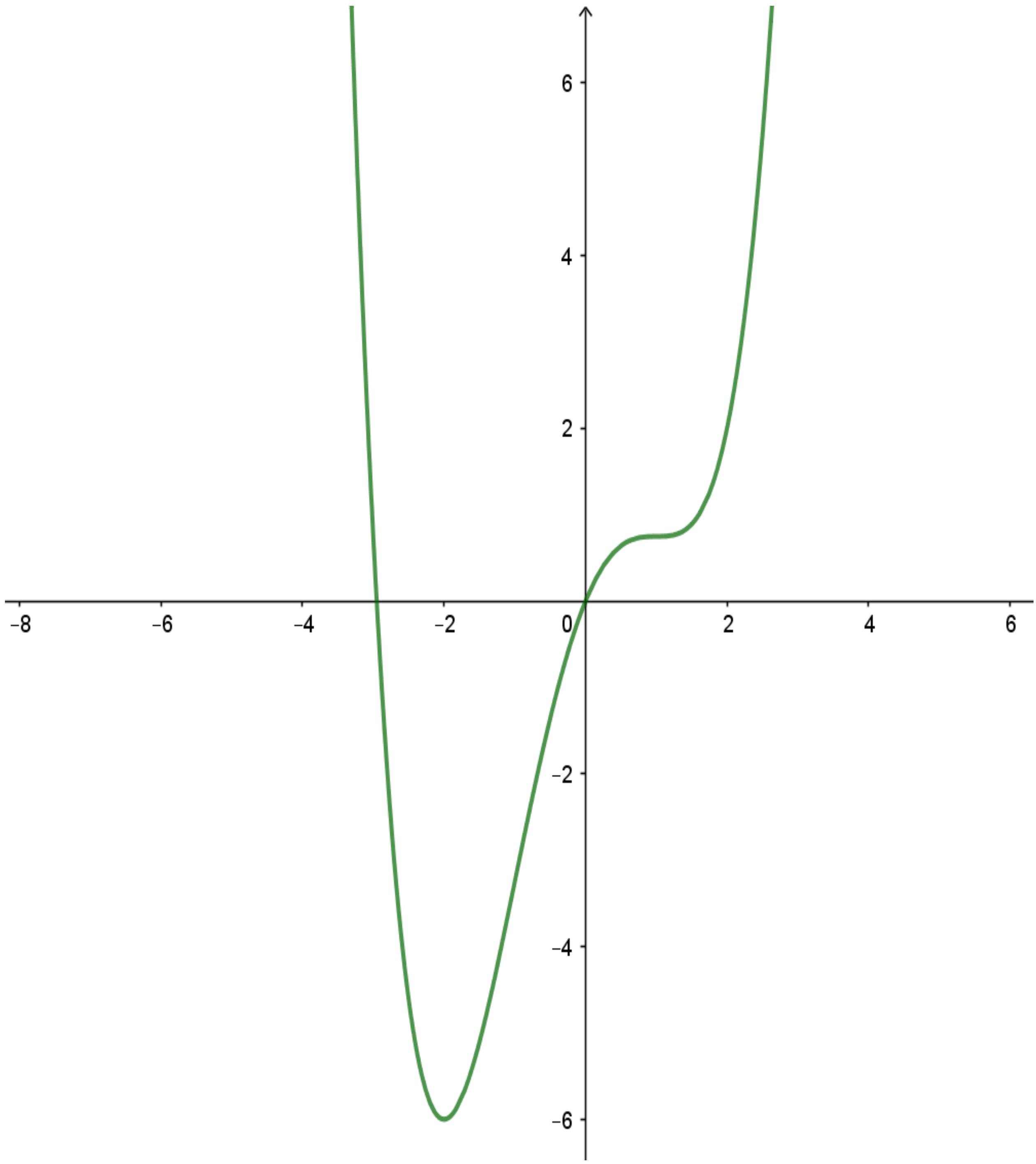
Οπότε το σημείο $x_2=1$ είναι θέση σημείου καμπής

$$f(x_1) = f(1) = \frac{1^4}{4} - \frac{3}{2}\,1^2 + 2\cdot 1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{6}{4} + \frac{8}{4} = \frac{3}{4}$$

Οπότε έχω το σημείο καμπής B$\left(1, \frac{3}{4}\right)$

x	–∞		– 2		–1		1		+∞
f ΄		–	0	+		+	0	+	
f ΄΄		+		+	0	–	0	+	
f									


6
4
2
-2
-4
-6
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6

3.

I)Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = x\, e^x$ και να γίνει η γραφική της παράσταση
II)Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x = \lambda e^{-x}$

$f\,'(x) = (x\, e^x)' = (x)'\, e^x + x\,(e^x)' = 1 \cdot e^x + x\, e^x = e^x + x\, e^x =$
$= e^x(1+x)$

$f\,'(x) \ge 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) \ge 0 \Leftrightarrow x + 1 \ge 0$(Γιατι : $e^x > 0$ για κάθε $x \in IR$) $\Leftrightarrow x \ge -1$

$f\,'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f\,'$	$-$	0	
f	↘		↗

Επειδη $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1)$

Επειδη $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, +\infty)$

Επειδή: $\begin{cases} \text{I)Η } f \text{ συνεχής στο } x_1 = -1 \\ \text{II) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, -1) \\ \text{III)} f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (-1, +\infty) \end{cases}$

Η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στη θέση $x_1 = -1$ τον αριθμό

$$f(-1) = -1e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$f\,''(x) = (e^x + x\, e^x)' = (x\, e^x)' + (e^x)' = (x)'\, e^x + x\,(e^x)' + e^x =$

$= 1 \cdot e^x + x\,e^x + e^x = 2e^x + x\,e^x = e^x(2+x)$

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x(2+x) \geq 0 \Leftrightarrow x + 2 \geq 0$ (Γιατι : $e^x > 0$ για κάθε $x \in IR$) $\Leftrightarrow x \geq -2$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f			

I) f συνεχής στο $(-\infty,-2]$

II) $f''(x)>0$ για κάθε $x \in (-\infty,-2)$

Οπότε η f στρέφει τα κοιλα προς τα κάτω στο διάστημα $(-\infty,-2]$

I) f συνεχής στο $[-2,+\infty)$

II) $f''(x)<0$ για κάθε $x \in (-2,+\infty)$

Οπότε η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα $[-2,+\infty)$

I) Η f στρέφει τα κοιλα προς τα κάτω στο διάστημα $(-\infty,-2)$

II Η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα $(-2,+\infty)$

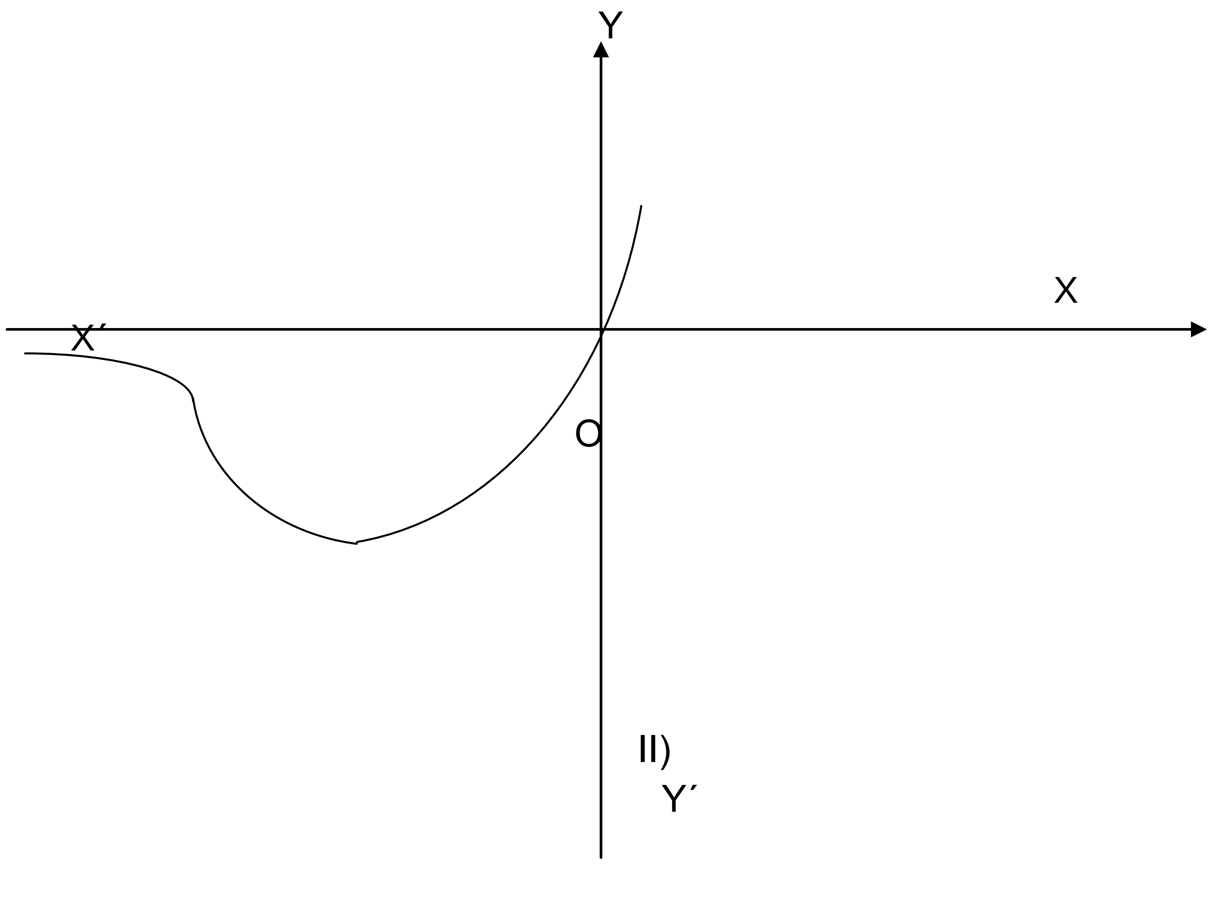
III)Υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-2, f(-2))$ γιατί η f είναι παραγωγίσιμη στη θέσω $x_2=-2$

Οπότε το σημείο $x_2=-2$ είναι θέση σημείου καμπής

$$f(-2) = -2e^{-2} = -\frac{2}{e^2}$$

Οπότε έχω το σημείο καμπής Α($-2, -\frac{2}{e^2}$)

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
f ΄		$-$	0	$-$	0	$+$	
f ΄΄		$-$	0	$+$	0	$+$	
f							



II)

$x=\lambda e^{-x} \Leftrightarrow x=\dfrac{\lambda}{e^{x}} \Leftrightarrow xe^{x}=\lambda$

$\Delta\iota\alpha\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\tau\iota\varsigma\pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma:$

$$\begin{cases} \text{I})\lambda<-\dfrac{1}{e} \\ \text{II})\lambda=-\dfrac{1}{e} \\ \text{III})\lambda>-\dfrac{1}{e} \end{cases}$$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\text{I}):\text{A}\nu\ \lambda<-\dfrac{1}{e}\ \eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ xe^{x}=\lambda\ \delta\varepsilon\nu\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\text{II}):\text{A}\nu\ \lambda=-\dfrac{1}{e}\ \eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ xe^{x}=\lambda\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \mu o\nu\alpha\delta\iota\kappa\acute{\eta}$

$\lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta\ \tau\eta\nu\ x=-1$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\text{III}):\text{A}\nu\ \lambda>-\dfrac{1}{e}\ \eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ xe^{x}=\lambda\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \delta\upsilon o$

$\delta\iota\alpha\kappa\varepsilon\kappa\rho\iota\mu\acute{\varepsilon}\nu\varepsilon\varsigma\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma$

4.

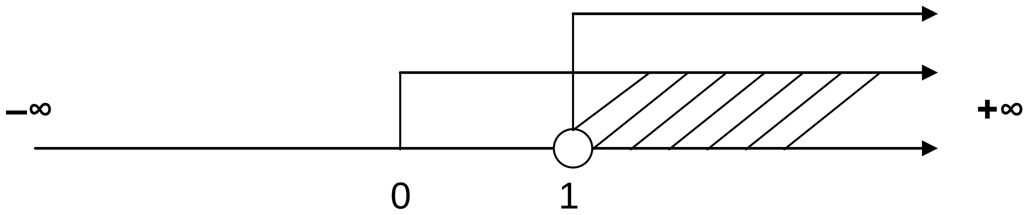
I)Να μελετηθεί η συνάρτηση f(x) = x – 1 – lnx, x > 0 και να γίνει η γραφική της παράσταση II)Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=λ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$f'(x) = (x-1-\ln x)' = (x)' - (1)' - (\ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$\left.\begin{matrix} f'(x)>0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} \dfrac{x-1}{x}>0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} x-1>0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} x>1 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow x>1$$



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{x} = 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \quad x = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \quad 0 < x < 1$$

x	0		1		+∞
f ΄	‖	–	0		
f	‖	↘		↗	

Επειδη f΄(x) < 0 για κάθε xє(0, 1) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0, 1)

Επειδη f΄(x) > 0 για κάθε xє(1, +∞) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (– 1, +∞)

$$\text{Επειδή: } \begin{cases} \text{I) f συνεχής στο } x_o = 1 \text{ ως πολυωνυμική} \\ \text{II) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1) \\ \text{III)} f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στη θέση $x_o = 1$ τον αριθμό :

$f(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$

$$f'(x) = \frac{x-1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = 1 - x^{-1}$$

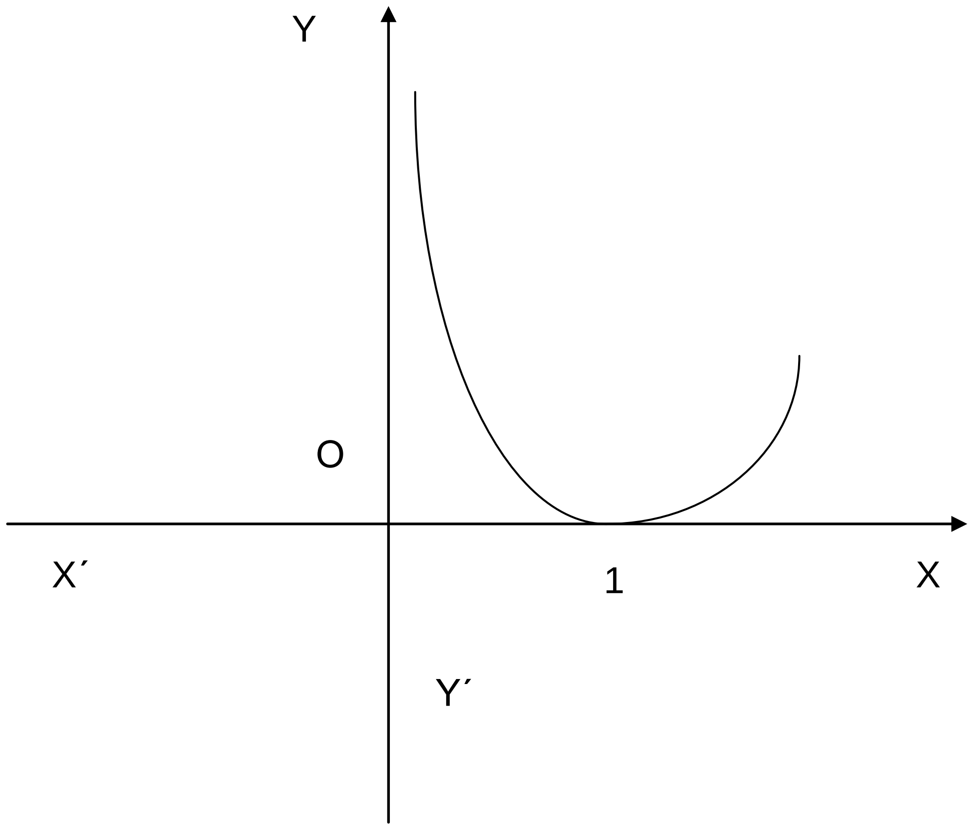
$$f''(x) = (1-x^{-1})' = (1)' - (x^{-1})' = 0 - (-1)\, x^{-1-1} = \frac{1}{x^2}$$

Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f ΄	−	0	+
f ΄΄	+		+
f	↘		↗

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x-1-\ln x) = \lim_{x\to 0^+} x - 1 - \lim_{x\to 0^+} \ln x = 0-1-(-\infty) = \infty$$

$\acute{A}\rho\alpha$ η C_f $\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota$ $\kappa\alpha\tau\alpha\kappa\acute{o}\rho\upsilon\varphi\eta$ $\alpha\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\tau\eta$ $\tau\eta\nu$ $\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha$ $x=0$ $\delta\eta\lambda.$ $\tau o\nu$ $\acute{\alpha}\xi o\nu\alpha$ $Y'Y$



II)

$\Delta\iota\alpha\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\tau\iota\varsigma\pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma:$

$$\begin{cases} \mathrm{I})\lambda<0 \\ \mathrm{II})\lambda=1 \\ \mathrm{III})\lambda>1 \end{cases}$$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{I}):\mathrm{A}\nu$ $\lambda<0$ η $\varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta$ $f(x)=\lambda$ $\delta\varepsilon\nu$ $\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota$ $\lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{II}):\mathrm{A}\nu$ $\lambda=0$ η $\varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta$ $f(x)=\lambda$ $\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota$ $\mu o\nu\alpha\delta\iota\kappa\acute{\eta}$ $\lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta$ $\tau\eta\nu$ $x=1$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{III}):\mathrm{A}\nu$ $\lambda>0$ η $\varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta$ $f(x)=\lambda$ $\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota$ $\delta\upsilon o$ $\delta\iota\alpha\kappa\varepsilon\kappa\rho\iota\mu\acute{\varepsilon}\nu\varepsilon\varsigma$ $\lambda\acute{\upsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma$

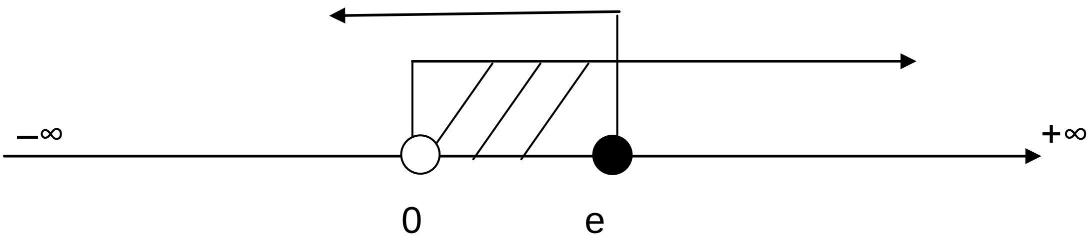
5.

I)Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, x∈(0,+∞) και να γίνει η γραφικής της παράσταση II)Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln x=\lambda x, x>0$

$$f(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'x-\ln x\,(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\begin{cases} f'(x)\ge 0 \\ x>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1-\ln x\ge 0 \\ x>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{matrix} -\ln x\ge -1 \\ x>0 \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ln x\le \ln e \\ x>0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\le e \\ x>0 \end{cases} \Longleftrightarrow 0<x\le e$$



$$\begin{cases} f'(x)<0 \\ x>0 \end{cases} \Longleftrightarrow x>e$$

x	0		e		+∞
f ΄		+	0	–	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Επειδη $f΄(x) >0$ για κάθε $x\epsilon(0,e)$ συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0, e)

Επειδη $f΄(x) < 0$ για κάθε $x\epsilon(e, +\infty)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(e, +\infty)$

Επειδή: $\begin{cases} \text{I) f συνεχής στο } x_1 = e \\ \text{II) } f΄(x) > 0 \text{ για κάθε } x\epsilon(0,e) \\ \text{III)} f΄(x) \text{ , } 0 \text{ για κάθε } x\epsilon(e,+\infty \text{)} \end{cases}$

Η συνάρτηση f έχει έγιστο στη θέση $x_1 = e$ τον αριθμό

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

$$f΄΄(x)=\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)΄= \frac{(1-\ln x)΄\, x^2-(1-\ln x)\,(x^2)΄}{(x^2)^2} =$$

$$= \frac{[(1)΄-(\ln x)΄]\, x^2-(1-\ln x)\, 2x}{x^4} = \frac{-\frac{1}{x}\, x^2-(1-\ln x)\, 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-\, x-(1-\ln x)2x}{x^4} = \frac{x[\, -1-2(1-\ln x)]}{x^4} = \frac{-1-2+3\ln x}{x^3} =$$

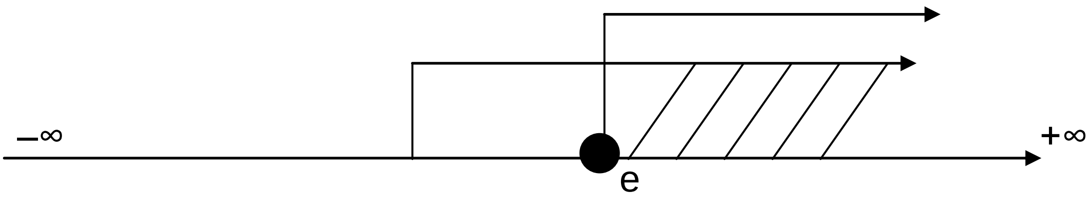
$$= \frac{3\ln x -3}{x^3} = \frac{3(\ln x -1)}{x^3} = \frac{3}{x^3}\,(\ln x -1)$$

Επειδή $x>0$ θα έχω :

$$x^3>0 \Rightarrow \frac{1}{x^3}>0 \Rightarrow \frac{3}{x^3}>0$$

$$\left.\begin{matrix} f''(x)\geq 0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \ln x-1\geq 0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \ln x\geq 1 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \ln x\geq \ln e \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} x\geq e \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x\geq e$$



$$\left.\begin{matrix} f''(x)<0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow 0<x<e$$

x	0		e		+∞
f ΄΄		–	0	+	
f					

I) f συνεχής στο (0,e]

II) f΄΄(x)<0 για κάθε x∈(0,e)

Οπότε η f στρέφει τα κοιλα προς τα κάτω στο διάστημα (0,e]

I) f συνεχής στο [e, +∞)

II) f΄΄(x)>0 για κάθε x∈(e, +∞)

Οπότε η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα (e, +∞)

I) Η f στρέφει τα κοιλα προς τα κάτω στο διάστημα (0,e)

II Η f στρέφει τα κοιλα προς τα άνω στο διάστημα (e ,+∞)

III)Υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(e, f(e)) γιατί
η f είναι παραγωγίσιμη στη θέσω x_1=e

Οπότε έχω το σημείο καμπής Α(e, $\frac{1}{e}$)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \lim_{x\to 0^+} \ln x = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$ δηλ. τον άξονα Υ΄Υ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}$$

$\text{Επειδή } \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty, \lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ *απο τον κανόνα του De'Hospital θα έχω*:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

$$\mu=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$$

$\text{Επειδή } \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty, \lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ *απο τον κανόνα του De'Hospital θα έχω*:

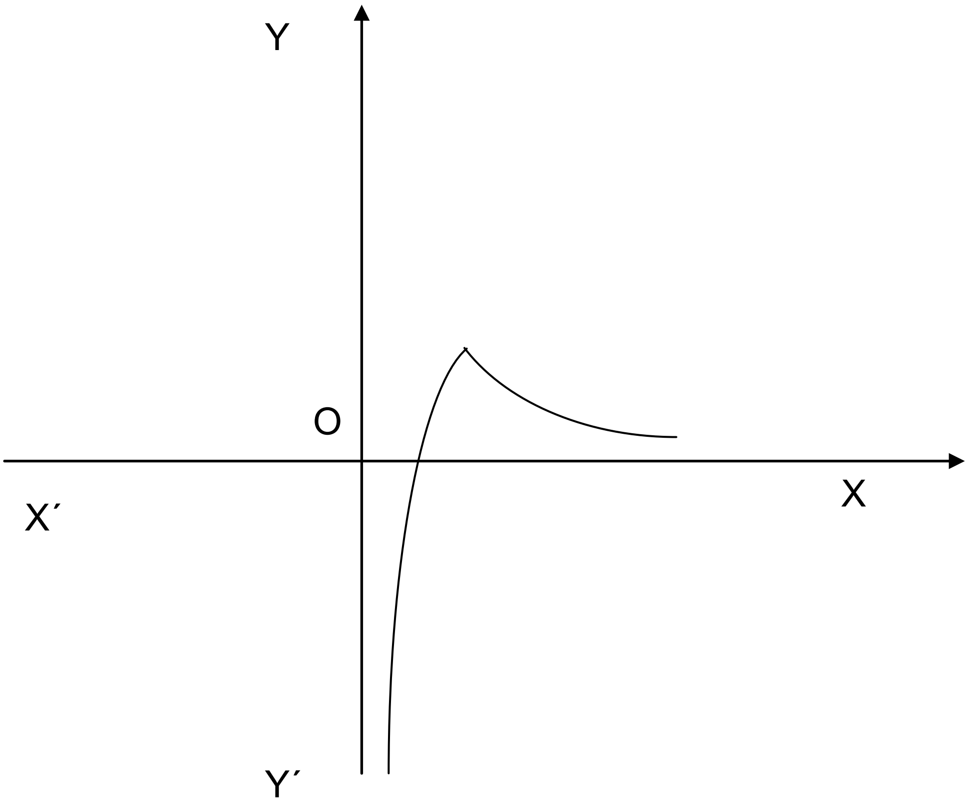
$$\mu=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Άρα έχω ασύπτωτη την ευθεία $y=\lambda x+\mu$:

$$y=\lambda x+\mu \Leftrightarrow y=0\bullet x+0 \Leftrightarrow y=0$$

Ο*πότε έχω οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα* $X'X$

x	0		e		+∞
f ´		+	0	−	
f ´´		−		+	
f		$\nearrow$		$\searrow$	



II)

$$\ln x = \lambda x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\lambda x}{x} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \lambda$$

$\Delta\iota\alpha\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\tau\iota\varsigma\pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma:$

$$\begin{cases} \mathrm{I})\lambda \le 0 \\ \mathrm{II})0 < \lambda < \dfrac{1}{e} \\ \mathrm{III})\lambda = \dfrac{1}{e} \\ IV)\lambda > \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{I}):\mathrm{A}\nu\ \ \lambda \le 0\ \ \eta\ \ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \ \ln x = \lambda x\ \ \delta\varepsilon\nu\ \ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \ \mu o\nu\alpha\delta\iota\kappa\acute{\eta}$ $\lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{II}):\mathrm{A}\nu\ \ 0 < \lambda < \dfrac{1}{e}\ \ \eta\ \ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \ \ln x = \lambda x\ \ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \ \delta\upsilon o$ $\delta\iota\alpha\kappa\varepsilon\kappa\rho\iota\mu\acute{\varepsilon}\nu\varepsilon\varsigma\ \ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{III}):\mathrm{A}\nu\ \ \lambda = \dfrac{1}{e}\ \ \eta\ \ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \ \ln x = \lambda x\ \ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \ \mu o\nu\alpha\delta\iota\kappa\acute{\eta}$ $\lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta\ \ \tau\eta\nu\ \ x = e$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta(\mathrm{I}V):\mathrm{A}\nu\ \ \lambda > \dfrac{1}{e}\ \ \eta\ \ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \ \ln x = \lambda x\ \ \delta\varepsilon\nu\ \ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta$

6.

Να αποδειχθεί ότι : $e^x \ge x+1$

Θεωρώ την συνάρτηση f(x)=e^x

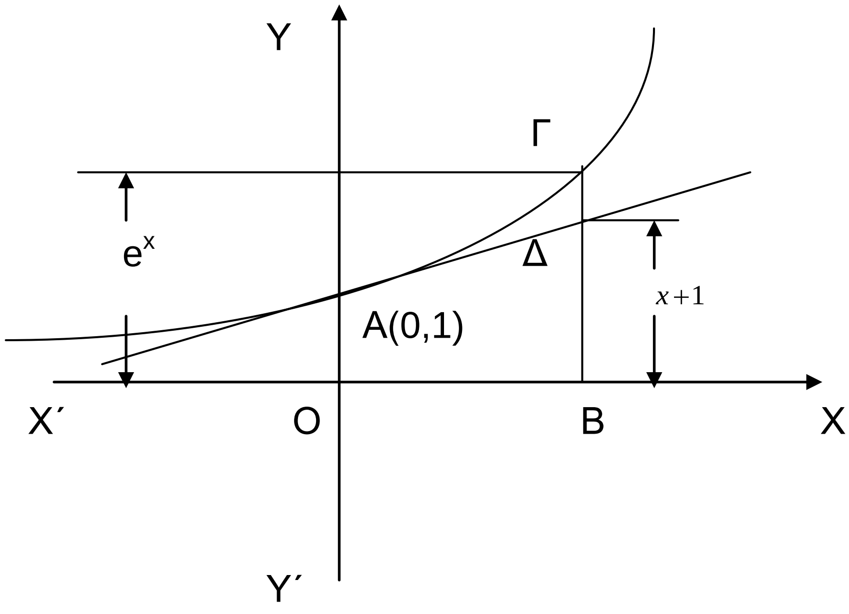
f΄ (x)=(e^x)΄= f΄΄ (x)=(e^x)΄= e^x

Επειδή f΄΄ (x)>0 για κάθε x∈IR προκύπτει ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω.Αν (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής Α(0, f(0)).Ηευθεία (ε) θα έχει εξίσωση :

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - e^0 = e^0 x \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow y = x+1$$

Επειδή f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία (ε)>Οπότε θα ισχύει:

$$\mathrm{B}\Delta \ge \mathrm{B}\Gamma \Leftrightarrow e^x \ge x+1$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3}{2}x^2-2x$

Να μελετηθεί η συνάρτηση f και να γίνει η γραφική της παράσταση

2.

I)Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = x e^{2x}$ και να γίνει η γραφική της παράσταση

II)Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x = \lambda e^{-2x}$

3.

I)Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = 2x - 1 - \ln 2x$, $x > 0$ και να γίνει η γραφική της παράσταση

II)Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$

4.

I)Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln 2x}{x}$, $x\in(0,+\infty)$ και να γίνει η γραφικής της παράσταση

II)Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln 2x = \lambda x, x>0$

5.

Να αποδειχθεί ότι : $e^{2x} \geq 2x+1$