ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αν : I) Αν f συνεχής σε ένα διάστημα Δ

II) f΄(x)=0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει

III)Το Δ θα έχει την μορφή [α,β],(α,β],[α,β),(α,β),(–∞,α],(–∞,α), [α, +∞),(α, +∞),IR

Τότε η f είναι σταθερή στο Δ

Αν: I) Αν f,g συνεχεις σε ένα διάστημα Δ

II) f΄(x)= g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

III)Το Δ θα έχει την μορφή [α,β],(α,β],[α,β),(α,β),(–∞,α],(–∞,α), [α, +∞),(α, +∞),IR

Τότε υπάρχει c∈IR τέτοιο ώστε για κάθε x∈Δ να ισχύει f(x)=g(x)+c

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Για μια συνάρτηση f ορισμένη στο IR ισχύει $|f(x)–f(y)|\leq 2|x–y|^3$ (1)για κάθε x,y∈IR.Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση

Αν $x_o\in$IR θα αποδείξω ότι $f΄(x_o)=0$. Θεωρώ την συνάρτηση :

$$\lambda(h) = \frac{f(x_o + h) – f(x_o)}{h} \quad ,h\neq 0$$

Στην σχέση (1) θέτω $x = x_o + h$ και $y = x_o$

$|f(x)–f(y)|\leq 2|x–y|^3$ ή $|f(x_o + h)–f(x_o)|\leq 2\,|x_o + h – x_o|^3$ ή

$$|f(x_o + h)–f(x_o)|\leq 2\,|h|^3 \text{ ή } \frac{|f(x_o + h)–f(x_o)|}{|h|} \leq \frac{2\,|h|^3}{|h|} \text{ ή}$$

$$\left|\frac{f(x_o + h)–f(x_o)}{h}\right| \leq 2\,|h|^2 \text{ή} –2\,|h|^2\leq \frac{f(x_o + h)–f(x_o)}{h} \leq 2\,|h|^2 \ (2)$$

$\lim\limits_{h\to 0}(-2\,|\,h|^2) = \lim\limits_{h\to 0}(2\,|\,h|^2)=0$ (3)

Από τις σχέσεις (2) ,(3) σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής θα έχω : $\lim\limits_{h\to 0} \lambda(h) = 0$

Οπότε : $f'(x_o)= \lim\limits_{h\to 0} \lambda(h) = 0$

Επειδή για κάθε $x \in IR$ ισχύει $f'(x)=0$ προκύπτει η f είναι σταθερή συνάρτηση

2.

Μια συναρτήση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο IR με $f''(x)= f(x)$ και $f'(0)= f(0)$Να αποδείξετε ότι : I)Η συνάρτηση $g(x)= [f(x) - f'(x)]e^x$ είναι σταθερή II) $f'= f$ III)$f(x)=c\, e^x$

I)$g'(x)= [(f(x) - f'(x))e^x]'=(f(x) - f'(x))'\, e^x+(f(x) - f'(x))\, (e^x)' =$
$=[f'(x) - (f'(x))'] e^x+(f(x) - f'(x))\, e^x=$
$= (f'(x) - f''(x))e^x+(f(x) - f'(x))e^x =$
$= (f'(x) - f(x))e^x+(f(x) - f'(x))\, e^x=$
$= (f'(x) - f(x)+(f(x) - f'(x))\, e^x= 0\bullet e^x=0$

Επειδή $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in IR$ προκύπτει οτι $g(x) = c$ για

II) Αν x=0 θα έχω : $c =g(0)= [f(0) -f'(0)]e^0 =0\bullet e^0 =0$

Οπότε : $g(x) =0$ ή$[f(x)- f'(x)]e^x =0$ ή $f(x)- f'(x)=0$(Γιατί $e^x \neq 0$) ή $f(x)= f'(x)$

III)Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = f(x)e^{-x}$

$h'(x) = (f(x)e^{-x})'= f'(x)e^{-x}+ f(x)(e^{-x})' = f'(x)e^{-x}+ f(x)\, e^{-x}\,(-x)'=$
$= f'(x)e^{-x}+ f(x)\, e^{-x}\,(-1)= f(x)e^{-x} -f(x)\, e^{-x} = 0$

Επειδή $g'(x)=0$ για κάθε $x \in IR$ προκύπτει οτι $h(x) = c$ κάθε $x \in IR$

$$h(x) = c \text{ ή } f(x)e^{-x} = c \text{ ή } \frac{f(x)}{e^x} = c \text{ ή } f(x)= c\, e^x$$

3.

Έστω φ(t),g(t) δυο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο IR και $v \in IN$ Αν ισχύει : $x\,\varphi'(tx) + y\,g'(ty) = \dfrac{v}{t}\,[\varphi(tx) + g(ty)]$ για κάθε $x \in IR$ και $t>0$ I)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση : $f(t) = \dfrac{\varphi(tx) + g(ty)}{t^v}$, $t>0$ είναι σταθερή II) Να αποδείξετε ότι ισχύει $\varphi(tx) + g(tx) =t^v\, [\varphi(x) + g(x)]$

$$f'(t) = \left(\frac{\varphi(tx) + g(ty)}{t^{v}} \right)' = \frac{[\varphi(tx)+g(ty)]' t^{v} - [\varphi(tx)+g(ty)]\,(t^{v})'}{(t^{v})^{2}} =$$

$$= \frac{\{[\varphi(tx)]' + [g(ty)]'\}\, t^{v} - [\varphi(tx)+g(ty)]\, vt^{v-1}}{t^{2v}} =$$

$$= \frac{[\varphi'(tx) \bullet (tx)' + g'(ty) \bullet (ty)']\, t^{v} - [\varphi(tx)+g(ty)]\, vt^{v-1}}{t^{2v}} =$$

$$= \frac{[\varphi'(tx) \bullet x \bullet (t)' + g'(ty) \bullet y \bullet (t)']\, t^{v} - [\varphi(tx)+g(ty)]\, vt^{v-1}}{t^{2v}} =$$

$$= \frac{[\varphi'(tx) \bullet x \bullet 1 + g'(ty) \bullet y \bullet 1]\, t^{v} - [\varphi(tx)+g(ty)]\, vt^{v-1}}{t^{2v}} =$$

$$= \frac{[\varphi'(tx)x + g'(ty)y]\, t^{v} - [\varphi(tx)+g(ty)]\, vt^{v-1}}{t^{2v}} =$$

$$= \frac{[\varphi'(tx)x + g'(ty)y]\, t \bullet t^{v-1} - [\varphi(tx)+g(ty)]\, vt^{v-1}}{t^{2v}} =$$

$$= \frac{t^{v-1}\, [(\varphi'(tx)x + g'(ty)y)\, t - v\, (\varphi(tx)+g(ty))]}{t^{2v}} =$$

$$= \frac{t^{v-1}}{t^{2v}} \quad [(\varphi'(tx)x + g'(ty)y)\, t - v\, (\varphi(tx)+g(ty))] =$$

$$= t^{v-1-2v}\left[\; v\,\frac{\varphi(tx)+g(ty)}{t}\,t - v\,(\varphi(tx)+g(ty))\right] =$$

$$= t^{-1-v}\left[\; v(\varphi(tx)+g(ty)) - v\,(\varphi(tx)+g(ty))\right] = t^{-1-v}\bullet 0 = 0$$

Επειδή $f'(t) = 0$ για κάθε $t\in(0,+\infty)$ προκύπτει οτι $f(t) = c$ για κάθε $t\in(0,+\infty)$

II)Αν $t=1$ θα έχω :

$$c = f(1) = \frac{\varphi(1\bullet x)+g(1\bullet y)}{1^v} = \varphi(x)+g(y)$$

Οπότε : $f(t) = \varphi(x)+g(y)$ ή $\dfrac{\varphi(tx) + g(ty)}{t^v} = \varphi(x)+g(y)$ ή

$\varphi(tx) + g(ty) = t^v[\varphi(x)+g(y)]$

4.

Έστω η συνάρτηση $f : IR\to IR$ με
$f(x+y)= f(x)\bullet f(y)$ για κάθε $x,y\in IR$ και $f(x)>0$ για κάθε $x,y\in IR$
Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$ να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x)= f(x)$ για κάθε $x\in IR$.Στη συνέχεια να βρείτε τη συνάρτηση f

Αν $x=y=0$ θα έχω :

$f(0+0)= f(0)\bullet f(0)$ ή $f(0)= f^2(0)$ ή $\dfrac{f^2(0)}{f(0)} = \dfrac{f(0)}{f(0)}$ (Γιατι $f(0)\neq 0$)

ή $f(0) = 1$

$f'(0)=1$ή $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)- f(0)}{h} = 1$ ή $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)- 1}{h} = 1$

Αν $x_o\in IR$ Θα αποδείξω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o

Θεωρώ τη συνάρτηση $\lambda(h)= \dfrac{f(x_o+h)- f(x_o)}{h}$, $h>0$

$$\lambda(h)= \frac{f(x_o+h) - f(x_o)}{h} = \frac{f(x_o)\bullet f(h) - f(x_o)}{h} = \frac{f(x_o)\,[\, f(h) - 1]}{h} =$$

$$= f(x_o)\,\frac{f(h)-1}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \lambda(h) = \lim_{h\to 0} f(x_o)\,\frac{f(h)-1}{h} = f(x_o) \bullet \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h} = f(x_o) \bullet 1 = f(x_o)$$

$$f'(x_o) = \lim_{h\to 0} \lambda(h) = f(x_o)$$

Οπότε για κάθε $x \in IR$ ισχύει $f'(x)= f(x)$

Θεωρω τη συνάρτηση : $g(x)= e^{-x} f(x)$

$g'(x)= (e^{-x} f(x))'= (e^{-x})' f(x)+ e^{-x}\ f'(x)= e^{-x} (-x)' f(x)+ e^{-x}\ f(x) =$

$= e^{-x} (-1) f(x)+ e^{-x}\ f(x)= -e^{-x} f(x)+ e^{-x} f(x)=0$

Επειδή $g'(x)=0$ για κάθε $x \in IR$ προκύπτει οτι $g(x) = c$ κάθε $x \in IR$

Αν $x=0$ θα έχω : $c =g(0)= e^{-0} f(0) =1 \bullet 1=1$

Οπότε : $g(x) =1$ ή $e^{-x} f(x) =1$ή $\dfrac{f(x)}{e^x} =1$ ή $f(x)= e^x$

5.

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: IR \to IR$ με $f'(0)=2$, ώστε να ισχύει η σχέση :

$f(x+y)+2 f(x \bullet y) = f(x) \bullet f(y)+2$ για κάθε $x,y \in IR$(1)

I)Να δείξετε ότι $f'(x)+4x =2f(x)$ για κάθε $x \in IR$

II) Να δείξετε ότι $f(0)=1$

II)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) =(f(x)- 2x-1)e^{-2x}$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f

I)Παραγωγίζω ως προς x την σχέση (1) :

$f(x+y)+2 f(x \bullet y) = f(x) \bullet f(y)+2 \Rightarrow [f(x+y)+2 f(x \bullet y)]' = [f(x) \bullet f(y)+2]' \Rightarrow$

$[f(x+y)]'+[2 f(x \bullet y)]' = [f(x) \bullet f(y)]'+(2)' \Rightarrow$

$f'(x+y)(x+y)'+ 2 [f(x \bullet y)]' = f'(x) \bullet f(y)\ +0 \Rightarrow$

$f'(x+y)[(x)'+(y)']+ 2 f'(xy) (x \bullet y)' = f'(x) \bullet f(y) \Rightarrow$

$f'(x+y)(1+0) + 2 f'(xy)\ y\ (x)' = f'(x) \bullet f(y) \Rightarrow$

$f'(x+y)+ 2 f'(xy) \bullet y \bullet 1 = f'(x) \bullet f(y) \Rightarrow$

$f'(x+y)+ 2 f'(xy) \bullet y = f'(x) \bullet f(y)$

Θέτω $x = 0$:

$f'(0+y)+ 2 f'(0\bullet y) \bullet y = f'(0) \bullet f(y) \Rightarrow$

$f'(y)+ 2 f'(0) \bullet y = 2 \bullet f(y) \Rightarrow$

$f'(y)+ 2 \bullet 2 \bullet y = 2 f(y) \Rightarrow f'(y)+ 4y = 2 f(y)$

Άρα : $f'(x)+4x =2f(x)(2)$

II) Θέτω x = 0 στην σχέση (2) :

$f'(0)+4\bullet 0 =2f(0)$ ή $2f(0) =2$ ή $\dfrac{2f(0)}{2} = \dfrac{2}{2}$ ή $f(0) =1$

$g'(x) =[(f(x)- 2x-1)e^{-2x}]'=(f(x)- 2x-1)'e^{-2x}+(f(x)- 2x-1)(e^{-2x})'=$
$=[f'(x)- (2x)'-(1)'] e^{-2x}+(f(x)- 2x-1)e^{-2x} (-2x)' =$
$=[2f(x) -4x - 2 (x)'-0] e^{-2x}+(f(x)- 2x-1)e^{-2x} (-2)(x)' =$
$=[2f(x) -4x - 2 \bullet 1] e^{-2x}+(f(x)- 2x-1)e^{-2x} (-2)\bullet 1 =$
$=[2f(x) -4x - 2] e^{-2x}+[-2f(x)- 2x(-2)-1(-2)]e^{-2x} =$
$=[2f(x) -4x - 2] e^{-2x}+[-2f(x)+4x+2]e^{-2x} =$
$=[2f(x) -4x - 2-2f(x)+4x+2] e^{-2x} = 0\bullet e^{-2x} = 0$

Επειδή $g'(x)=0$ για κάθε $x\in IR$ προκύπτει οτι $g(x) = c$ κάθε $x\in IR$

Αν x=0 θα έχω : $c =g(0)=(f(0)- 2\bullet 0-1)e^{-2\bullet 0}=(1-1)e^{0} = 0\bullet 1=0$

Οπότε : $g(x) =0$ ή$=(f(x)- 2x-1)e^{-2x} =0$ ή $f(x)- 2x-1=0$(Γιατί $e^{-2x} \neq 0$)

$f(x) =2x+1$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1.

Για μια συνάρτηση f ορισμένη στο IR ισχύει $|f(x)-f(y)|\leq 7|x-y|^5$ (1)για κάθε $x,y\in IR$.Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση

2.

Μια συναρτήση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο IR με
$f''(x)= f(x)$ και $f'(1)= f(1)$Να αποδείξετε ότι :
I)Η συνάρτηση $g(x)= [f(x) -f'(x)]e^{x}$ είναι σταθερή
II) $f'= f$
III)$f(x)=c\, e^{x}$

3.

Έστω η συνάρτηση $f : IR\to IR$ με
$f(x+2y)=2 f(x) \bullet f(y)$ για κάθε $x,y\in IR$ και $f(x)>0$ για κάθε $x,y\in IR$
Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$ να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x)= f(x)$ για κάθε $x\in IR$.Στη συνέχεια να βρείτε τη συνάρτηση f

4.

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: IR \to IR$ με $f'(0)=2$, ώστε να ισχύει η σχέση :
$f(x+3y)+6 f(xy) = f(x) \bullet f(3y)+2$ για κάθε $x,y\in IR(1)$
I)Να δείξετε ότι $f'(x)+4x =2f(x)$ για κάθε $x\in IR$
II) Να δείξετε ότι $f(0)=1$
II)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) =(f(x)- 2x-1)e^{-2x}$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f

5.

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: IR →IR με $f'(0)=2$, ώστε να ισχύει η σχέση :

$f(x+2y)+2 f(2x\cdot y) = f(x) \cdot f(2y)+2$ για κάθε x,y∈IR(1)

I)Να δείξετε ότι $f'(x)+4x =2f(x)$ για κάθε x∈IR

II) Να δείξετε ότι $f(0)=1$

II)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) =(f(x)- 2x-1)e^{-2x}$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f

3.

Έστω φ(t),g(t) δυο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο IR και ν∈IN Αν ισχύει :

$$2x\varphi'(2tx) +2y\, g'(2ty) = \frac{\nu}{2t}[\varphi(2tx) + g(2ty)] \text{ για κάθε } x\in IR \text{ και } t>0$$

I)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση : $f(t) = \dfrac{\varphi(2tx) + g(2ty)}{2^\nu t^\nu}$, t>0

είναι σταθερή

II) Να αποδείξετε ότι ισχύει $\varphi(2tx) + g(2tx) =2^\nu t^\nu [\varphi(2x) + g(2y)]$

6.

Για μια συνάρτηση f ορισμένη στο IR ισχύει $|f(x)-f(y)|\le 8|x-y|^3$ (1)για κάθε x,y∈IR.Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση

7.

Μια συναρτήση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο IR με $f''(x)= f(x)$ και $f'(5)= f(5)$Να αποδείξετε ότι :

I)Η συνάρτηση $g(x)= [f(x) -f'(x)]e^x$ είναι σταθερή

II) $f'= f$

III)$f(x)=c\, e^x$

8.

Έστω φ(t),g(t) δυο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο IR και ν∈IN Αν ισχύει :

$$3x\varphi'(3tx)+3yg'(3ty) = \frac{\nu}{3t}[\varphi(3tx) + g(3ty)] \text{ για κάθε } x\in IR \text{ και } t>0$$

$\varphi(3tx) + g(3ty)$

I)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση : $f(t) = \dfrac{\quad}{3^{\nu}t^{\nu}}$, t>0

είναι σταθερή

II) Να αποδείξετε ότι ισχύει $\varphi(3tx) + g(3tx) = 3^{\nu}t^{\nu}\,[\varphi(3x) + g(3y)]$

9.

Έστω η συνάρτηση f : IR→IR με

$f(x+3y)= f(x) \bullet f(3y)$ για κάθε x,y∈IR και f(x)>0 για κάθε x,y∈IR

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με f΄(0)=1 να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο IR με f΄(x)= 3f(x) για κάθε x∈IR.Στη συνέχεια να βρείτε τη συνάρτηση f

10.

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: IR →IR με f΄(0)=2, ώστε να ισχύει η σχέση :

$f(x+3y)+2\, f(3x\bullet y) = f(x) \bullet f(3y)+2$ για κάθε x,y∈IR(1)

I)Να δείξετε ότι f΄(x)+4x =2f(x) για κάθε x∈IR

II) Να δείξετε ότι f(0)=1 II)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g(x) $=(f(x)-2x-1)e^{-2x}$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f

11.

Για μια συνάρτηση f ορισμένη στο IR ισχύει$|f(x)-f(y)| \le 11|x-y|^{7}$(1) για κάθε x,y∈IR.Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση

12.

Μια συναρτήση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο IR με f΄΄(x)= f(x) και f΄(8)= f(8)Να αποδείξετε ότι :

I)Η συνάρτηση $g(x)= [f(x) - f'(x)]e^{x}$ είναι σταθερή

II) f΄= f III)$f(x)=c\,e^{x}$

13.

Έστω φ(t),g(t) δυο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο IR και ν∈IN Αν ισχύει :

$$4x\varphi'(4tx)+4yg'(4ty) = \frac{\nu}{4t}\,[\varphi(4tx) + g(4ty)]$$ για κάθε x∈IR και t>0

I)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση : $f(t) = \dfrac{\varphi(4tx) + g(4ty)}{4^{\nu}t^{\nu}}$, t>0

είναι σταθερή

II)Να αποδείξετε ότι ισχύει $\varphi(4tx) + g(4tx) = 4^{\nu}t^{\nu}\,[\varphi(4x) + g(4y)]$

14.

Έστω η συνάρτηση f : IR→IR με

$f(x+4y)= f(x) \bullet f(4y)$ για κάθε x,y∈IR και f(x)>0 για κάθε x,y∈IR

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με f΄(0)=1 να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x)= 4f(x)$ για κάθε x∈IR.Στη συνέχεια να βρείτε τη συνάρτηση f

15.

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: IR →IR με $f'(0)=2$, ώστε να ισχύει η σχέση :

$f(x+4y)+2\, f(4x\cdot y) = f(x)\cdot f(4y)+2$ για κάθε x,y∈IR(1)

I)Να δείξετε ότι $f'(x)+4x = 2f(x)$ για κάθε x∈IR

II) Να δείξετε ότι $f(0)=1$

II)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x)-2x-1)e^{-2x}$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f