ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Αν: $\left\{\begin{array}{l}\text{(I) Η f παραγωγίσιμη στο διάστημα } \Delta \\ \text{(II) } f\,'(x) > 0 \text{ για κάθε σημείο εσωτερικό x του διαστήματος } \Delta\end{array}\right\}$ Τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ (Δ=Διάστημα δηλ. ένα σύνολο της μορφής $[\alpha,\beta],[\alpha,\beta),(\alpha,\beta),(\alpha,\beta],(\alpha,+\infty), [\alpha,+\infty),(-\infty, \alpha), (-\infty,\alpha],(-\infty,+\infty)$
Αν: $\left\{\begin{array}{l}\text{(I) Η f παραγωγίσιμη στο διάστημα } \Delta \\ \text{(II) } f\,'(x) < 0 \text{ για κάθε σημείο εσωτερικό x του διαστήματος } \Delta\end{array}\right\}$ Τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ (Δ=Διάστημα δηλ. ένα σύνολο της μορφής $[\alpha,\beta],[\alpha,\beta),(\alpha,\beta),(\alpha,\beta],(\alpha,+\infty), [\alpha,+\infty),(-\infty, \alpha), (-\infty,\alpha],(-\infty,+\infty)$
Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ όταν για κάθε $x_1,x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ θα έχω $f(x_1) < f(x_2)$
Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ όταν για κάθε $x_1,x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ θα έχω $f(x_1) > f(x_2)$
Μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!
Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.Το αντίστροφο δεν ισχύει π.χ. η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα αλλά ισχύει $f'(x) \geq 0$ γιατί :   Αν $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα   Όμως $f'(x) = (x^3)' = 3x^2 \geq 0$
Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.Το αντίστροφο δεν ισχύει π.χ. η συνάρτηση $f(x) = -x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα αλλά ισχύει $f'(x) \leq 0$ γιατί :   Αν $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.   Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα   Όμως $f'(x) = (-x^3)' = -3x^2 \leq 0$
Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ θα ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$
Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ θα ισχύει $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \Delta$
Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ δεν έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ !!!   Π.χ: Για την συνάρτηση $f(x)=1$ ισχύει η f είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x)=0 \geq 0$ χωρίς η f να είναι γνησίως αύξουσα στο IR

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) \le 0$ για κάθε $x \in \Delta$ δεν έπεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ !!! Π.χ: Για την συνάρτηση $f(x)=1$ ισχύει η f είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x)=0 \le 0$ χωρίς η f να είναι γνησίως φθίνουσα στο IR

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ
Αν: $\left\{ \begin{array}{l} \text{(I) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \text{ όπου } x_0 \text{ εσωτερικό σημείο του } (\alpha,\beta) \\ \text{(II) } f'(x_0)=0 \end{array} \right\}$ Τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β)
Αν: $\left\{ \begin{array}{l} \text{(I) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \text{ όπου } x_0 \text{ εσωτερικό σημείο του } (\alpha,\beta) \\ \text{(II) } f'(x_0)=0 \end{array} \right\}$ Τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, β)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 18x$. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$f'(x) = \left(x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 18x\right)' = (x^3)' - \left(\frac{15}{2}x^2\right)' + (18x)' =$$

$$3x^2 - \frac{15}{2}(x^2)' + 18(x)' = 3x^2 - \frac{15}{2}2x + 18 \cdot 1 = 3x^2 - 15x + 18 =$$

$$= 3(x^2 - 5x + 6)$$

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$
$[\lambda f(x)]' = \lambda f'(x)$ λ: Σταθερά
$(c)' = 0$, c : Σταθερά
$(x)' = 1$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση :

$$\boxed{1}\ x^2\ \boxed{-5}\ x\ \boxed{+6} = 0 \quad (1)$$

$\alpha = 1 \quad \beta = -5 \quad \gamma = 6$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$

Επειδή Δ > 0 η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \bullet 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		+	0	–	0	+	

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
f ΄		+	0	–	0	+	
f		↗		↘		↗	

Έπειδη f΄(x) > 0 για κάθε xϵ(–∞,2) η f είναι γνησίως αύξουσα στο (–∞, 2)

Έπειδη f΄(x) < 0 για κάθε xϵ(2,3) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (2, 3)

Έπειδη f΄(x) > 0 για κάθε xϵ(3,+∞) η f είναι γνησίως αύξουσα στο (3,+∞)

2.

Δίνεται η συνάρτηση f : IR→ IR παραγωγίσιμη για κάθε κάθε xϵIR που ικανοποιεί την σχέση :

$$f^3(x) + 3\ f(x) = e^x + x^3 + x$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

$[f^3(x) + 3\ f(x)]' = (e^x + x^3 + x)' \Longrightarrow$

$[f^3(x)]' + [3f(x)]' = (e^x)' + (x^3)' + (x)' \Longrightarrow$

$3f^2(x)f'(x) + 3f'(x) = e^x + (x^3)' + (x)' \Longrightarrow$

$f'(x)\,3[f^2(x) + 1] = e^x + 3x^2 + 1 \Longrightarrow$

$$\frac{3[f^2(x)+1]f'(x)}{3[f^2(x)+1]} = \frac{e^x + 3x^2 + 1}{3[f^2(x)+1]} \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{e^x + 3x^2 + 1}{3[f^2(x)+1]}$$

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
$[\lambda f(x)]' = \lambda f'(x)$ λ: Σταθερά
$(x)' = 1$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
$(e^x)' = e^x$
$(f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1} f'$

$3x^2 \geq 0 \Longrightarrow 3x^2 + 1 \geq 1 > 0 \Longrightarrow 3x^2 + 1 > 0$

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 + 1 > 0 \\ e^x > 0 \end{array}\right\} (+)$$

$e^x + 3x^2 + 1 > 0$

$f^2(x) \geq 0 \Longrightarrow f^2(x) + 1 \geq 1 > 0 \Longrightarrow f^2(x) + 1 > 0 \Longrightarrow$

$3[f^2(x) + 1] > 0$

Επειδή $e^x + 3x^2 + 1 > 0$ και $3[f^2(x) + 1] > 0$ από την σχέση (1) θα έχω $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in IR$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

3.

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2 (x+2)^3$ ως προς την μονοτονία

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

$f'(x) = [(x-1)^2(x+2)^3]' = [(x-1)^2]'(x+2)^3 + (x-1)^2[(x+2)^3]' =$
$= 2(x-1)(x-1)'(x+2)^3 + (x-1)^2\,3(x+2)^3(x+2)' =$
$= 2(x-1)[(x)' - (1)'](x+2)^3 + (x-1)^2\,3(x+2)^2[(x)' + (2)'] =$

$= 2(x–1)(1– 0)(x + 2)^3 + (x – 1)^2\ 3(x + 2)^2(1+ 0) =$
$= 2(x–1)(x + 2)^3 + 3 (x–1)^2 (x + 2)^2 =(x–1) (x + 2)^2 [2(x + 2)+ 3(x–1)] =$
$= (x–1) (x + 2)^2 [2x + 2 \cdot 2+ 3x +3(–1)] =$
$= (x–1) (x + 2)^2 (2x + 4 + 3x –3) = (x–1) (x + 2)^2 (5x + 1) =$
$= (x–1)(5x + 1)(x + 2)^2$

$[f(x)\, g(x)]' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
$(f^{\alpha})' = \alpha\, f^{\alpha-1}\, f'$
$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
$[f(x) – g(x)]' = f'(x) – g'(x)$
$(c)' = 0$, c : Σταθερά
$(x)' = 1$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση :

$$(x–1)(5x + 1) = 0 \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{c} x–1 = 0 \\ \text{ή} \\ 5x + 1 = 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{c} x = 1 \\ \text{ή} \\ 5x = – 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} x = 1 \\ \text{ή} \\ \dfrac{5x}{5} = -\dfrac{1}{5} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{c} x = 1 \\ \text{ή} \\ x = -\dfrac{1}{5} \end{array}\right\}$$

x	$-\infty$		$-1/5$		1		$+\infty$
$(x–1)(5x + 1)$		+	0	–	0	+	

$(x + 2)^2 = 0 \Longleftrightarrow x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = –2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$(x + 2)^2$		+	0	+	

x	$-\infty$		-2		$-1/5$		1		$+\infty$
$(x-1)(5x+1)$		+		+	0	−	0	+	
$(x+2)^2$		+	0	+		+		+	
$(x-1)(5x+1)(x+2)^2$		+	0	+	0	−	0	+	

x	$-\infty$		-2		$-1/5$		2		$+\infty$
f΄		+	0	+	0	−	0	+	
f		↗		↗		↘		↗	

Επειδη f΄(x) > 0 για κάθε x϶(–∞, –2) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο (–∞, –2)
Επειδη f΄(x) > 0 για κάθε x϶(–2, –1/5) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο (–2, –1/5)

Επειδη f΄(x) < 0 για κάθε x϶(–1/5, 2) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (–1/5, 2)
Επειδη f΄(x) > 0 για κάθε x϶(2,+∞) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (2, +∞)

4.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{8-x},\, x\in(0,8)$$

I) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία
II) Να συγκρίνεται τους αριθμούς :

$$a=\sqrt{2}+\sqrt{6},\ \beta=\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

I)

$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{8-x}=x^{1/2}+(8-x)^{1/2} \text{ με } x\in(0,8)$$

$$f'(x)=[x^{1/2}+(8-x)^{1/2}]'=(x^{1/2})'+[(8-x)^{1/2}]'=$$

$$= \frac{1}{2} x^{1/2-1} + \frac{1}{2}(8 - x)^{1/2-1} (8 - x)' =$$

$$= \frac{1}{2} x^{1/2-2/2} + \frac{1}{2}(8 - x)^{1/2-2/2} [(8) - (x)'] =$$

$$= \frac{1}{2} x^{-1/2} - \frac{1}{2}(8 - x)^{-1/2} =$$

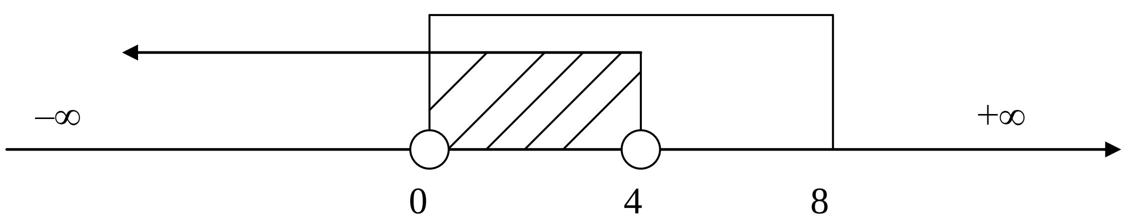
$$= \frac{1}{2x^{1/2}} - \frac{1}{2(8-x)^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{8-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{8-x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8-x}} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8-x}} = \frac{\sqrt{8-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8-x}}$$

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} \sqrt{8-x} - \sqrt{x} > 0 \\ 0 < x < 8 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} \sqrt{8-x} > \sqrt{x} \\ 0 < x < 8 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} 8 - x > x \\ 0 < x < 8 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} -x - x > -8 \\ 0 < x < 8 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} -2x > -8 \\ 0 < x < 8 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{-2x}{-2} < \dfrac{-8}{-2} \\ 0 < x < 8 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} x < 4 \\ 0 < x < 8 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow 0 < x < 4$$



$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l}\sqrt{8-x}-\sqrt{x}=0\\ 0<x<8\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l}\sqrt{8-x}=\sqrt{x}\\ 0<x<8\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}8-x=x\\ 0<x<8\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l}-x-x=-8\\ 0<x<8\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l}-2x=-8\\ 0<x<8\end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{-2x}{-2}=\dfrac{-8}{-2}\\ 0<x<8\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l}x=4\\ 0<x<8\end{array}\right\} \Longleftrightarrow x=4$$

$f'(x)<0 \Longleftrightarrow 4<x<8$

x	0		4		8
f ′		+	0	–	
f		↗		↘	

Επειδη $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,4)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0,4)
Επειδη $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (4,8)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (4, 8)

ΙΙ) Επειδή $2,3 \in (0,4)$ με $2<3$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0,4) θα έχω :

$$f(2) < f(3) \Longrightarrow \sqrt{2}+\sqrt{8-2} < \sqrt{3}+\sqrt{8-3} \Longrightarrow$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{6} < \sqrt{3}+\sqrt{5} \Longrightarrow \alpha<\beta$$

5.

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in IR$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + 3x^2 + x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο IR

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

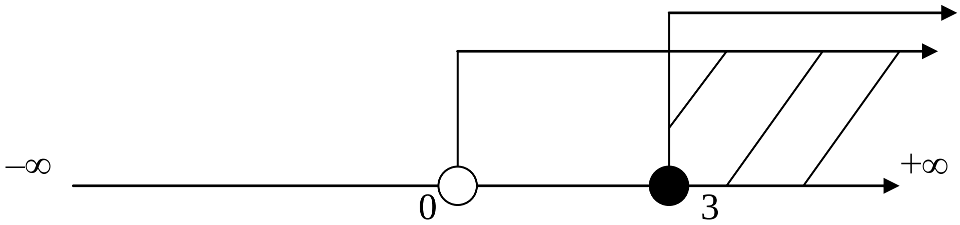
$f'(x) = (\alpha x^3 + 3x^2 + x + 1)' = (\alpha x^3)' + (3x^2)' + (x)' + (1)' =$
$= \alpha (x^3)' + 3(x^2)' + 1 + 0 = 3\alpha x^2 + 3 \cdot 2x + 1 = 3\alpha x^2 + 6x + 1$

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησιώς αύξουσα στο IR θα πρέπει για κάθε xϵIR να ισχύει $f'(x) \geq 0$.Οπότε για κάθε xϵIR θα πρέπει να ισχύει $3\alpha\, x^2 + 6x + 1 \geq 0$.Άρα θα έχω :

$$\left.\begin{matrix} 3\alpha > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha > 0 \\ \beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha > 0 \\ 6^2 - 4 \cdot 3\alpha \cdot 1 \leq 0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha > 0 \\ 36 - 12\alpha \leq 0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha > 0 \\ -12\alpha \leq -36 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha > 0 \\ \dfrac{-12\alpha}{-12} \geq \dfrac{-36}{-12} \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha > 0 \\ \alpha \geq 3 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \alpha \geq 3 \Longleftrightarrow \alpha \in [\,3\,, +\infty)$$



Αν αϵ (3 , +∞) θα έχω $f'(x) > 0$ για κάθε xϵIR.Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα

Αν α=3 θα έχω:

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 = 0 \Longleftrightarrow (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = 0 \Longleftrightarrow$

$(3x+1)^2 = 0 \Longleftrightarrow 3x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

$$\left\{\begin{matrix} \text{(I) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, -\infty) \\ \text{(II) } f'(-\frac{1}{3}) = 0 \end{matrix}\right\}$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα

<u>ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ</u>
Για να ισχύει $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \leq 0$ για κάθε xϵIR θα πρέπει να έχω α<0 και $\Delta \leq 0$(Δ:Διακρίνουσα , $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$)
Για να ισχύει $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \geq 0$ για κάθε xϵIR θα πρέπει να έχω α>0 και $\Delta \leq 0$(Δ:Διακρίνουσα , $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \dfrac{21}{2} x^2 + 30\,x$.Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία

2.

Δίνεται η συνάρτηση f : IR→ IR παραγωγίσιμη για κάθε κάθε xϵIR που ικανοποιεί την σχέση :

$f^3(x) + 4\,f(x) = 4e^x + x^7 + x$

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

3.

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = (x-2)^2\,(x+3)^3$ ως προς την μονοτονία

4.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο :

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{10-x},\, x \in (0,10)$

I) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία

II) Να συγκρίνεται τους αριθμούς :

$a = \sqrt{2} + \sqrt{8},\ \beta = \sqrt{3} + \sqrt{7}$

5.

Να βρείτε τις τιμές του αϵIR για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = -\alpha\,x^3 + 3\,x^2 + x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο IR

6.

Δίνεται η συνάρτηση f : (0, +∞):→ IR παραγωγίσιμη για κάθε κάθε xϵ(0, +∞) που ικανοποιεί την σχέση :

$f^3(\ln x) + 5\,f(\ln x) = \ln x + x^{19} + x$, xϵ(0, +∞)

Να αποδείξετε

(I) $f^3(x) + 5\,f(x) = x + e^{19x} + e^x$, xϵ(0, +∞)

(II) Η f είναι γνησίως αύξουσα

7.

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = (x-\lambda)^2\,(x+2\lambda)^3$ ως προς την μονοτονία

<u>Υπόδειξη:</u>

$f'(x) = (x-\lambda)\,(x+2\lambda)^2(5x+\lambda)$

Διακρίνω τις περιπτώσεις:

(I) λ=0

(II) λ>0($\lambda > 0 \Rightarrow -2\lambda < \dfrac{-\lambda}{5} < \lambda$) (II) λ<0($\lambda < 0 \Rightarrow \lambda < -\dfrac{\lambda}{5} < -2\lambda$)

Πως θα μελετήσω τη συνάρτησης f ως προς την μονοτονία

↓

Θα βρώ το πεδίο ορισμού της f(Συνήθως δίνεται το πεδίο ορισμού)

↓

Θα βρω την παράγωγο της συνάρτησης

↓

Λύνω την ανίσωση $f'(x) > 0$(1)

Λύνω την εξίσωση $f'(x) = 0$(2)

Λύση της ανίσωσης $f'(x)<0$ είναι όλα τα υπόλοιπα x που η f είναι παραγωγίσιμη και δεν ικανοποιούν τις σχέσεις (1) και (2)

Δημιουργώ τον πίνακα μεταβολής της συνάρτησης

x	$-\infty$ x_1	x_2	. . .	$x_{\kappa-1}$	x_κ $+\infty$
f′	− ή +	− ή +	. . .	− ή +	− ή +
f	↘ ή ↗	↘ ή ↗	. . .	↘ ή ↗	↘ ή ↗

Όπου $x_1,\dots,x_\kappa$ είναι σημεία στα οποία :

I) Είναι άκρα διαστήματος του πεδίου ορισμού της f
II) Δεν ορίζεται η f′
III) Μηδενίζεται η f′

Όταν στο x_ν δεν ορίζεται η f φέρνω διπλή γραμμη στο x_ν :

x	$-\infty$ … x_ν		$x_{\nu+1}$	… $+\infty$
f′	…	‖	− ή +	…
f	…	‖	↘ ή ↗	…

Όταν στο x_ν ορίζεται η f αλλά δεν ορίζεται η f ′φέρνω «διπλή γραμμη» στο x_ν μέχρι το υψος της πρώτης γραμμής . Η «διπλή γραμμη δεν προεκτείνεται στην δεύτερη γραμμή :

x	$-\infty$ … x_ν		$x_{\nu+1}$ … $+\infty$	
f′	…	‖	− ή +	…
f	…	↘	ή ↗	…

1η γραμμή»

2η γραμμή

Όταν στο $x_ν$ μηδενίζει την f ΄φέρνω ένα «μηδέν» στο $x_ν$
Το «μηδέν» υπάρχει μόνο στην πρώτη γραμμή.

:

x	−∞ … $x_ν$		$x_{ν+1}$ …+∞
f΄	…	0 − ή +	…
f	…	↘ ή ↗	…

$1^η$ γραμμή

Όταν για κάθε x∈($x_ν$, $x_{ν+1}$) ισχύει f΄(x) >0 αυτό σημαίνει ότι το τετραγωνάκι ($x_ν$, $x_{ν+1}$) είναι «θετικό».Κάτω από το τετραγωνάκι ($x_ν$, $x_{ν+1}$) γραφω ↗

:

x	−∞ … $x_ν$		$x_{ν+1}$ … +∞
f΄	…	+	…
f	…	↗	…

Όταν για κάθε x∈($x_ν$, $x_{ν+1}$) ισχύει f΄(x) <0 αυτό σημαίνει ότι το τετραγωνάκι ($x_ν$, $x_{ν+1}$) είναι «αρνητικό».Κάτω από το τετραγωνάκι ($x_ν$, $x_{ν+1}$) γραφω ↘

:

x	−∞ … $x_ν$		$x_{ν+1}$ …+∞
f΄	…	−	…
f	…	↘	…