Πως θα βρώ τους παραμέτρους λ,μ όταν I) Στο τύπο της συνάρτησης f εμφανίζονται οι παράμετροι λ,μ II) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα

Θα βρώ την παράγωγο της f

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ θα πρέπει να ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$
Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ θα πρέπει να ισχύει $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \Delta$

Προσδιορίζω τα λ,μ…

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ
Για να ισχύει $\alpha x^2+\beta x+\gamma \leq 0$ για κάθε $x \in IR$ θα πρέπει να έχω $\alpha<0$ και $\Delta \leq 0$(Δ:Διακρίνουσα , $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$)
Για να ισχύει $\alpha x^2+\beta x+\gamma \geq 0$ για κάθε $x \in IR$ θα πρέπει να έχω $\alpha>0$ και $\Delta \leq 0$(Δ:Διακρίνουσα , $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$)

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!
Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.Το αντίστροφο δεν ισχύει π.χ. η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα αλλά ισχύει $f'(x) \geq 0$ γιατί : Αν $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα Όμως $f'(x) = (x^3)' = 3x^2 \geq 0$
Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.Το αντίστροφο δεν ισχύει π.χ. η συνάρτηση $f(x) = -x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα αλλά ισχύει $f'(x) \leq 0$ γιατί : Αν $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα Όμως $f'(x) = (-x^3)' = -3x^2 \leq 0$
Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ θα ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$
Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ θα ισχύει $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \Delta$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in IR$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + 3x^2 + x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο IR

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

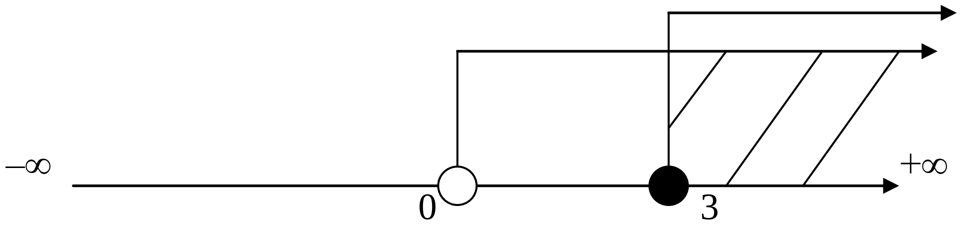
$f'(x) = (\alpha x^3 + 3x^2 + x + 1)' = (\alpha x^3)' + (3x^2)' + (x)' + (1)' =$
$= \alpha (x^3)' + 3(x^2)' + 1 + 0 = 3\alpha x^2 + 3 \cdot 2x + 1 = 3\alpha x^2 + 6x + 1$

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησιώς αύξουσα στο IR θα πρέπει για κάθε $x \in IR$ να ισχύει $f'(x) \geq 0$.Οπότε για κάθε $x \in IR$ θα πρέπει να ισχύει $3\alpha x^2 + 6x + 1 \geq 0$.Άρα θα έχω :

$$\left.\begin{matrix} 3\alpha > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha > 0 \\ \beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha > 0 \\ 6^2 - 4 \cdot 3\alpha \cdot 1 \leq 0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha > 0 \\ 36 - 12\alpha \leq 0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha > 0 \\ -12\alpha \leq -36 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha > 0 \\ \dfrac{-12\alpha}{-12} \geq \dfrac{-36}{-12} \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha > 0 \\ \alpha \geq 3 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \alpha \geq 3 \Longleftrightarrow \alpha \in [\,3\,,\,+\infty)$$



<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1.

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in IR$ για τις οποίες η συνάρτηση
$f(x) = x^3 - \alpha x^2 + 2\alpha x - 1$ να είναι γνησίως αύξουσα στο IR

2.

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in IR$ για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = -x^3 + \alpha x^2 + \left(\alpha - \frac{4}{3}\right) x + 2$$

να είναι γνησίως φθίνουσα στο IR

3.

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in IR$ για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\alpha^2 - 1}{3} x^3 + (\alpha - 1)x^2 + 2x + 4$$

να είναι γνησίως αύξουσα στο IR