

## ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Αν  $\alpha > \beta > 0$  να αποδείξετε ότι :

$$e^{\alpha-\beta} > \frac{1+\alpha}{1+\beta}$$

$$e^{\alpha-\beta} > \frac{1+\alpha}{1+\beta} \Leftrightarrow \frac{e^\alpha}{e^\beta} > \frac{1+\alpha}{1+\beta} \Leftrightarrow e^\alpha(1+\beta) > e^\beta(1+\alpha) \Leftrightarrow$$

$$e^\alpha(1+\beta) > e^\beta(1+\alpha) \Leftrightarrow \frac{e^\alpha(1+\beta)}{(1+\alpha)(1+\beta)} > \frac{e^\beta(1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^\alpha}{1+\alpha} > \frac{e^\beta}{1+\beta}$$

Θεωρώ τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x}{1+x}, x > 0$

$$f'(x) = \left( \frac{e^x}{1+x} \right)' = \frac{(e^x)'(1+x) - e^x(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{e^x(1+x) - e^x[(1)'+(x)']}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{e^x + x e^x - e^x - e^x}{(1+x)^2} = \frac{-e^x}{(1+x)^2}$$

Επειδή για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  ισχύει  $f'(x) < 0$  η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε επειδή  $\alpha > \beta > 0$  θα έχω :

$$f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow \frac{e^\alpha}{1+\alpha} > \frac{e^\beta}{1+\beta} \Leftrightarrow e^{\alpha-\beta} > \frac{1+\alpha}{1+\beta}$$



2.

I) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = \ln \left( \frac{\ln x}{x} \right), x \in (1, +\infty)$$

II) Αν  $\alpha > \beta > e$  να αποδείξετε ότι :  $\alpha^\beta < \beta^\alpha$



x	1	e	$+\infty$
f'		+	0 -
f			

Επειδή  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, e)$  η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, e)$

Επειδή  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (e, +\infty)$  η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(e, +\infty)$

II) Επειδή  $a > \beta > e$  και  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(e, +\infty)$  θα έχω :

$$f(a) < f(\beta) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\ln a}{a}\right) < \ln\left(\frac{\ln \beta}{\beta}\right) \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} < \frac{\ln \beta}{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\alpha \beta \frac{\ln \alpha}{\alpha} < \alpha \beta \frac{\ln \beta}{\beta} \quad (\text{Έχω } \alpha, \beta > 0 \Rightarrow \alpha \beta > 0) \Leftrightarrow \beta \ln \alpha < \alpha \ln \beta \Leftrightarrow$$

$$\ln \alpha^\beta < \ln \beta^\alpha \Leftrightarrow \alpha^\beta < \beta^\alpha$$

3.

$\text{Να αποδείξετε ότι : } \eta \mu x \geq x - \frac{x^2}{2}, \quad x \in [0, \pi/2]$
---

Θεωρώ τη συνάρτηση :  $f(x) = \eta \mu x - x + \frac{x^2}{2}, \quad x \in [0, \pi/2]$

$$f'(x) = (\eta \mu x - x + \frac{1}{2} x^2)' = (\eta \mu x)' - (x)' + (\frac{1}{2} x^2)' =$$

$$\sigma \upsilon \nu x - 1 + \frac{1}{2} (x^2)' = \sigma \upsilon \nu x - 1 + \frac{1}{2} 2x = \sigma \upsilon \nu x - 1 + x$$

$$f''(x) = (\sigma \upsilon \nu x - 1 + x)' = (\sigma \upsilon \nu x)' - (1)' + (x)' = -\eta \mu x + 1$$

$$\text{Αν } x \in (0, \pi/2) \text{ έχω: } \eta \mu x < 1 \Leftrightarrow 1 > \eta \mu x \Leftrightarrow 1 - \eta \mu x > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$$

- I)  $f'$  παραγωγίσιμη στο  $[0, \pi/2]$
- II)  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, \pi/2)$

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, \pi/2]$   
 $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, \pi/2]$

$$x > 0 \implies f'(x) > f'(0) \implies f'(x) > \sin 0 - 1 + 0 \implies f'(x) > 0$$

- I)  $f$  παραγωγίσιμη στο  $[0, \pi/2]$
- II)  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, \pi/2)$

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, \pi/2]$   
 Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, \pi/2]$

$$x \geq 0 \implies f(x) \geq f(0) \implies f(x) \geq \eta \mu 0 - 0 + \frac{0^2}{2} \implies f(x) \geq 0$$

$$\eta \mu x - x + \frac{x^2}{2} \geq 0 \implies \eta \mu x \geq x - \frac{x^2}{2}$$

4.

I) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}, x \in (0, \pi/2]$$

II) Αν  $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$  με  $\alpha < \beta$  να αποδείξετε ότι :

$$\frac{\eta \mu \alpha}{\alpha} > \frac{\eta \mu \beta}{\beta}$$

$$f'(x) = \left( \frac{\eta \mu x}{x} \right)' = \frac{(\eta \mu x)' x - \eta \mu x (x)'}{x^2} = \frac{x \cos x - \eta \mu x}{x^2}$$

Θεωρώ τη συνάρτηση :  $g(x) = x \cos x - \eta \mu x, x \in [0, \pi/2]$

$$g'(x) = (x \cos x - \eta \mu x)' = (x \cos x)' - (\eta \mu x)' = (x)' \cos x + x (\cos x)' - \sin x = \cos x + x (-\sin x) - \sin x = -x \eta \mu x$$

Αν  $x \in (0, \pi/2)$  θα έχω :

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ \eta\mu x > 0 \end{array} \right\} \implies x\eta\mu x > 0 \implies -x\eta\mu x < 0 \implies g'(x) < 0$$

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{I) } g \text{ παραγωγίσιμη στο } [0, \pi/2] \\ \text{II) } g'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, \pi/2) \end{array} \right.$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, \pi/2]$  Αν  $x \in (0, \pi/2)$  θα έχω :

Η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, \pi/2]$   
 $x > 0$

$$g(x) < g(0) \implies x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x < 0 \sigma\upsilon\nu 0 - \eta\mu 0 \implies x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x < 0$$

Άρα για κάθε  $x \in (0, \pi/2)$  έχω  $x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x < 0$ . Οπότε κάθε  $x \in (0, \pi/2)$

$$\text{έχω } \frac{x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} < 0. \text{ Συνεπώς } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, \pi/2)$$

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{I) } f \text{ παραγωγίσιμη στο } (0, \pi/2) \\ \text{II) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, \pi/2) \end{array} \right.$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, \pi/2]$

II)

$f$  γνησίως φθίνουσα στο  $(0, \pi/2]$

$$0 < \alpha < \beta < \pi/2 \quad \text{----->}$$

$$f(\alpha) > f(\beta) \implies \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha} > \frac{\eta\mu\beta}{\beta} \implies \alpha\beta \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha} > \alpha\beta \frac{\eta\mu\beta}{\beta} \implies$$

$$\beta \eta\mu\alpha > \alpha \eta\mu\beta \implies \frac{\beta \eta\mu\alpha}{\beta \eta\mu\beta} > \frac{\alpha \eta\mu\beta}{\beta \eta\mu\beta} \implies \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} > \frac{\alpha}{\beta}$$

5.

Να δείξετε ότι αν  $x > 1$  τότε  $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$

Θεωρώ τη συνάρτηση  $f(x) = 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x}$  με  $x \in [1, +\infty)$

$$f(x) = 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = (2x^{1/2} - 3 + x^{-1})' = (2x^{1/2})' - (3)' - (x^{-1})' = 2 \cdot \frac{1}{2} x^{1/2-1} - 1x^{-1-1} =$$

$$= x^{-1/2} - x^{-1} = \frac{1}{x^{1/2}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x} = 0, x \in [1, +\infty)\right) \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1=0, x \in [1, +\infty))$$

$$(\sqrt{x}-1=0, x \in [1, +\infty)) \Leftrightarrow (\sqrt{x}=1, x \in [1, +\infty)) \Leftrightarrow (x=1, x \in [1, +\infty))$$

$$\Leftrightarrow x=1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x} > 0, x \in [1, +\infty)\right) \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1 > 0, x \in [1, +\infty))$$

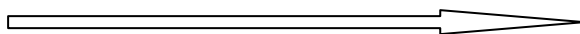
$$(\sqrt{x}-1 > 0, x \in [1, +\infty)) \Leftrightarrow (\sqrt{x} > 1, x \in [1, +\infty)) \Leftrightarrow [(\sqrt{x})^2 > 1^2, x \in [1, +\infty)]$$

$$\Leftrightarrow (x > 1, x \in [1, +\infty)) \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$$

- I) f παραγωγίσιμη στο  $[1, +\infty)$   
 II)  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (1, +\infty)$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$

Αν  $x > 1$  f γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$



$$f(x) > f(1) \Rightarrow 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x} > 2\sqrt{1} - 3 + \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$$

6.

Να αποδείξετε ότι:  $x + 2 + (x - 2)e^x > 0, x > 0$

Θεωρώ την συνάρτηση  $f(x) = x + 2 + (x - 2)e^x > 0, x \in [0, +\infty)$

$$f'(x) = [x + 2 + (x - 2)e^x]' \stackrel{[F(x)+G(x)+H(x)]' = F'(x)+G'(x)+H'(x)}{=} (x)' + (2)' + [(x - 2)e^x]'$$

$$[F(x)G(x)]' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$$

$$(x)' = 1$$

$$(c)' = 0, c: \Sigma \text{ταθερά}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$= 1 + (x - 2)' e^x + (x - 2)(e^x)' = 1 + \underbrace{e^x + (x - 2)e^x}_{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το } e^x} =$$

$$= 1 + (x - 2 + 1)e^x = 1 + (x - 1)e^x$$

$$f''(x) = (f'(x))' = [1 + (x - 1)e^x]' \stackrel{[F(x)+G(x)]' = F'(x)+G'(x)}{=} (1)' + [(x - 1)e^x]'$$

$$[F(x)G(x)]' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$$

$$(x)' = 1$$

$$(c)' = 0, c: \Sigma \text{ταθερά}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$= (x - 1)' e^x + (x - 1)(e^x)' = \underbrace{e^x + (x - 1)e^x}_{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το } e^x} =$$

$$= (x - 1 + 1)e^x = xe^x$$

$$Εχ\omega: \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \text{ Η } f' \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } [0, +\infty) \\ \text{(II)} (f'(x))' > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, \infty) \end{array} \right\}$$

Οπότε  $f' \underset{\wedge}{\uparrow} [0, +\infty)$

$$x > 0 \underset{\wedge}{\Rightarrow} f'(x) > f'(0) \stackrel{f'(0)=0}{\Rightarrow} f'(x) > 0$$

$$Εχ\omega: \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \text{ Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } [0, +\infty) \\ \text{(II)} f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, \infty) \end{array} \right\}$$

Οπότε  $f \uparrow [0, +\infty)$

$$x > 0 \xRightarrow{f \uparrow [0, +\infty)} f(x) > f(0) \xRightarrow{f'(0)=0} f(x) > 0 \Rightarrow x + 2 + (x-2)e^x > 0$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν  $\alpha > \ln \beta, \beta > 1$  να αποδείξετε ότι :

$$\frac{e^\alpha}{\beta} > \frac{1+\alpha}{1+\ln \beta}$$

2.

I) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = \ln \left( \frac{1+\ln x}{x} \right), x \in (1/e, +\infty)$$

II) Αν  $\alpha > \beta > 1$  να αποδείξετε ότι :  $(e\alpha)^\beta < (e\beta)^\alpha$

3.

Να αποδείξετε ότι :  $\eta \mu 2x \geq 2x - 2x^2, x \in [0, \pi/4]$

4.

I) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}, x \in [-\pi/2, 0)$$

II) Αν  $\alpha, \beta \in [-\pi/2, 0)$  με  $\alpha < \beta$  να αποδείξετε ότι :

$$\frac{\eta \mu \alpha}{\alpha} < \frac{\eta \mu \beta}{\beta}$$

5.

Να δείξετε ότι αν  $x > 0$  τότε  $2\sqrt{x+1} > 3 - \frac{1}{x+1}$

6.

Να αποδείξετε ότι  $\eta \mu x > x - \frac{1}{6}x^3, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

7.

Να αποδείξετε ότι :  $x + 1 + (x-1)e^{2x} > 0, x > 0$