ΜΟΝΟΤΟΜΙΑ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΛΥΣΗ ΜΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Να λυθεί η εξίσωση : $3x^4+x+2\ln x=4 \quad (1)$

Αν x=1 θα έχω :

$3x^4+x+2\ln x=3\cdot 1^4+1+2\ln 1=3\cdot 1+1+2\cdot 0=4$

Άρα ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης (1)

Θεωρώ την συνάρτηση : $f(x)=3x^4+x+2\ln x-4$ με $x>0$

$f'(x)=(3x^4+x+2\ln x-4)'=(3x^4)'+(x)'+(2\ln x)'-(4)'=$

$$=3(x^4)'+1+2\frac{1}{x}-0=3\cdot 4x^3+1+\frac{2}{x}=12x^3+1+\frac{2}{x}$$

$$\text{Έχω : } x>0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 12x^3>0 \\ 1>0 \\ \dfrac{2}{x}>0 \end{array}\right\} (+)$$

$$12x^3+1+\frac{2}{x}>0 \Rightarrow f'(x)>0$$

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$Άρα η f είναι «1-1»

Έστω υπάρχουν $\rho_1,\rho_2\in(0,+\infty)$ με $\rho_1\neq\rho_2$ λύσεις της (1).Τότε θα έχω :

$$\left.\begin{array}{l} 3\rho_1^4+\rho_1+2\ln\rho_1=4 \\ 3\rho_2^4+\rho_2+2\ln\rho_2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\rho_1^4+\rho_1+2\ln\rho_1-4=0 \\ 3\rho_2^4+\rho_2+2\ln\rho_2-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\rho_1)=0 \\ f(\rho_2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\rho_1)=f(\rho_2) \xrightarrow{f\ «1\text{-}1»} \rho_1=\rho_2 \text{ (Άτοπο)}$$

2.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3+x-1=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (0,1)

Θεωρώ τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3+x-1$.Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική

$f(0)= 0^3+0-1 =-1$
$f(1)= 1^3+1-1 =1$
Έχω : $f(0)\bullet f(1) =-1\bullet 1= -1<0$

Οπότε: $\begin{cases} \text{I) f συνεχής στο } [0,1] \\ \text{II) } f(0)\bullet f(1) <0 \end{cases}$

Άρα η συνάτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα [0,1]Οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)= 0$

$$\left.\begin{matrix} f(\xi)= 0 \\ \xi \in (0,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \xi^3+\xi-1= 0 \\ \xi \in (0,1) \end{matrix}\right\}$$

$f'(x)= (x^3+x-1)'= (x^3)'+(x)'-(1)'= 3x^2+1$

Έχω : $x^2 \geq 0 \Rightarrow 3x^2 \geq 0 \Rightarrow 3x^2+1 \geq 1>0 \Rightarrow 3x^2+1>0 \Rightarrow f'(x)>0$

Επειδή $f'(x) >0$ για κάθε $x \in IR$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.Άρα η f είναι «1-1»
Έστω υπάρχουν $\rho_1,\rho_2 \in IR$ με $\rho_1 \neq \rho_2$ λύσεις της (1).Τότε θα έχω :

$$\left.\begin{matrix} \rho_1^3+ \rho_1-1=4 \\ \rho_1^3+ \rho_1-1= 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(\rho_1)=0 \\ f(\rho_2)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(\rho_1)= f(\rho_2) \xrightarrow{f \text{ «1-1»}}$$

$\rho_1= \rho_2$ (Άτοπο)
3.

Έστω η συνάρτηση $f(x)= x - συνx$, $x \in [0,\pi/2]$ I) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\pi/2]$ II)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x - συνx =0$(1) έχει μια μόνο ρίζα στο $(0,\pi/2)$

I)$f'(x)= (x - συνx)'=(x)' - (συνx)'= 1- (-ημx)= 1+ημx$

Αν $x \in [0,\pi/2]$ έχω : $ημx \geq 0 \Rightarrow 1+ημx \geq 1+0 \Rightarrow 1+ημx \geq 1>0 \Rightarrow f'(x)>0$
Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x \in [0,\pi/2]$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\pi/2]$ Άρα η f είναι «1-1»

II)

$f(0)= 0 - συν0 = -1$

$f(π/2)= π/2 - συνπ/2 = π/2$

Έχω : $f(0) \cdot f(π/2) = -π/2 < 0$

$$\text{Οπότε: } \left\{ \begin{array}{l} \text{I) f συνεχής στο } [0,π/2] \\ \text{II) } f(0) \cdot f(π/2) < 0 \end{array} \right.$$

Άρα η συνάτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[0,π/2]$Οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (0,π/2)$ τέτοιο ώστε $f(ξ)= 0$

$$\left. \begin{array}{l} f(ξ)= 0 \\ ξ \in (0,π/2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} ξ - συνξ = 0 \\ ξ \in (0,π/2) \end{array} \right\}$$

Έστω υπάρχουν $ρ_1, ρ_2 \in [0,π/2]$ με $ρ_1 \neq ρ_2$ λύσεις της (1).Τότε θα έχω

$$\left. \begin{array}{l} ρ_1 - συνρ_1 = 0 \\ ρ_2 - συνρ_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(ρ_1)=0 \\ f(ρ_2)=0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(ρ_1)= f(ρ_2) \xRightarrow{\text{f «1-1»}}$$

$ρ_1 = ρ_2$ (Άτοπο)

4.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $5^x+12^x=13^x$(1) έχει μοναδική ρίζα την x=2

Αν x=2 θα έχω :

$$\left. \begin{array}{l} 5^x+12^x=5^2+12^2= 25+144=169 \\ 13^x =13^2=169 \end{array} \right\} \Rightarrow 5^x+12^x=13^x$$

Άρα ο αριθμός 2 είναι λύση της εξίσωσης (1)

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)= \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x - 1$

$$f'(x)= \left[\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x - 1\right]' = \left[\left(\frac{5}{13}\right)^x\right]' + \left[\left(\frac{12}{13}\right)^x\right]' - (1)' =$$

$$\ln\frac{5}{13}\left(\frac{5}{13}\right)^x+\ln\frac{12}{13}\left(\frac{12}{13}\right)^x$$

$$\left.\begin{array}{l}0<\frac{5}{13}<1\\[2ex] 0<\frac{12}{13}<1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\ln\frac{5}{13}<0\\[2ex] \ln\frac{12}{13}<0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\ln\frac{5}{13}\left(\frac{5}{13}\right)^x<0\\[2ex] \ln\frac{12}{13}\left(\frac{12}{13}\right)^x<0\end{array}\right\}(+)$$

$$\ln\frac{5}{13}\left(\frac{5}{13}\right)^x+\ln\frac{12}{13}\left(\frac{12}{13}\right)^x<0$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in IR$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο IR.Άρα η f είναι «1-1»

Έστω υπάρχουν $\rho_1,\rho_2\in IR$ με $\rho_1\neq\rho_2$ λύσεις της (1).Τότε θα έχω :

$$\left.\begin{array}{l}5^{\rho_1}+12^{\rho_1}=13^{\rho_1}\\[2ex] 5^{\rho_2}+12^{\rho_2}=13^{\rho_2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{5^{\rho_1}+12^{\rho_1}}{13^{\rho_1}}=\frac{13^{\rho_1}}{13^{\rho_1}}\\[2ex] \frac{5^{\rho_2}+12^{\rho_2}}{13^{\rho_2}}=\frac{13^{\rho_2}}{13^{\rho_2}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{5^{\rho_1}}{13^{\rho_1}}+\frac{12^{\rho_1}}{13^{\rho_1}}-1=0\\[2ex] \frac{5^{\rho_2}}{13^{\rho_2}}+\frac{12^{\rho_2}}{13^{\rho_2}}-1=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{5}{13}\right)^{\rho_1}+\left(\frac{12}{13}\right)^{\rho_1}-1=0\\[2ex] \left(\frac{5}{13}\right)^{\rho_2}+\left(\frac{12}{13}\right)^{\rho_2}-1=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}f(\rho_1)=0\\[2ex] f(\rho_2)=0\end{array}\right\}\Rightarrow f(\rho_1)=f(\rho_2)$$

$$f\ «1\text{-}1»\ \Longrightarrow\ \rho_1=\rho_2\ (\text{Άτοπο})$$

5.

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^3+x+1$ και $g(x)=e^{-x}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)= x^3+x+1-e^{-x}$

$h'(x)= (x^3+x+1-e^{-x})'= (x^3)'+(x)'+(1)-(e^{-x})'= 3x^2+1+0-e^{-x}\,(-x)'=$
$=3x^2+1-e^{-x}\,(-1)= 3x^2+1+e^{-x}$

$$\left.\begin{aligned} &3x^2 \geq 0 \\ &e^{-x} > 0 \\ &1>0 \end{aligned}\right\} (+)$$

$$\overline{3x^2+1+e^{-x} > 0} \Rightarrow h'(x)$$

Επειδή $h'(x) <0$ για κάθε $x \in$ IR η h είναι γνησίως αύξουσα στο IR.Άρα η h είναι «1-1»

Αν $x=0$ θα έχω : $f(0)=0^3+0+1=1$Άρα $A(1,1) \in C_f$

Αν $x=0$ θα έχω : $g(0)= e^{-0} =1$Άρα $A(1,1) \in C_g$

Οπότε $A(1,1) \in C_f \cap C_g$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεωνC_f και C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.Έστω οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεωνC_f και C_g δεν έχουν μοναδικό κοινό σημείο

Τότε θα υπάρχουν $\rho_1,\rho_2 \in$IR με $\rho_1 \neq \rho_2$ $B(\rho_1,y_B) \in C_f \cap C_g$ και $\Gamma(\rho_2,y_\Gamma) \in C_f \cap C_g$

$$\left.\begin{aligned} &(\rho_1,y_B) \in C_f \\ &B(\rho_1,y_B) \in C_g \\ &\Gamma(\rho_2,y_\Gamma) \in C_f \\ &\Gamma(\rho_2,y_\Gamma) \in C_g \end{aligned}\right\} \text{ή} \left\{\begin{aligned} &y_B= f(\rho_1) \\ &y_B= g(\rho_1) \\ &y_\Gamma= f(\rho_2) \\ &y_\Gamma= g(\rho_2) \end{aligned}\right\} \text{ή} \left\{\begin{aligned} &f(\rho_1) = g(\rho_1) \\ &f(\rho_2) = g(\rho_2) \end{aligned}\right\} \text{ή} \left\{\begin{aligned} &f(\rho_1) - g(\rho_1)= 0 \\ &f(\rho_2) - g(\rho_2)= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &f(\rho_1)=0 \\ &f(\rho_2)=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(\rho_1)= f(\rho_2) \xRightarrow{h\ \text{«1-1»}} \rho_1= \rho_2 \text{ (Άτοπο)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να λυθεί η εξίσωση : $4x^4+x+2\ln x=5(1)$

2.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^7+2x–1=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (0,1)

3.

Έστω η συνάρτηση $f(x)= 2x – συν2x$, $x\in[0,π/4]$
I) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,π/4]
II)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x – συνx =0(1)$ έχει μια μόνο ρίζα στο (0,π/2)

4.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3^x+4^x=5^x(1)$ έχει μοναδική ρίζα την x=2

5.

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^7+2x+1$ και $g(x)= e^{–x}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο

6.

Να λυθεί η εξίσωση : $7x^4+3x+2\ln x=10(1)$

7.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{13}+9x–1=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (0,1)

8.

Έστω η συνάρτηση $f(x)= 4x – συν4x$, $x\in[0,π/8]$
I) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,π/8]
II)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x – συν4x =0(1)$ έχει μια μόνο ρίζα στο (0,π/8)

9.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $6^x+8^x=10^x(1)$ έχει μοναδική ρίζα την x=2

10.

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^{11}+9x+1$ και $g(x)= e^{–x}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο

11.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $12^x+9^x=15^x(1)$ έχει μοναδική ρίζα την x=2

12.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{17}+5x–1=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (0,1)