ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Αν : I) Η f συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] II) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα [α,β] Τότε f([α,β])= [f(α), f(β)]

Αν : I) Η f συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] II) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο κλειστό διάστημα [α,β] Τότε f([α,β])= [f(β), f(α)]

Αν f΄(x) > 0 για κάθε x∈Δ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ (Δ=Διάστημα δηλ. ένα σύνολο της μορφής [α,β],[α,β),(α,β),(α,β],(α,+∞), [α,+∞),(–∞, α),(–∞, α],(–∞,+∞)
Αν f ΄(x) < 0 για κάθε x∈Δ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ (Δ=Διάστημα δηλ. ένα σύνολο της μορφής [α,β],[α,β),(α,β),(α,β],(α,+∞), [α,+∞),(–∞, α),(–∞, α],(–∞,+∞))

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x+1} + x$,x∈[–1,+∞)

Αν x∈(–1,+∞) θα εχω :

$$f'(x) = [(x+1)^{1/2} + x]' = [(x+1)^{1/2}]' + (x)' = \frac{1}{2}(x+1)^{1/2-1}(x+1)' + 1 =$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}[(x)' + (1)'] + 1 = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{(x+1)^{1/2}} + 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + 1$$

I)f συνεχής στο [–1,+∞) ως αύθροισμα συνεχών συναρτήσεων

II) f΄(x)>0 για κάθε x∈(–1,+∞)

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο[–1,+∞)

I) f είναι γνησίως αύξουσα στο[–1,+∞)

II) f συνεχής στο[–1,+∞)ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

Οποτε το σύνολο τιμών της f θα είναι :

$f([-1,+\infty))=[\, f(-1),\lim_{x\to+\infty} f(x)) =[-1,+\infty)$

$f(-1)=\sqrt{-1+1}\,-1=-1$

Αν x>0 θα έχω :

$$f(x)=\sqrt{x+1}+x=\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}+x=\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty} x=$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty} x=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\sqrt{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})}+\lim_{x\to\infty} x=$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\sqrt{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty} x=(+\infty)\bullet\sqrt{1+0}+1=1$$

2.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης

f(x) = lnx+x,x∊(0,+∞)

$f'(x) = (\ln x+x)' = (\ln x)'+(x)' = \frac{1}{x}+1$

$x>0 \Longrightarrow \frac{1}{x}>0 \Longrightarrow \frac{1}{x}+1>0 \Longrightarrow f'(x)>0$

Επειδή f΄(x)>0 για κάθε x∊(0,+∞) η f είναι γνησίως αύξουσα

I) f είναι γνησίως αύξουσα στο(0,+∞)

II) f συνεχής στο(0,+∞)ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

Οποτε το σύνολο τιμών της f θα είναι :

$f((0,+\infty))=(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)) =(-\infty,+\infty)=IR$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)= \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x+x)= \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x+\lim\limits_{x\to 0^+} x=-\infty+1=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)= \lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x+x)= \lim\limits_{x\to +\infty}\ln x+\lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty+\infty=+\infty$

3.

$\boxed{\text{Να αποδείξετε ότι } x\,\text{συν}x<\text{ημ}x \text{ για κάθε } x\in(0, \frac{3\pi}{4}]}$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)= x\,\text{συν}x-\text{ημ}x \,,\ x\in(0, \frac{3\pi}{4}]$

$f'(x)= (x\,\text{συν}x-\text{ημ}x)'= (x\,\text{συν}x)'-(\text{ημ}x)' = (x)'\text{συν}x+x(\text{συν}x)'-\text{συν}x=$
$= \text{συν}x+x(-\text{ημ}x)-\text{συν}x= -x\text{ημ}x$

Αν $x\in(0, \frac{3\pi}{4}]$ θα έχω :

$0<x\leq\frac{3\pi}{4} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} 0<x<\pi \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} \text{ημ}x>0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow x\text{ημ}x>0 \Longrightarrow$

$-x\text{ημ}x>0 \Longrightarrow f'(x)<0$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0, \frac{3\pi}{4}]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

$\left\{\begin{array}{l} \text{I) f είναι γνησίως αύξουσα στο}(0, \frac{3\pi}{4}] \\ \text{II) f συνεχής στο}(0, \frac{3\pi}{4}] \text{ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων} \end{array}\right.$

Οποτε το σύνολο τιμών της f θα είναι :

$f((0, \frac{3\pi}{4}])=[\, f(\frac{3\pi}{4}) ,\lim\limits_{x\to 0^+} f(x))=[\, -\frac{(3\pi+4)\sqrt{2}}{8} , 0)$

$f(\frac{3\pi}{4}) =\frac{3\pi}{4}\,\text{συν}\frac{3\pi}{4} -\text{ημ}\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\,\text{συν}(\pi- \frac{\pi}{4})-\text{ημ}(\pi- \frac{\pi}{4})=$

$$= \frac{3\pi}{4} συν(-\frac{\pi}{4}) - ημ\frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \bullet \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= -\frac{3\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{4\sqrt{2}}{8} = -\frac{(3\pi+4)\sqrt{2}}{8}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x\,συνx - ημx) = \lim_{x\to 0^+} (x\,συνx) - \lim_{x\to 0^+} ημx = 0 \bullet συν0 - ημ0 = 0$$

Άρα $f(x)<0$ για κάθε $x \in (0, \frac{3\pi}{4}]$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)<0 \\ x \in (0, \frac{3\pi}{4}] \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x\,συνx - ημx<0 \\ x \in (0, \frac{3\pi}{4}] \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x\,συνx<ημx0 \\ x \in (0, \frac{3\pi}{4}] \end{array}\right\}$$

$ημ(\pi-x)=ημx$
$συν(\pi-x)=-συνx$
$ημ\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$συν\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$ημ0=0$
$συν0=1$

4.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x+x=0(1)$ έχει μοναδική λύση

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)= e^x+x, x \in IR$

$f'(x)=(e^x+x)'=(e^x)'+(x)' = e^x+1$

$e^x>0 \Longrightarrow e^x+1>0 \Longrightarrow f'(x) >0$

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x \in IR$ η f είναι γνησίως αύξουσα

I) f είναι γνησίως αύξουσα στο IR

II) f συνεχής στοIR ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

Οποτε το σύνολο τιμών της f θα είναι :

$$f((-\infty,+\infty))=(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)) =(-\infty,+\infty)=IR$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)= \lim_{x\to-\infty}(e^x+x)= \lim_{x\to-\infty} e^x+ \lim_{x\to-\infty} x= 0 -\infty=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)= \lim_{x\to+\infty}(e^x+x)= \lim_{x\to+\infty} e^x+ \lim_{x\to+\infty} x= \infty+\infty=+\infty$

Οπότε υπάρχει $\xi \in IR$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$Άρα ξ λύση της (1)

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.Άρα η f είναι «1-1»

Έστω υπάρχουν $\rho_1,\rho_2 \in IR$ με $\rho_1\neq\rho_2$ λύσεις της (1).Τότε θα έχω :

$$\left.\begin{array}{l} e^{\rho_1}+ \rho_1= 0 \\ \\ e^{\rho_2}+ \rho_2= 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(\rho_1)=0 \\ \\ f(\rho_2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\rho_1)= f(\rho_2) \xrightarrow{f\ «1-1»}$$

$\rho_1= \rho_2$ (Άτοπο)

5.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση lnx+2x=0(1) έχει μοναδική λύση

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)= \ln x+2x$,$x\in(0,+\infty)$

$$f'(x) = (\ln x+2x)'= (\ln x)'+2(x)' = \frac{1}{x} +2$$

$$x>0 \Rightarrow \frac{1}{x} >0 \Rightarrow \frac{1}{x}+2 >0 \Rightarrow f'(x)>0$$

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα

$$\left\{\begin{array}{l} \text{I) f είναι γνησίως αύξουσα στο}(0,+\infty) \\ \\ \text{II) f συνεχής στο}(0,+\infty)\text{ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων} \end{array}\right.$$

Οποτε το σύνολο τιμών της f θα είναι :

$f((0,+\infty))=(\lim_{x\to0^+} f(x),\lim_{x\to+\infty} f(x)) =(-\infty,+\infty)=IR$

$\lim_{x\to0^+} f(x)= \lim_{x\to0^+}(\ln x+2x)= \lim_{x\to0^+}\ln x+2\lim_{x\to0^+} x=-\infty+0=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)= \lim_{x\to+\infty}(\ln x+2x)= \lim_{x\to+\infty}\ln x+\lim_{x\to+\infty} x=+\infty+2(+\infty)=+\infty+\infty=+\infty$

Οπότε υπάρχει $\xi \in IR$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$Άρα ξ λύση της (1)

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.Άρα η f είναι «1-1»

Έστω υπάρχουν $\rho_1,\rho_2 \in IR$ με $\rho_1\neq\rho_2$ λύσεις της (1).Τότε θα έχω :

$$\left.\begin{array}{l} \ln\rho_1+\rho_1=0 \\ \\ \ln\rho_2+\rho_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(\rho_1)=0 \\ \\ f(\rho_2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\rho_1)=f(\rho_2) \xrightarrow{f\ «1\text{-}1»}$$

$\rho_1=\rho_2$ (Άτοπο)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$f(x)=\sqrt{x+2}+3x\ ,x\in[-2,+\infty)$

2.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$f(x)=2\ln x+3x, x\in(0,+\infty)$

3.

Να αποδείξετε ότι 2x συν2x<ημ2x για κάθε $x\in\left(0,\frac{3\pi}{8}\right]$

4.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x+3x=0$(1) έχει μοναδική λύση

5.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x+8x=0$(1) έχει μοναδική λύση

6.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$f(x)=\sqrt{x+7}+2x\ ,x\in[-7,+\infty)$

7.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$f(x)=7\ln x+4x, x\in(0,+\infty)$

8.

Να αποδείξετε ότι 4x συν4x<ημ4x για κάθε $x\in\left(0,\frac{3\pi}{16}\right]$

9.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x+11x=0$(1) έχει μοναδική λύση

10.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x+10x=0$(1) έχει μοναδική λύση