Πως θα μελετήσω τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f

Θα βρώ το πεδίο ορισμού της f(Συνήθως δίνεται το πεδίο ορισμού)

Θα βρω την παράγωγο της συνάρτησης

Λύνω την ανίσωση $f'(x) > 0$(1)

Λύνω την εξίσωση $f'(x) = 0$(2)

Λύση της ανίσωσης $f'(x)<0$ είναι όλα τα υπόλοιπα x που η f είναι παραγωγίσιμη και δεν ικανοποιούν τις σχέσεις (1) και (2)

Δημιουργώ τον πίνακα μεταβολής της συνάρτησης

x	$-\infty$ x_1	x_2	. . .	$x_{\kappa-1}$	x_κ $+\infty$
f′	– ή +	– ή +	. . .	– ή +	– ή +
f	↘ ή ↗	↘ ή ↗	. . .	↘ ή ↗	↘ ή ↗

Όπου $x_1,\ldots,x_\kappa$ είναι σημεία στα οποία :

I) Είναι άκρα διαστήματος του πεδίου ορισμού της f
II) Δεν ορίζεται η f′
III) Μηδενίζεται η f′

Όταν στο x_ν δεν ορίζεται η f φέρνω διπλή γραμμη στο x_ν :

x	$-\infty$ … x_ν	‖	$x_{\nu+1}$	… $+\infty$
f′	…	‖	– ή +	…
f	…	‖	↘ ή ↗	…

Όταν στο x_ν ορίζεται η f αλλά δεν ορίζεται η f ′φέρνω «διπλή γραμμη» στο x_ν μέχρι το υψος της πρώτης γραμμής . Η «διπλή γραμμη» δεν προεκτείνεται στην δεύτερη γραμμή :

x	$-\infty$ … x_ν	‖	$x_{\nu+1}$	…$+\infty$
f′	…	‖	– ή +	…
f	…		↘ ή ↗	…

1η γραμμή → f′

2η γραμμή → f

Όταν στο $x_ν$ μηδενίζει την f ΄φέρνω ένα «μηδέν» στο $x_ν$
Το «μηδέν» υπάρχει μόνο στην πρώτη γραμμή.

:

x	−∞ … $x_ν$		$x_{ν+1}$ …+∞
f′	…	0 − ή +	…
f	…	↘ ή ↗	…

$1^η$ γραμμή

Όταν για κάθε x∈($x_ν$, $x_{ν+1}$) ισχύει f′(x) >0 αυτό σημαίνει ότι το τετραγωνάκι ($x_ν$, $x_{ν+1}$) είναι «θετικό».Κάτω από το τετραγωνάκι ($x_ν$, $x_{ν+1}$) γραφω ↗

:

x	−∞ … $x_ν$		$x_{ν+1}$ … +∞
f′	…	+	…
f	…	↗	…

Όταν για κάθε x∈($x_ν$, $x_{ν+1}$) ισχύει f′(x) <0 αυτό σημαίνει ότι το τετραγωνάκι ($x_ν$, $x_{ν+1}$) είναι «αρνητικό».Κάτω από το τετραγωνάκι ($x_ν$, $x_{ν+1}$) γραφω ↘

:

x	−∞ … $x_ν$		$x_{ν+1}$ …+∞
f′	…	−	…
f	…	↘	…

x	α	x_o	β
f′	+	0	–
f	$\nearrow$		$\searrow$

$$\text{Αν :}\left\{\begin{array}{l}\text{(I) } f'(x_o)=0 \\ \text{(II) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x\in(\alpha,\, x_o) \\ \text{(III) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x\in(x_o,\beta)\end{array}\right\}$$

Τότε η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στη θέση x_o τον αριθμό $f(x_o)$

x	α	x_o	β
f′	–		+
f	$\searrow$		$\nearrow$

$$\text{Αν:}\left\{\begin{array}{l}\text{(I) } f'(x_o)=0 \\ \text{(II) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x\in(\alpha,\, x_o) \\ \text{(III) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x\in(x_o,\beta)\end{array}\right\}$$

Τότε η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_o τον αριθμό $f(x_o)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$f'(x) = (x^3 - 3x + 2)' =$$

$[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x)$
$[F(x) - G(x)]' = F'(x) + G'(x)$
$[cF(x)]' = c\,F'(x)$, c : Σταθερά
$(c)' = 0$, c : Σταθερά
$(x)' = 1$

$(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}$

$(x^3)' - (3x)' + (2)' = 3x^2 - 3\,(x)' + 0 = 3x^2 - 3 \cdot 1 = 3x^2 - 3$

Οπότε : $f\,'(x) = 3x^2 - 3$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση : $3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 = 3 \Longleftrightarrow x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Longleftrightarrow x = \pm 1$

Προσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$	
$\Delta > 0$ $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ Δ: Η διακρίνουσα της δευτεριβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1)	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>ρ_1</td><td>ρ_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$</td><td>Πρόσημο του α</td><td>0 Αλλάζω το πρόσημο του α</td><td>0 Πρόσημο του α</td><td></td></tr></table> ρ_1, ρ_2 : Οι της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1)
$\Delta = 0$ $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ Δ: Η διακρίνουσα της δευτεριβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1)	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>ρ</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$</td><td>Πρόσημο του α</td><td>0</td><td>Πρόσημο του α</td></tr></table> ρ : Η διπλή ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1)
$\Delta < 0$ $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ Δ: Η διακρίνουσα της δευτεριβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1)	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$</td><td colspan="2">Πρόσημο του α</td></tr></table>

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$3x^2 - 3$		+	0	−	0	+	

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	
			τ.μ		τ.ε		

$$\text{Επειδή:}\begin{cases} \text{I) } f'(-1)=0 \\ \text{II) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x\epsilon(-\infty, -1) \\ \text{III) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x\epsilon(-1, 1) \end{cases}$$

Η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = -1$ τον αριθμό :
$f(x_1) = f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$

$$\text{Επειδή:}\begin{cases} \text{I) } f'(1)=0 \\ \text{III) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x\epsilon(-1, 1) \\ \text{IV) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x\epsilon(1, +\infty) \end{cases}$$

Η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = 1$ τον αριθμό :

$$f(x_2) = f(1) = 1^3 - 3 \bullet 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

2.

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$

$$f'(x) = (3x^5 - 5x^3 + 2)' =$$

$[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x)$
$[F(x) - G(x)]' = F'(x) + G'(x)$
$[cF(x)]' = c\ F'(x)$, c : Σταθερά
$(c)' = 0$, c : Σταθερά
$(x)' = 1$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$=3(x^5)' - 5(x^3)' + (2)' = 3 \bullet 5x^4 - 5 \bullet 3x^2 = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1)$

Οπότε : $f'(x) = 15x^2(x^2 - 1)$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση : $x^2 - 1 = 0$

$x^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Longleftrightarrow x = \pm 1$

<table>
<tr><th colspan="2">Προσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$</th></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$
Δ: Η διακρίνουσα της δευτεριβάθμιας εξίσωσης
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1)</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>ρ_1</td><td>ρ_2</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$</td><td>Πρόσημο του α</td><td>0</td><td>Αλλάζω το πρόσημο του α</td><td>0</td><td>Πρόσημο του α</td></tr>
</table>
ρ_1, ρ_2 : Οι της δευτεροβάθμιας εξίσωσης
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1)
</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$
Δ: Η διακρίνουσα της δευτεριβάθμιας εξίσωσης
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1)</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>ρ</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$</td><td>Πρόσημο του α</td><td>0</td><td>Πρόσημο του α</td></tr>
</table>
ρ : Η διπλή ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1)
</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$
Δ: Η διακρίνουσα της δευτεριβάθμιας εξίσωσης
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1)</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$</td><td colspan="2">Πρόσημο του α</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0	–	0	+	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$15x^2$		+	0	+	

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		+		–	0	–	0	+	
$15x^2$		+	0	+		+		+	
$15x^2\,(x^2-1)$		+	0	–	0	–	0	+	

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f ΄		+	0	–	0	–	0	+	
f		↗		↘		↘		↗	
			τ.μ				τ.ε		

Επειδή:
- I) $f'(-1)=0$
- II) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$
- III) $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$

Η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = -1$ τον αριθμό :
$f(x_1) = f(-1) = 3(-1)^5 - 5(-1)^3 + 2 = 3(-1) - 5(-1) + 2 =$
$= -3 + 5 + 2 = 4$

- I) $f'(0)=0$
- II) $f'(x) <0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$
- III) $f'(x) <0$ για κάθε $x \in (0, 1)$

Η συνάρτηση f δεν έχει τοπικό ακρότατο στη θέση $x_2 = 0$

Επειδή: $\begin{cases} \text{I) } f'(1)=0 \\ \text{II) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x\in(0,\ 1\ ) \\ \text{III) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x\in(\ 1,\ +\infty) \end{cases}$

Η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_3 = 1$ τον αριθμό :

$f\ (x_3\ ) = f\ (\ 1) = 3 \bullet 1^5 - 5 \bullet 1^3 + 2 = 3 \bullet 1 - 5 \bullet 1 + 2 = 3 - 5 + 2 = 0$

3.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = 3\,x^4 - 8\,x^3 - 6\,x^2 + 24\,x - 11$$

I) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

II) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

I) $f'(x) = (3\,x^4 - 8\,x^3 - 6\,x^2 + 24\,x - 11)' =$
$= (3\,x^4)' - (8\,x^3)' - (6\,x^2)' + (24\,x)' - (11)' =$
$= 3\,(x^4)' - 8\,(x^3)' - 6\,(x^2)' + 24\,(x)' - 0 =$
$= 3 \circ 4\,x^3 - 8 \circ 3x^2 - 6 \circ 2\,x + 24 \circ 1 =$
$= 12\,x^3 - 24\,x^2 - 12\,x + 24 =$
$= 12\,x^3 - 12\,x - 24\,x^2 + 24 =$
$= 12\,x\,(x^2 - 1) - 24(x^2 - 1) =$
$= 12(x^2 - 1)\,(x - 2)$

$[\ f(x) + g(x)\ ]' = f'(x) + g'(x)$
$[\ f(x) - g(x)\ ]' = f'(x) - g'(x)$
$[\lambda\ f(x)\ ]' = \lambda f'(x)$ λ: Σταθερά
$(\ c\ )' = 0$, c : Σταθερά
$(x)' = 1$
$(x^{\alpha})' = \alpha\ x^{\alpha-1}$

$x^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 1 \Longleftrightarrow x^2 = \pm\sqrt{1} \Longleftrightarrow x = \pm\ 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0	–	0	+	

$x - 2 > 0 \iff x > 2$
$x - 2 = 0 \iff x = 2$
$x - 2 < 0 \iff x < 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		2		1		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$+$	0	$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$-$		$+$	
$(x-2)(x^2-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			τ.ε		τ.μ		τ.ε		

Επειδη $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1)$
Επειδη $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, 1)$
Επειδη $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, 2)$

Επειδη $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (2,+\infty)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(2, +\infty)$

II)

Επειδή: $\begin{cases} \text{I) } f'(-1)=0 \\ \text{II) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, -1) \\ \text{III) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (-1, 1) \end{cases}$

Η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_1 = -1$ τον αριθμό :

$f(x_1) = f(-1) = 3(-1)^4 - 8(-1)^3 - 6(-1)^2 + 24(-1) - 11 =$

$= 3 \bullet 1 - 8(-1) - 6 \bullet 1 - 24 - 11 = 3 + 8 - 6 - 24 - 11 = 11 - 41 = -30$

Επειδή: $\begin{cases} \text{I) } f'(1)=0 \\ \text{II) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (-1, 1) \\ \text{III) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (1, 2) \end{cases}$

Η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_2 = 1$ τον αριθμό :

$f(x_2) = f(1) = 3 \bullet 1^4 - 8 \bullet 1^3 - 6 \bullet 1^2 + 24 \bullet 1 - 11 =$

$= 3 \bullet 1 - 8 \bullet 1 - 6 \bullet 1 + 24 \bullet 1 - 11 = 3 - 8 - 6 + 24 - 11 =$

$= 3 + 24 - 8 - 6 - 11 = 27 - 25 = 2$

Επειδή: $\begin{cases} \text{I) } f'(2)=0 \\ \text{II) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (1, 2) \\ \text{III) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (2, +\infty) \end{cases}$

Η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_3 = 2$ τον αριθμό :

$f(x_3) = f(2) = 3 \bullet 2^4 - 8 \bullet 2^3 - 6 \bullet 2^2 + 24 \bullet 2 - 11 =$

$= 3 \bullet 16 - 8 \bullet 8 - 6 \bullet 4 + 48 - 11 = 48 - 64 - 24 + 48 - 11 =$

$= 48 + 48 - 64 - 24 - 11 = 96 - 99 = -3$

4.

Να βρεθεί η ελάχιστή τιμή της συνάρτησης $f(x) = x - 1 - \ln x$, $x > 0$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

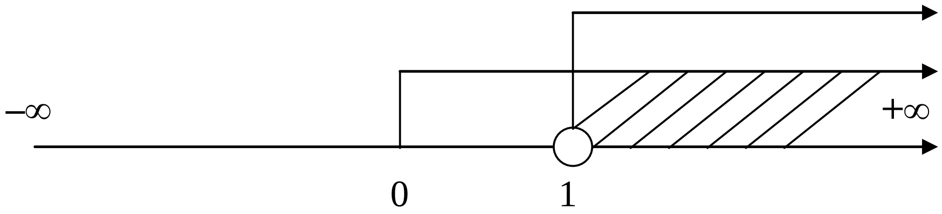
$$f'(x) = (x - 1 - \ln x)' = (x)' - (1)' - (\ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{x-1}{x}$$

$[\,f(x) - g(x)\,]' = f'(x) - g'(x)$
$(\,c\,)' = 0$, c : Σταθερά
$(x)' = 1$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x-1}{x} > 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x > 1 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow x > 1$$



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x-1}{x} = 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow x = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow 0 < x < 1$$

x	0	1	+∞
f'	‖ −	0	+
f	‖ ↘		↗
		min	

Επειδή:
$$\begin{cases} \text{I) } f'(1)=0 \\ \text{II) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x\in(0,1) \\ \text{III) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x\in(1, +\infty) \end{cases}$$

Η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στη θέση $x_o = 1$ τον αριθμό :
$f(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$

$\ln 1 = 0$

5.

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x e^x$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$f'(x) = (x e^x)' = (x)' e^x + x (e^x)' = 1 \bullet e^x + x e^x = e^x + x e^x = e^x (1+ x)$

$[f(x) g(x)]' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$
$(x)' = 1$
$(e^x)' = e^x$

$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow e^x (1+ x) > 0 \Longleftrightarrow x + 1 > 0$(Γιατι : $e^x > 0$ για κάθε $x\in IR$)
$x > -1$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow e^x (1+ x) = 0 \Longleftrightarrow x + 1 = 0$(Γιατι : $e^x \neq 0$ για κάθε $x\in IR$)
$x = -1$

$f'(x) < 0 \Longleftrightarrow x < -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f ΄	+	0	–
f	↗	max	↘

Επειδή:
$$\begin{cases} \text{I) } f'(-1)=0 \\ \text{II) } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x\in(-\infty,-1) \\ \text{III) } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x\in(-1,+\infty) \end{cases}$$

Η συνάρτηση f έχει μέγιστο στη θέση $x_o = -1$ τον αριθμό

$$f(-1) = -1e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

6.

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\ln x - e^{x-1}+2, x>0$

$$f'(x)=\left(\ln x - e^{x-1}+2\right)' \overset{(F(x)-G(x)+H(x))'=F'(x)-G'(x)+H'(x)}{=} (\ln x)' - \left(e^{x-1}\right)' + (2)'$$

$$\overset{\substack{(\ln x)'=\frac{1}{x},x>0 \\ \left(e^{F(x)}\right)'=e^{F(x)}F'(x) \\ (c)'=0, c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}}{=} \frac{1}{x} - e^{x-1}(x-1)' = \frac{1}{x} - e^{x-1}$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{x}-e^{x-1}\right)' \overset{a^{-1}=\frac{1}{a},a\neq 0}{=} \left(x^{-1}-e^{x-1}\right)' \overset{(F(x)-G(x))'=F'(x)-G'(x)}{=} \left(x^{-1}\right)' - \left(e^{x-1}\right)' \overset{\substack{\left(x^{a}\right)'=ax^{a-1} \\ \left(e^{F(x)}\right)'=e^{F(x)}F'(x)}}{=}$$

$$-1\bullet x^{-2} - e^{x-1}(x-1)' \overset{a^{-x}=\frac{1}{a^{x}},a\neq 0}{=} -\frac{1}{x^{2}} - e^{x-2}$$

$$x>0 \Rightarrow x\neq 0 \Rightarrow x^2>0 \Rightarrow \frac{1}{x^2}>0 \Rightarrow -\frac{1}{x^2}<0$$

$$e^{x-2}>0 \Rightarrow -e^{x-2}<0$$

$$\left.\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2}<0 \\ -e^{x-2}<0 \end{cases}\right\}(+)$$

$$-\frac{1}{x^2}-e^{x-2}<0 \Rightarrow f''(x)<0$$

$\text{Επειδή } f''(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty) \text{ έχω } f'\overset{\vee}{\downarrow}(0,+\infty)$

$$0<x<1 \overset{f'\overset{\vee}{\downarrow}(0,+\infty)}{\Longrightarrow} f'(x)>f'(1) \overset{f'(1)=1-e^0=0}{\Longrightarrow} f'(x)>0$$

$$x>1 \overset{f'\overset{\vee}{\downarrow}(0,+\infty)}{\Longrightarrow} f'(x)<f'(1) \overset{f'(1)=1-e^0=0}{\Longrightarrow} f'(x)<0$$

x	0		1		+∞
f ′	‖	+	0	–	
f	‖	↗		↘	

min

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l} (\text{I})\ f'(1)=0 \\ (\text{II})\ f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(0,1) \\ (\text{III})\ f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(1,+\infty) \end{array}\right\}$$

$\text{Οπότε η συνάρτηση } f \text{ ολικό μέγιστο στην θέση } x_0=1 \text{ τον αριθμό}$

$$f(1)=\ln 1-e^{1-1}+2=1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνετα η συνάρτηση f (x) = – x^3 +12 x + 6. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f

2.

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f(x) = –6 x^5 + 10 x^3 + 11

3.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : f(x) = –2 x^4 +8 x^3+ 4 x^2 –24 x – 5
I) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
II) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα

4.

Ν*α βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης* $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}$ *με τύπο* $f(x)=\ln(x-4)-e^{x-5}+2x, x>4$

5.

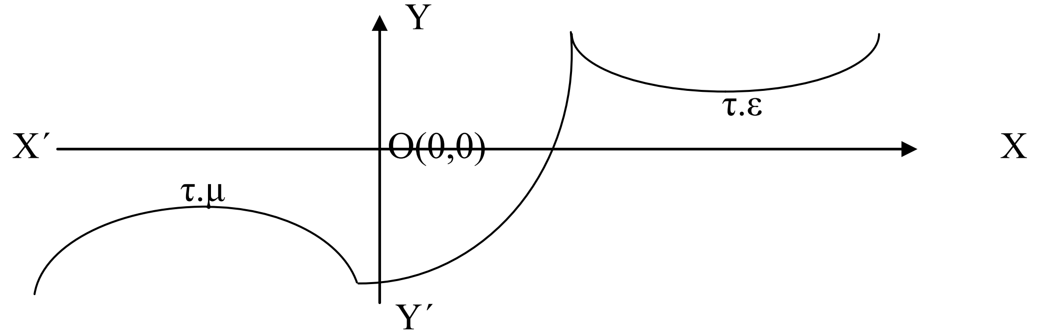
Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=x^2e^{-x}$

<u>ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ</u>

Έστω η συνάρτηση f: Α →IR(A:Το πεδίο ορισμού της f) και για κάθε xϵA ισχύει f(x)≤ f(x_o) με x_oϵA τότε η συνάρτηση έχει μέγιστο ή ολικό μέγιστο στη θέση x_o τον αριθμό f(x_o)
Έστω η συνάρτηση f: Α →IR(A:Το πεδίο ορισμού της f) και για κάθε xϵA ισχύει f(x)≥ f(x_o) με x_oϵA τότε η συνάρτηση έχει ελάχιστο ή ολικό ελάχιστο στη θέση x_o τον αριθμό f(x_o)
Έστω η συνάρτηση f: Α →IR(A:Το πεδίο ορισμού της f) και (α,β) υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f. Αν για κάθε xϵ(α,β) ισχύει f(x)≤ f(x_o) με x_oϵ(α,β) τότε η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο στη θέση x_o τον αριθμό f(x_o)
Έστω η συνάρτηση f: Α →IR(A:Το πεδίο ορισμού της f) και (α,β) υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f. Αν για κάθε xϵ(α,β) ισχύει f(x)≥ f(x_o) με x_oϵ(α,β) τότε η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_o τον αριθμό f(x_o)
Το τοπικό μέγιστο και το τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f καλούνται τοπικά ακρότατα της f
Το μέγιστο και το ελάχιστο μιας συνάρτησης f καλούνται ακρότατα της f

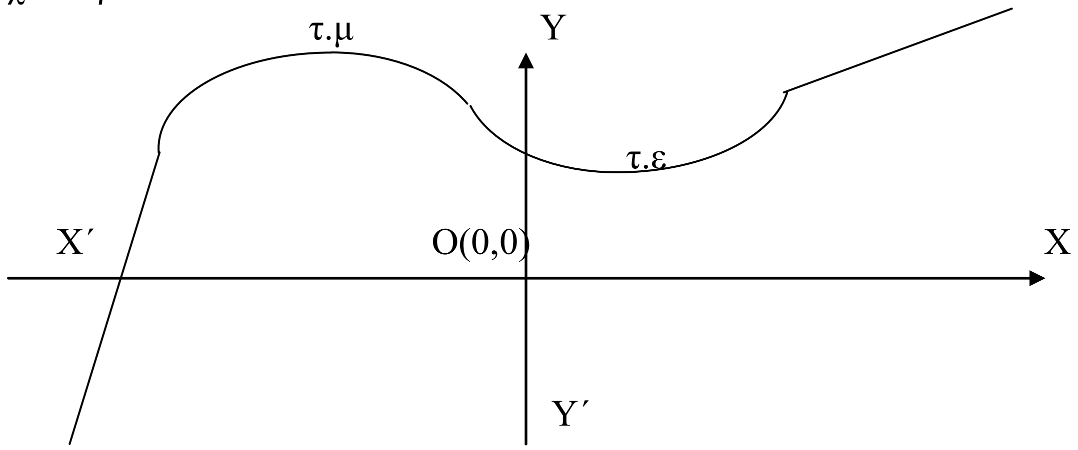
<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!!!</u>

Ι) Αν μια συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο και τοπικό ελάχιστο αυτό δεν σημαίνει ότι το τοπικό μέγιστο είναι μεγαλύτερο από το τοπικό ελάχιστο



Συνεπώς δεν μπορώ να συγκρίνω τοπικά ακρότατα

II) Μια συνάρτηση μπορεί να έχει πολλά τοπικά ακρότατα αλλά να μην έχει ακρότατο



x	α	x_o	β
f′	+	0	+
f	↗		↗

Αν : $\left\{\begin{array}{l} \text{(I) } f'(x_0)=0 \\ \text{(II) } f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta) \end{array}\right\}$

Τότε η συνάρτηση f δεν έχει τοπικό ακρότατο στη θέση x_0

x	α	x_o	β
f′	–		–
f	↘		↘

Αν: $\left\{\begin{array}{l} \text{(I) } f'(x_0)=0 \\ \text{(II) } f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta) \end{array}\right\}$

Τότε η συνάρτηση f έχει τοπικό ακρότατο στη θέση x_o