ΕΥΡΕΣΗ ΟΡΙΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΟΤΑΝ $x \to \pm\infty$

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\alpha_\nu x^\nu\right),\alpha_\nu,\alpha_{\nu-1},\cdots,\alpha_1,\alpha_0\in\mathbb{R},\alpha_\nu\neq 0,\nu\in\mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu},\alpha_\nu,\cdots,\alpha_0,\beta_\mu,\cdots,\beta_0\in\mathbb{R},\alpha_\nu\beta_\mu\neq 0,\nu,\mu\in\mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^\nu}=0,\nu\in\mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{x\to\infty}x^\nu=+\infty,\nu\in\mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{x\to-\infty}x^{2\nu}=+\infty,\nu\in\mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{x\to-\infty}x^{2\nu+1}=-\infty,\nu\in\mathbb{N}^*$

Πως θα βρώ το $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ *όταν στον τύπο της* f *εμφανίζονται παραστάσεις της μορφής* $\sqrt{\alpha}-\beta,\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta},\sqrt[3]{\alpha}-\beta,\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}$

↓

Α*πο τις παραστάσεις* $\sqrt{\alpha}-\beta,\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta},\sqrt[3]{\alpha}-\beta,\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}$
βγάζω κοινό παράγοντα το x στον μεγαλύτερο εκθέτη

> Γ*ια να βγάλω κοινό παράγοντα το x στον μεγαλύτερο εκθέτη ακολουθώ την εξής πορεία* :
> (Ι)Γ*ράφω έξω απο την παράσταση το x στον μεγαλύτερο εκθέτη*
> (ΙΙ) Δ*ιαιρώ κάθε όρο του αθροίσματος με x στον μεγαλύτερο εκθέτη*

↓

Π*αίρνω το όριο τωνπαραστάσεων* $\sqrt{\alpha}-\beta,\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta},\sqrt[3]{\alpha}-\beta,\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}$
όταν το $x\to\pm\infty$

↓

Α*ν στην παράσταση* $\sqrt{\alpha}-\beta$ *δημιουργηθεί απροσδιοριστια της μορφής* $0(\pm\infty)$ *τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση* $\sqrt{\alpha}+\beta$
Α*ν στην παράσταση* $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ *δημιουργηθεί απροσδιοριστια της μορφής* $0(\pm\infty)$ *τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση* $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$
Α*ν στην παράσταση* $\sqrt[3]{\alpha}-\beta$ *δημιουργηθεί απροσδιοριστια της μορφής* $0(\pm\infty)$ *τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση* $\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^2+\sqrt[3]{\alpha}\beta+\beta^2$

Αν στην παράσταση $\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}$ δημιουργηθεί απροσδιοριστια της μορφής $0(\pm\infty)$ τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση $\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^2+\sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{\beta}+\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2$

↓

Εκτελώ τις πράξεις εκει που εμφανίζεται διαφορά τετραγώνων και διαφορά κύβων

↓

Βγάζω κοινό παράγοντα το x στον μεγαλύτερο εκθέτη στον αριθμητή και παρονομαστή

↓

Εκτελώ όλες τις δυνατές απλοποιήσεις

↓

Παίρνω το όριο όταν $x\to\pm\infty$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=13x^5+25x^4+3x^3-7x^2+3x+5$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=13x^5+25x^4+3x^3-7x^2+3x+5$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(13x^5+25x^4+3x^3-7x^2+3x+5\right)=\lim_{x\to-\infty}13x^5=13\lim_{x\to-\infty}x^5=$$
$$=13(-\infty)=-\infty$$

2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x^5+5x^2+13}{7x^3+4}$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5+5x^2+13}{7x^3+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5}{7x^3}=\frac{3}{7}\lim_{x\to+\infty}x^2=\frac{3}{7}(+\infty)=+\infty$$

3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{25x^2+5x-7}-5x$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Επειδή $x\to+\infty$ θα έχω $x>0$:

$$f(x)=\sqrt{25x^2+5x-7}-5x=\sqrt{x^2\left(\frac{25x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{7}{x^2}\right)}-5x=\sqrt{x^2\left(25+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}-5x=$$

$$=\sqrt{x^2}\sqrt{25+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}-5x \overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=} |x|\sqrt{25+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}-5x \overset{x>0\Rightarrow|x|=x}{=} x\sqrt{25+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}-5x=$$

$$x\left(\sqrt{25+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}-5\right)$$

$Έχω:$

$$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{25+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}-5\right)=\sqrt{25+\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x^2}}-5=\sqrt{25+0-0}-5=5-5=0$$

$$f(x)=\sqrt{25x^2+5x-7}-5x=\frac{\left(\sqrt{25x^2+5x-7}-5x\right)\left(\sqrt{25x^2+5x-7}+5x\right)}{\sqrt{25x^2+5x-7}+5x}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{25x^2+5x-7}\right)^2-(5x)^2}{\sqrt{x^2\left(25+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}+5x}=\frac{x\left(5-\frac{7}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{25+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}+5x}$$

$$\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=}\frac{x\left(5-\frac{7}{x}\right)}{|x|\sqrt{25+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}+5x}\overset{x>0\Rightarrow|x|=x}{=}\frac{x\left(5-\frac{7}{x}\right)}{x\sqrt{25+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}+5x}=\frac{\cancel{x}\left(5-\frac{7}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{25+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}+5\right)}=$$

$$=\frac{5-\frac{7}{x}}{\sqrt{25+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{7}{x}}{\sqrt{25+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}+5}=\frac{5-\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x}}{\sqrt{25+\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x^2}}+5}=\frac{5-0}{\sqrt{25+0-0}+5}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

4

$Δίνεται\ η\ συνάρτηση\ f(x)=\sqrt{36x^2+2x+3}+6x$

$Να\ βρεθεί\ το\ \lim_{x\to-\infty}f(x)$

$Επειδή\ x\to-\infty\ θα\ έχω\ x<0:$

. $$f(x)=\sqrt{36x^2+2x+3}+6x=\sqrt{x^2\left(36+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+6x=\sqrt{x^2}\sqrt{36+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+6x$$

$$\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=}|x|\sqrt{36+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+6x\overset{x<0\Rightarrow|x|=-x}{=}-x\sqrt{36+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+6x=x\left(-\sqrt{36+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+6\right)$$

$Έχω:$

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{36+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+6\right) = -\sqrt{36+\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}}+6 = -\sqrt{36+0+0}+6 = -6+6 = 0$$

$$f(x)=\sqrt{36x^2+2x+3}+6x=\frac{\left(\sqrt{36x^2+2x+3}+6x\right)\left(\sqrt{36x^2+2x+3}-6x\right)}{\sqrt{36x^2+2x+3}-6x}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{36x^2+2x+3}\right)^2-(6x)^2}{\sqrt{36x^2+2x+3}-6x}=\frac{36x^2+2x+3-36x^2}{\sqrt{36x^2+2x+3}-6x}=\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(36+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-6x}=$$

$$\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{36+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-6x}\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=}\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{36+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-6x}\overset{x<0\Rightarrow|x|=-x}{=}\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{-x\sqrt{36+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-6x}=$$

$$-\frac{\cancel{x}\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{36+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+6\right)}=-\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{36+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+6}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{36+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+6} = -\frac{2+\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}}{\sqrt{36+\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}}+6} = -\frac{2+0}{\sqrt{36+0+0}+6}=$$

$$=-\frac{2}{12}=-\frac{1}{6}$$

5.

> $Δίνεται\ η\ συνάρτηση\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}-x}{x^2+1}$
>
> $Να\ βρεθεί\ το\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$

$Επειδή\ x\to+\infty\ θα\ έχω\ x>0:$

$$\sqrt{x^2+x+4}-x=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-x=\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}-x\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=}$$

$$=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}-x\overset{x>0\Rightarrow|x|=x}{=}x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}-x=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}-1\right)$$

$Έχω:$

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}-1\right)=\sqrt{1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}}-1=\sqrt{1+0+0}-1=1-1=0$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+4}-x}{x^2+1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+4}+x\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+x+4}+x\right)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+x+4}\right)^2-x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+x\right)}=\frac{x^2+x+4-x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}+x\right)}\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=}$$

$$=\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}+x\right)}\overset{x>0\Rightarrow|x|=x}{=}\frac{1+\frac{4}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}+x\right)}=$$

$$\frac{1+\frac{4}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right)}=\frac{1}{x^2}\frac{1+\frac{4}{x}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\frac{1+\frac{4}{x}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\frac{1+\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}}{\left(1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\right)\left(\sqrt{1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right)}$$

$$=0\frac{1+0}{(1+0)\left(\sqrt{1+0+0}+1\right)}=0$$

6.

$Δίνεται\ η\ συνάρτηση\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+3}+x}{x^2+2}$
$Nα\ βρεθεί\ το\ \lim_{x\to-\infty} f(x)$

$Επειδή\ x<0\ θα\ έχω\ x<0:$

$$\sqrt{x^2+x+3}+x=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+x=\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+x\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=}$$

$$|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+x\overset{x<0\Rightarrow|x|=-x}{=}-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+x=x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)$$

Επειδή $x<0$ θα έχω $x<0$:

$$\sqrt{x^2+x+3}+x=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+x=\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+x\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=}$$

$$|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+x\overset{x<0\Rightarrow|x|=-x}{=}-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+x=x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)$$

Έχω:

$$\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)=-\sqrt{1+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}}+1=-\sqrt{1+0+0}+1=-1+1=0$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+3}+x}{x^2+2}=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+3}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x+3}-x\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+x+3}-x\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+3}\right)^2-x^2}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-x\right)}=\frac{x^2+x+3-x^2}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-x\right)}$$

$$\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-x\right)}\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=}\frac{1+\frac{3}{x}}{x\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-x\right)}=$$

$$-\frac{1+\frac{3}{x}}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=-\frac{1}{x^2}\frac{1+\frac{3}{x}}{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}\frac{1+\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}}{\left(1+\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}\right)\left(\sqrt{1+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}}+1\right)}=-0\frac{1+0}{(1+0)\left(\sqrt{1+0+0}+1\right)}=0$$

7.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+2x+5}-2x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$

Να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

Επειδή $x\to+\infty$ θα έχω $x>0$:

$$\sqrt{4x^2+2x+5}-2x=\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}-2x=\sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-2x\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=}$$

$$|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-2x\overset{x>0\Rightarrow|x|=x}{=}x\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-2x=x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-2\right)$$

Έχω:

$$\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-2\right)=\sqrt{4+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}}-2=\sqrt{4+0+0}-2=2-2=0$$

$$\sqrt{x^2+x+1}-x=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x=\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=}$$

$$|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\overset{x>0\Rightarrow|x|=x}{=}x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)=\sqrt{1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}-1=\sqrt{1+0+0}-1=1-1=0$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+2x+5}-2x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x+5}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x+5}+2x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x+5}+2x\right)}=$$

$$\frac{\left[\left(\sqrt{4x^2+2x+5}\right)^2-(2x)^2\right]\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x\right)}{\left[\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-x^2\right]\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+2x\right)}=$$

$$\frac{\left(4x^2+2x+5-4x^2\right)\left(\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\right)}{\left(x^2+x+1-x^2\right)\left(\sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+2x\right)}\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=}\frac{\cancel{x}\left(2+\frac{5}{x}\right)\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+2x\right)}\overset{x><0\Rightarrow|x|=x}{=}$$

$$\frac{\left(2+\frac{5}{x}\right)\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(x\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+2x\right)}=\frac{\left(2+\frac{5}{x}\right)\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\cancel{x}\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+2\right)}=$$

$$=\frac{\left(2+\frac{5}{x}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2+\frac{5}{x}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+2\right)}=\frac{\left(2+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}\right)\left(\sqrt{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}+1\right)}{\left(1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{4+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}}+2\right)}=$$

$$=\frac{(2+0)\left(\sqrt{1+0+0}+1\right)}{(1+0)\left(\sqrt{4+0+0}+2\right)}=\frac{2\bullet 2}{2\bullet 2}=1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{8x^5+11x^2+10}{3x^4+8}$.*Να βρεθεί το* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{16x^2+4x+5}-4x$ *Να βρεθεί το* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{25x^2+7x+1}+5x$ *Να βρεθεί το* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+11}-x}{x^2+8}$ *Να βρεθεί το* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+2x+5}+x}{x^2+12}$ *Να βρεθεί το* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

6.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{9x^2+x+1}-3x}{\sqrt{4x^2+x+5}-2x}$ *Να βρεθεί το* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$