ΟΡΙΟ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΟΤΑΝ $x \to \pm\infty$

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ
$\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = \begin{cases} +\infty, \alpha > 1 \\ 0, 0 < \alpha < 1 \end{cases}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = \begin{cases} 0, \alpha > 1 \\ +\infty, 0 < \alpha < 1 \end{cases}$

ΠΡΟΣΟΧΗ
Για να βρώ το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *όταν στον τύπο της συνάρτησης* $f(x)$ *εμφανίζονται παραστάσεις της μορφής* $a_1^x, a_2^x, \cdots, a_\nu^x$ *με* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu > 0$ *τότε βγάζω κοινό παράγοντα το* α^x *όπου* $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$
Για να βρώ το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *όταν στον τύπο της συνάρτησης* $f(x)$ *εμφανίζονται παραστάσεις της μορφής* $a_1^x, a_2^x, \cdots, a_\nu^x$ *με* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu > 0$ *τότε βγάζω κοινό παράγοντα το* α^x *όπου* $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$
Για να βρώ το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ *όταν στον τύπο της* $f(x)$ *εμφανίζονται παραστάσεις της μορφής* $a_1^x, a_2^x, \cdots, a_\nu^x$ *με* $a_1, a_2, \cdots, a_\nu > 0$ *και στον τύπο της* $g(x)$ *παραστάσεις της μορφής* $\beta_1^x, \beta_2^x, \cdots, \beta_\kappa^x$ *με* $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\kappa > 0$ *τότε απο τον αριθμητή βγάζω κοινό παράγοντα το* α^x *με* $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ *και τον παρονομαστή βγάζω κοινό παράγοντα το* β^x *με* $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\kappa\}$
Για να βρώ το $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ *όταν στον τύπο της* $f(x)$ *εμφανίζονται παραστάσεις της μορφής* $a_1^x, a_2^x, \cdots, a_\nu^x$ *με* $a_1, a_2, \cdots, a_\nu > 0$ *και στον τύπο της* $g(x)$ *παραστάσεις της μορφής* $\beta_1^x, \beta_2^x, \cdots, \beta_\kappa^x$ *με* $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\kappa > 0$ *τότε απο τον αριθμητή βγάζω κοινό παράγοντα το* α^x *με* $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ *και τον παρονομαστή βγάζω κοινό παράγοντα το* β^x *με* $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\kappa\}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + 3^x + 7^{x+2} - 5^{x-1}$
Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$f\left(x\right)=2^x+3^x+7^{x+2}-5^{x-1}-1=2^x+3^x+7^2 7^{x+2}-5^{-1}5^x=$$

$$=2^x+3^x+49\bullet 7^x-\frac{5^x}{5}-1=7^x\left(\frac{2^x}{7^x}+\frac{3^x}{7^x}+\frac{49\bullet 7^x}{7^x}-\frac{1}{5}\frac{5^x}{7^x}\right)=$$

$$=7^x\left[\left(\frac{2}{7}\right)^x+\left(\frac{3}{7}\right)^x+49-\frac{1}{5}\left(\frac{5}{7}\right)^x\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}7^x\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^x+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^x+49-\frac{1}{5}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^x\right]=$$

$$=\left(+\infty\right)\left(0+0+49-\frac{1}{5}\bullet 0\right)=\left(+\infty\right)49=+\infty$$

$$f\left(x\right)=2^x+3^x+49\bullet 7^x-\frac{5^x}{5}-1=2^x\left(1+\frac{3^x}{2^x}+49\bullet\frac{7^x}{2^x}-\frac{1}{5}\frac{5^x}{2^x}-1\right)=$$

$$=2^x\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^x+49\bullet\left(\frac{7}{2}\right)^x-\frac{1}{5}\left(\frac{5}{2}\right)^x-1\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}2^x\left[1+\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x+49\bullet\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7}{2}\right)^x-\frac{1}{5}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^x-1\right]=$$

$$0\left(1+0+49\bullet 0-\frac{1}{5}\bullet 0-1\right)=0$$

2.

$\textit{Δίνεται η συνάρτηση } f\left(x\right)=\dfrac{3\bullet 0,5^x+5^x+13^x}{13^x+4^x}$
Να *βρεθούν τα όρια* $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right),\ \lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$

$$f\left(x\right)=\frac{3\bullet 0,5^x+5^x+13^x}{15^x+4^x}=\frac{13^x\left(3\bullet\frac{0,5^x}{13^x}+\frac{5^x}{13^x}+1\right)}{15^x\left(1+\frac{4^x}{15^x}\right)}=\left(\frac{13}{15}\right)^x\frac{3\bullet\left(\frac{0,5}{13}\right)^x+\left(\frac{5}{13}\right)^x+1}{1+\left(\frac{4}{15}\right)^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{13}{15}\right)^x\frac{3\bullet\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{0,5}{13}\right)^x+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{13}\right)^x+1}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{13}\right)^x}=0\bullet\frac{3\bullet 0+0+1}{1+0}=0$$

$$f\left(x\right)=\frac{0,5^x\left(3+\frac{5^x}{0,5^x}+\frac{13^x}{0,5^x}\right)}{4^x\left(\frac{15^x}{4^x}+1\right)}=\left(\frac{0,5}{4}\right)^x\frac{3+\frac{5^x}{0,5^x}+\frac{13^x}{0,5^x}}{\left(\frac{15}{4}\right)^x+1}=\left(\frac{1}{8}\right)^x\frac{3+\left(\frac{5}{0,5}\right)^x+\left(\frac{13}{0,5}\right)^x}{\left(\frac{15}{4}\right)^x+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^x\frac{3+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{0,5}\right)^x+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{13}{0,5}\right)^x}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{15}{4}\right)^x+1}=\left(+\infty\right)\frac{3+0+0}{0+1}=+\infty$$

3.

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\frac{a^x-3\beta^x+a^x\beta^x}{2a^x+5\beta^x-a^x\beta^x},0<\alpha,\beta<1$
Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$

$$\Delta\iota\alpha\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\iota\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma:\left\{\begin{matrix}\left(\mathrm{I}\right)\alpha<\beta\\ \left(\mathrm{II}\right)\alpha=\beta\\ \left(\mathrm{III}\right)\alpha>\beta\end{matrix}\right\}$$

$$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\left(\mathrm{I}\right):0<\alpha<\beta\Rightarrow0<\frac{\alpha}{\beta}<1$$

$$f\left(x\right)=\frac{a^x-3\beta^x+a^x\beta^x}{2a^x+5\beta^x-a^x\beta^x}=\frac{\beta^x\left(\frac{a^x}{\beta^x}-3+a^x\right)}{\beta^x\left(2\frac{a^x}{\beta^x}+5-a^x\right)}=\frac{\left(\frac{a}{\beta}\right)^x-3+a^x}{2\left(\frac{a}{\beta}\right)^x+5-a^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{\beta}\right)^x-3+\lim\limits_{x\to+\infty}a^x}{2\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{\beta}\right)^x+5-\lim\limits_{x\to+\infty}a^x}=\frac{0-3+0}{2\bullet0+5-0}=-\frac{3}{5}$$

$$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\left(\mathrm{II}\right):\alpha=\beta$$

$$f\left(x\right)=\frac{a^x-3\beta^x+a^x\beta^x}{2a^x+5\beta^x-a^x\beta^x}\overset{\beta=\alpha}{=}\frac{a^x-3\alpha^x+a^x\alpha^x}{2a^x+5\alpha^x-a^x\alpha^x}=\frac{-2\alpha^x+a^x\alpha^x}{7\alpha^x-a^x\alpha^x}=\frac{\alpha^x\left(-2+a^x\right)}{\alpha^x\left(7-a^x\right)}=$$

$$=\frac{-2+a^x}{7-a^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\frac{-2+\lim\limits_{x\to+\infty}a^x}{7-\lim\limits_{x\to+\infty}a^x}=\frac{-2+0}{7-0}=-\frac{2}{7}$$

$$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\left(\mathrm{III}\right):0<\beta<\alpha\Rightarrow0<\frac{\beta}{\alpha}<1$$

$$f(x)=\frac{a^x-3\beta^x+a^x\beta^x}{2a^x+5\beta^x-a^x\beta^x}=\frac{a^x\left(1-3\dfrac{\beta^x}{a^x}+\beta^x\right)}{a^x\left(2+5\dfrac{\beta^x}{a^x}-\beta^x\right)}=\frac{1-3\left(\dfrac{\beta}{a}\right)^x+\beta^x}{2+5\left(\dfrac{\beta}{a}\right)^x-\beta^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1-3\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\beta}{a}\right)^x+\lim\limits_{x\to+\infty}\beta^x}{2+5\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\beta}{a}\right)^x-\lim\limits_{x\to+\infty}\beta^x}=\frac{1-3\bullet0+0}{2+5\bullet0-0}=\frac{1}{2}$$

4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\lambda-4)7^x+\lambda5^x}{4^x+3^x}$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$$f(x)=\frac{(\lambda-4)7^x+\lambda5^x}{4^x+3^x}=\frac{7^x\left(\lambda-4+\lambda\dfrac{5^x}{7^x}\right)}{4^x\left(1+\dfrac{3^x}{4^x}\right)}=\left(\frac{7}{4}\right)^x\frac{\lambda-4+\lambda\left(\dfrac{5}{7}\right)^x}{1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^x}$$

Έχω:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7}{4}\right)^x=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\lambda-4+\lambda\left(\dfrac{5}{7}\right)^x}{1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^x}=\frac{\lambda-4+\lambda\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{7}\right)^x}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^x}=\lambda-4$$

Διακρίνω τις περιπτώσεις: $\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\,\lambda-4=0\\(\mathrm{II})\,\lambda-4\neq0\end{matrix}\right\}$

Περίπτωση $(\mathrm{I}):\lambda-4=0\Leftrightarrow\lambda=4$

Αν $\lambda=4$ τότε ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x)=\frac{(\lambda-4)7^x+\lambda5^x}{4^x+3^x}\overset{\lambda=4}{=}\frac{4\bullet5^x}{4^x+3^x}=\frac{4\bullet5^x}{4^x\left(1+\dfrac{3^x}{4^x}\right)}=\left(\frac{5}{4}\right)^x\frac{4}{1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^x}$$

.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^x\frac{4}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^x}=(+\infty)\frac{4}{1+0}=+\infty$$

Περίπτωση $(\mathrm{II}):\lambda-4\neq0\Leftrightarrow\lambda\neq4$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7}{4}\right)^x\frac{\lambda-4+\lambda\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^x}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x}=(+\infty)\frac{\lambda-4+\lambda\bullet 0}{1+0}=(+\infty)(\lambda-4)=$$

$$=\begin{cases}-\infty,\lambda-4<0\\+\infty,\lambda-4>0\end{cases}=\begin{cases}-\infty,\lambda<4\\+\infty,\lambda>4\end{cases}$$

5.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=\frac{8^x+7^x\eta\mu x}{6^x+2^x}$.Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$f(x)=\frac{8^x+7^x\eta\mu x}{6^x+2^x}=\frac{8^x\left(\frac{7^x}{8^x}\eta\mu x+1\right)}{6^x\left(\frac{2^x}{6^x}+1\right)}=\left(\frac{8}{6}\right)^x\frac{\left(\frac{7}{8}\right)^x\eta\mu x+1}{\left(\frac{2}{6}\right)^x+1}=\left(\frac{4}{3}\right)^x\frac{\left(\frac{7}{8}\right)^x\eta\mu x+1}{\left(\frac{1}{3}\right)^x+1}$$

$$=\left(\frac{4}{3}\right)^x\frac{\left(\frac{7}{8}\right)^x\eta\mu x+1}{\left(\frac{1}{3}\right)^x+1}$$

$$\text{Έχω}:\left|\left(\frac{7}{8}\right)^x\eta\mu x\right|=\left(\frac{7}{8}\right)^x|\eta\mu x|\le\left(\frac{7}{8}\right)^x\bullet 1=\left(\frac{7}{8}\right)^x$$

$$\left|\left(\frac{7}{8}\right)^x\eta\mu x\right|\le\left(\frac{7}{8}\right)^x\Leftrightarrow-\left(\frac{7}{8}\right)^x\le\left(\frac{7}{8}\right)^x\eta\mu x\le\left(\frac{7}{8}\right)^x$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})-\left(\frac{7}{8}\right)^x\le\left(\frac{7}{8}\right)^x\eta\mu x\le\left(\frac{7}{8}\right)^x\\(\mathrm{II})\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left(\frac{7}{8}\right)^x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^x=0\end{matrix}\right\}$$

Οπότε απο το κριτήριο της παρεμβολής θα έχω:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7^x}{8^x}\eta\mu x=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^x\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^x\eta\mu x+1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x+1}=(+\infty)\frac{0+1}{0+1}=+\infty$$

6.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=8^x\eta\mu 9^{-x}$.Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\Gamma \nu\omega\rho i\zeta\omega \; o\tau\iota : |\eta\mu x| \le |x|$

$$|f(x)| = |8^x \eta\mu 9^{-x}| = 8^x |\eta\mu 9^{-x}| \le 8^x |9^{-x}| = \frac{8^x}{9^x} = \left(\frac{8}{9}\right)^x$$

$$|f(x)| \le \left(\frac{8}{9}\right)^x \Leftrightarrow -\left(\frac{8}{9}\right)^x \le f(x) \le \left(\frac{8}{9}\right)^x$$

$$\text{Έχω}: \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{I}) -\left(\frac{8}{9}\right)^x \le f(x) \le \left(\frac{8}{9}\right)^x \\ (\mathrm{II}) \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left(\frac{8}{9}\right)^x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^x = 0 \end{array} \right\}$$

Οπότε απο το κριτήριο της παρεμβολής θα έχω $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\bullet 4^x - 5^x + 13^{x+1} - 8^{x-1}$

Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2\bullet 0,3^x + 4^x + 0,1^x}{3^x + 5^x}$

Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2a^x - \beta^x + 3a^x\beta^x}{4a^x + 3\beta^x + 7a^x\beta^x}, 0 < \alpha, \beta < 1$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{(\lambda-5)8^x + \lambda 3^x}{5^x + 2^x}$.Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{(\lambda-2)9^x + 4^x \eta\mu x}{\lambda 5^x + 3^x}$.Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Υπόδειξη: Διακρίνω τις περιπτώσεις $(\mathrm{I})\lambda = 0 (\mathrm{II})\lambda - 2 = 0 (\mathrm{III})\lambda \ne 0, \lambda - 2 \ne 0$

6.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^x \eta\mu \dfrac{2^x + 1}{10^x + 7^x}$.Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

7.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^{-x} \eta\mu \dfrac{2^x + 3^x}{8^x + 0,2^x}$.Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$