

## ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΑ ΟΡΙΑ

(I) Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$  δεν έπεται ότι υπάρχουν τα όρια

της  $f$  στο σημείο  $x_0$  και της  $g$  στο σημείο  $x_0$

Πράγματι:

Θεωρώ την συνάρτηση  $g(x) = \eta\mu \frac{1}{x}, x \neq 0$

Θεωρώ τους αριθμούς  $x_\nu = \frac{1}{2\pi\nu}, \nu \in \mathbb{N}^*$ . Τότε θα έχω:

$$g(x_\nu) = h\left(\frac{1}{2\pi\nu}\right) = \eta\mu \frac{1}{\frac{1}{2\pi\nu}} = \eta\mu 2\pi\nu = \eta\mu(2\pi\nu + 0) \stackrel{\eta\mu(2\pi k + \theta) = \eta\mu\theta, k \in \mathbb{Z}}{=} \eta\mu 0 = 0$$

Οπότε αν το  $\nu$  είναι πολύ μεγάλο το  $x_\nu$  τότε το  $x_\nu$  είναι περίπου 0 δηλαδή το  $x_\nu$  τείνει στο 0. Τότε θα ισχύει  $g(x_\nu) = 0$

Θεωρώ τους αριθμούς  $y_\nu = \frac{1}{2\pi\nu + \frac{\pi}{2}}, \nu \in \mathbb{N}^*$ . Τότε θα έχω:

$$g(y_\nu) = h\left(\frac{1}{2\pi\nu + \frac{\pi}{2}}\right) = \eta\mu \frac{1}{\frac{1}{2\pi\nu + \frac{\pi}{2}}} = \eta\mu\left(2\pi\nu + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\eta\mu(2\pi k + \theta) = \eta\mu\theta, k \in \mathbb{Z}}{=} \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$$

Οπότε αν το  $\nu$  είναι πολύ μεγάλο το  $y_\nu$  τότε το  $y_\nu$  είναι περίπου 0 δηλαδή το  $y_\nu$  τείνει στο 0. Τότε θα ισχύει  $g(y_\nu) = 1$

Για να υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $g$  στο σημείο  $x_0 = 0$  θα πρέπει όταν το  $x$  βρίσκεται πολύ κοντά στο 0 δηλαδή τείνει στο 0 οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης να τείνουν στον ίδιο πάντα αριθμό!!!

Όταν το  $x$  έχει την μορφή  $\frac{1}{2\pi\nu}, \nu \in \mathbb{N}^*$  βρίσκεται πολύ κοντά στο 0

δηλαδή τείνει στο 0 οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης παίρνουν την τιμή 0.

Όταν το  $x$  έχει την μορφή  $\frac{1}{2\pi\nu + \frac{\pi}{2}}, \nu \in \mathbb{N}^*$  βρίσκεται πολύ κοντά στο 0

δηλαδή τείνει στο 0 οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης παίρνουν την τιμή 1.

Συνεπώς όταν το  $x$  τείνει στο 0 οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης δεν τείνουν στον ίδιο πάντα αριθμό. Οπότε δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $g$  στο σημείο  $x_0 = 0$

Θεωρώ την συνάρτηση  $f(x) = x - \eta\mu \frac{1}{x}, x \neq 0$ . Έστω υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_0 = 0$ . Τότε αν  $x \neq 0$  θα έχω:

$$f(x) = x - \eta\mu \frac{1}{x} \Leftrightarrow \eta\mu \frac{1}{x} = x - f(x)$$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  και υπάρχει το όριο της  $f$  στο σημείο  $x_0 = 0$  θα υπάρχει και

το όριο της συνάρτησης  $\eta\mu \frac{1}{x} = x - f(x)$  στο σημείο  $x_0 = 0$  (Άτοπο)

Συνεπώς δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x - \cancel{\eta\mu \frac{1}{x}} + \cancel{\eta\mu \frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Οπότε υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)]$  χωρίς να υπάρχουν τα όρια της  $f$  στο σημείο  $x_0 = 0$  και της  $g$  στο σημείο  $x_0 = 0$

(II) Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$  δεν έπεται ότι υπάρχουν τα όρια

της  $f$  στο σημείο  $x_0$  και της  $g$  στο σημείο  $x_0$

$$\text{Θεωρώ της συναρτήσεις } f(x) = \begin{cases} -5, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -2, & x \leq 0 \\ 5, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Τότε θα έχω: } f(x)g(x) = \begin{cases} -5(-2), & x \leq 0 \\ 2 \cdot 5, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 10, & x \leq 0 \\ 10, & x > 0 \end{cases} = 10$$

$$\text{Οπότε: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 10 = 10$$

Όταν το  $x$  τείνει στο μηδέν από τιμές μικρότερες του 0 οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης  $f$  τείνουν στο  $-5$ , ενώ όταν  $x$  τείνει στο μηδέν από τιμές μεγαλύτερες του 0 οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης  $f$  τείνουν στο 2. Για να υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_0 = 0$  θα πρέπει όταν το  $x$  τείνει στο μηδέν (ανεξάρτητα αν αυτές οι τιμές μεγαλύτερες ή μικρότερες από το 0 αρκεί να βρίκονται πολύ κοντά στο 0) θα πρέπει οι τιμές της συνάρτησης να τείνουν στον ίδιο πάντα αριθμό. Άρα δεν υπάρχει το όριο της  $f$  στο σημείο  $x_0 = 0$ .

Όταν το  $x$  τείνει στο μηδέν από τιμές μικρότερες του 0 οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης  $g$  τείνουν στο  $-2$ , ενώ όταν  $x$  τείνει στο μηδέν από τιμές μεγαλύτερες του 0 οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης  $g$  τείνουν στο 5. Για να υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $g$  στο σημείο  $x_0 = 0$  θα πρέπει όταν το  $x$  τείνει στο μηδέν (ανεξάρτητα αν αυτές οι τιμές μεγαλύτερες ή μικρότερες από το 0 αρκεί να βρίκονται πολύ κοντά στο 0) θα πρέπει οι τιμές της συνάρτησης να τείνουν στον ίδιο πάντα αριθμό. Άρα δεν υπάρχει το όριο της  $g$  στο σημείο  $x_0 = 0$ .

Οπότε υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$  χωρίς να υπάρχουν τα όρια της  $f$  στο σημείο  $x_0 = 0$  και της  $g$  στο σημείο  $x_0 = 0$