Πως θα βρω το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ όταν :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ και f(x),g(x) πολυώνυμα

Από τα πολυώνυμα f(x) και g(x) βγάζω κοινό παράγοντα το $x - x_0$:
$f(x) = f_1(x)\,(x - x_0)$, $g(x) = g_1(x)\,(x - x_0)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)\,(x - x_0)}{g_1(x)\,(x - x_0)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Για να βρω το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ θέτω στην παράσταση $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$

όπου x το x_0 :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \boxed{\text{Θέτω όπου x το } x_0 \text{ στην παράσταση } \frac{f_1(x)}{g_1(x)}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^2 - 4x + 3}$

με $x \in (-\infty, 1)$ (0 , 3) U (3 , + ∞)

Να βρεθεί το όριο της f στο σημείο $x_o = 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Παρατηρώ ότι : $\lim\limits_{x\to 1} (x^3 + x^2 + x - 3) = \lim\limits_{x\to 1} (x^2 - 4x + 3) = 0$

Θεωρώ την Ευκλείδεια διαίρεση $(x^3 + x^2 + x - 3) : (x - 1)$

1	1	1	– 3	ρ = 1
	1 • 1 =1	1 • 2 = 2	3 • 1 = 3	
1	1 + 1 = 2	1 + 2 = 3	– 3 + 3 = 0	

$\pi(x) = x^2 + 2x + 3$, $\upsilon(x) = 0$

Έχω : $x^3 + x^2 + x - 3 = (x - \rho)\ \boxed{\text{Πηλίκο}} + \boxed{\text{Υπόλοιπο}}\ =$

$= (x - 2)\ \pi(x) + 0 = (x - 1)\ (x^2 + 2x + 3)$

Οπότε : $x^3 + x^2 + x - 3 = (x - 1)\ (x^2 + 2x + 3)$ (1)

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση :

$$\boxed{1}\ x^2\ \boxed{-4}\ x\ \boxed{+\ 3} = 0 \qquad (2)$$

$$\alpha = 1 \qquad \beta = -4 \qquad \gamma = 3$$

$\Delta = \beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

Επειδή $\Delta > 0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση (2) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\,\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$\rho_1 = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\rho_2 = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha (x - \rho_1)(x - \rho_2)$ Όταν $\Delta > 0$ και ρ_1 , ρ_2 οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

Άρα : $x^2 - 4x + 3 = \alpha (x - \rho_1)(x - \rho_2) = 1(x - 3)(x - 1) = (x - 3)(x - 1)$

Οπότε : $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$ (3)

Αν $x \epsilon (-\infty, 1)\ (0, 3) \cup (3, +\infty)$ θα έχω :

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-1)(x^2 + 2x + 3)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x^2 + 2x + 3}{x - 3}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{x - 3} = \frac{1^2 + 2 \bullet 1 + 3}{1 - 3} = \frac{6}{-2} = -3$$

ΑΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρεθούν τα όρια :

I) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ I) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 6x + 8}$

III) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 7x + 12}$ IV) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 8x + 15}$

2.

Να βρεθούν τα όρια :

I) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 5x}{x^2 - 6x + 5}$ I) $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 5x + 4}$

III) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3}$ IV) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 5x}{x^2 + 3x - 40}$

3.

Να βρεθούν τα όρια :

I) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5}$ II) $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 12}$

III) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 2x - 15}$ IV) $\lim_{x \to \mathbf{7}} \dfrac{x^2 - 8x + 7}{x^2 - 9x + 14}$

4.

Να βρεθούν τα όρια :

I) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 2}{x^2 - 3x + 2}$ II) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 3x}{x^2 - x}$

III) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x + 8}{x^2 - 5x + 6}$ IV) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 8x^2 - 6x + 3}{x^2 - 9x - 10}$

Πως θα παραγοντοποιήσω την παράσταση Α – Β όταν

$\downarrow$

Γράφω τα Α και Β στην μορφή Α = α^2 και Β = β^2

$\downarrow$

Α – Β = $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

<u>ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ</u>
$(\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ ($\boxed{\text{Πρώτος}}$ – $\boxed{\text{Δεύτερος}}$) . ($\boxed{\text{Πρώτος}}$ + $\boxed{\text{Δεύτερος}}$) = = $\boxed{\text{Πρώτος}}^2 - \boxed{\text{Δεύτερος}}^2$
$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})^\nu = \boldsymbol{\alpha}^\nu . \boldsymbol{\beta}^\nu$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$
$(\boldsymbol{\alpha}^\nu)^\mu = \boldsymbol{\alpha}^{\nu\mu}$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $25\,\alpha^4 - 9$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

$25\,\alpha^4 - 9 = 5^2(\alpha^2)^2 - 3^2 = (5\,\alpha^2)^2 - 3^2 =$

Γράφω το $25\,\alpha^4$ και 9 στην μορφή $25\,\alpha^4 = (5\,\alpha^2)^2$ και $9 = 3^2$
$(\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ ($\boxed{\text{Πρώτος}}$ – $\boxed{\text{Δεύτερος}}$) . ($\boxed{\text{Πρώτος}}$ + $\boxed{\text{Δεύτερος}}$) = = $\boxed{\text{Πρώτος}}^2 - \boxed{\text{Δεύτερος}}^2$
$(\boldsymbol{\alpha}^\nu)^\mu = \boldsymbol{\alpha}^{\nu\mu}$
$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})^\nu = \boldsymbol{\alpha}^\nu . \boldsymbol{\beta}^\nu$

$= (5\,\alpha^2 - 3)(5\,\alpha^2 + 3)$

Πώς θα βγάλω κοινό παράγοντα από κάποιο άθροισμα γράμματα και αριθμούς;;;

Για να βγάλω κοινό παράγοντα από κάποιο άθροισμα γράμματα θα πρέπει να υπάρχουν κοινά γράμματα σε όλους τους όρους του αθροίσματος !!!

↓

I) Βγάζω κοινό παράγοντα όλα τα κοινά γράμματα στο μικρότερο εκθέτη που εμφανίζονται

II) Από τους συντελεστές βγάζω κοινό παράγοντα το μεγαλύτερο κοινό διαιρέτη των συντελεστών

III) Μέσα στην παρένθεση διαιρώ όλους τους όρους του αθροίσματος με την παράσταση που έχει βγει κοινός παράγοντας

Άθροισμα = [Το γινόμενο όλων των κοινών γραμμάτων στο στο μικρότερο εκθέτη που εμφανίζονται] [Ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης των συντελεστών]

([Διαιρώ τον πρώτο όρο του αθροίσματος με την παράσταση που έχει βγει κοινός παράγοντας] + [Διαιρώ τον δεύτερο όρο του αθροίσματος με την παράσταση που έχει βγει κοινός παράγοντας] + . . .)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $16\,\alpha^4\,\beta^3 + 10\,\alpha^2\,\beta^5\,\kappa + 4\,\alpha^5\,\beta^7$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$16\,\alpha^4\,\beta^3 + 10\,\alpha^2\,\beta^5\,\kappa + 4\,\alpha^5\,\beta^7 = 2\,\alpha^2\,\beta^3\,(\,8\,\alpha^2 + 5\,\beta^2\,\kappa + 2\,\alpha^3\,\beta^4\,)$$

$$\frac{16\,\alpha^4\,\beta^3}{2\,\alpha^2\,\beta^3} = 8\,\alpha^2$$

$$\frac{10\,\alpha^2\,\beta^5\,\kappa}{2\,\alpha^2\,\beta^3} = 5\,\beta^2\,\kappa$$

$$\frac{4\,\alpha^5\,\beta^7}{2\,\alpha^2\,\beta^3} = 2\,\alpha^3\,\beta^4$$