Πως θα βρω το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ όταν :

I) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ και

II) f(x),g(x) παραστάσεις της μορφής :

$\sqrt{A(x)} + B(x)$, $\sqrt{A(x)} - B(x)$, $\sqrt{A(x)} - \sqrt{B(x)}$ ή πολυώνυμα

↓

Από τα πολυώνυμα βγάζω κοινό παράγοντα το $x - x_0$

↓

Όταν εχω παράσταση της μορφής $\sqrt{A(x)} + B(x)$ τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt{A(x)} - B(x)$

Όταν εχω παράσταση της μορφής $\sqrt{A(x)} - B(x)$ τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt{A(x)} + B(x)$

Όταν εχω παράσταση της μορφής $\sqrt{A(x)} - \sqrt{B(x)}$ τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)}$

↓

Εκτελώ τις πράξεις εκει που εμφανίζεται διαφορά τετραγώνων χρησιμοποιόντας τις ιδιότητες

$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$	$(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$, $\alpha \geq 0$

↓

Από τις παραστάσεις που εχω εφαρμόσει διαφορά τετραγώνων βγάζω κοινό παράγοντα το $x - x_0$

↓

Απλοποιώ το $x - x_0$

↓

Παίρνω το όριο της συνάρτησης στο σημείο x_0 στην απλοποιημένη

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4}$ με $x \in [0,2) \cup (2, +\infty)$ Να βρεθεί το όριο της f στο σημείο $x_o = 2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχω : $\lim\limits_{x \to 2}(\sqrt{x+7} - 3) = \lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 4) = 0$

Αν $x \in [0,2) \cup (2, +\infty)$ θα έχω :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4} =$$

Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση $\sqrt{x+7} + 3$
Παραγοντοποιώ την παράσταση $x^2 - 4$
$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$
$(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha, \ \alpha \geq 0$

$$= \frac{(\sqrt{x+7} - 3)(\sqrt{x+7} + 3)}{(x^2 - 2^2)(\sqrt{x+7} + 3)} = \frac{(\sqrt{x+7})^2 - 3^2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7} + 3)} =$$

$$= \frac{x + 7 - 9}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7} + 3)} = \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+2)(\sqrt{x+7} + 3)}$$

$$= \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}$$

Οπότε : $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}$ με $x \in [0,2) \cup (2, +\infty)$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 2} (x+2)(\sqrt{x+7}+3)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 2} (x+2) \lim\limits_{x\to 2} (\sqrt{x+7}+3)} =$$

$$= \frac{1}{(2+2)(\sqrt{2+7}+3)} = \frac{1}{4 \cdot 6} = \frac{1}{24}$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1.

Να βρεθούν τα όρια :

I) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ II) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+6x}-4}{x^2-3x+2}$

III) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2+4x+3}{\sqrt{2x+10}-2}$ IV) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{2x^2-7}-1}$

2.

Να βρεθούν τα όρια :

I) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2+4x-12}$ II) $\lim_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2+2x}$

III) $\lim_{x\to 7} \dfrac{x^2-8x+7}{\sqrt{2x+2}-4}$ IV) $\lim_{x\to -5} \dfrac{\sqrt{2x^2-25}-5}{x^2-9x+20}$

3.

Να βρεθούν τα όρια :

I) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}}{x^2+5x-6}$ II) $\lim_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x^2+11}-10}{x^2-9x}$

III) $\lim_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+7}-2}{x^2+2x-3}$ IV) $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{2x^2+7}-3}{x^2+4x+3}$

4.

Να βρεθούν τα όρια :

I) $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-1}}{x^2-8x+15}$ II) $\lim_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^2-7}-\sqrt{2x+17}}{x^2+3x-4}$

III) $\lim_{x\to -6} \dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{2x+13}}{x^2+7x+6}$ IV) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{2x+8}-\sqrt{5x+14}}$