$\Pi \omega\varsigma\ \theta\alpha\ \beta\rho\omega\ \tau o \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\ \acute{o}\tau\alpha\nu:$

$(\mathrm{I})\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$

$(\mathrm{II})$ Οι $f(x), g(x)$ *είναι παραστάσεις της μορφής*

$\sqrt[3]{\mathrm{A}(x)}+\mathrm{B}(x), \sqrt[3]{\mathrm{A}(x)}-\mathrm{B}(x), \sqrt[3]{\mathrm{A}(x)}-\sqrt[3]{\mathrm{B}(x)}$

↓

Αν *έχω την παρτάσταση* $\sqrt[3]{\mathrm{A}(x)}+\mathrm{B}(x)$ *τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση*:

$\left(\sqrt[3]{\mathrm{A}(x)}\right)^2-\sqrt[3]{\mathrm{A}(x)}\mathrm{B}(x)+\mathrm{B}^2(x)$

Αν *έχω την παρτάσταση* $\sqrt[3]{\mathrm{A}(x)}-\mathrm{B}(x)$ *τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση*:

$\left(\sqrt[3]{\mathrm{A}(x)}\right)^2+\sqrt[3]{\mathrm{A}(x)}\mathrm{B}(x)+\mathrm{B}^2(x)$

Αν *έχω την παρτάσταση* $\sqrt[3]{\mathrm{A}(x)}-\sqrt[3]{\mathrm{B}(x)}$ *τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση*:

$\left(\sqrt[3]{\mathrm{A}(x)}\right)^2+\sqrt[3]{\mathrm{A}(x)}\sqrt[3]{\mathrm{B}(x)}+\left(\sqrt[3]{\mathrm{B}(x)}\right)^2$

↓

Εκτελώ *τις πράξεις εκεί που εμφανίζεται διαφορά ή άθροισμα κύβων χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες*:

$$(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)=\alpha^3-\beta^3$$
$$(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)=\alpha^3+\beta^3$$
$$\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3=\alpha, \alpha\ge 0$$

↓

Από *τις παραστάσεις που έχω εφαρμόσει διαφορά ή άθροισμα κύβων βγάζω κοινό παράγοντα το* $x-x_0$

↓

Απλοποιώ *το* $x-x_0$

↓

$\Pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu\omega$ $\tau o$ $\acute{o}\rho\iota o$ $\tau\eta\varsigma$ $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\varsigma$ $\sigma\tau o$ $\sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o$ $x_0$ $\sigma\tau\eta\nu$ $\alpha\pi\lambda o\pi o\iota\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta$ $\mu o\rho\varphi\acute{\eta}$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}, x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$

$\mathrm{N}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \tau o\ \acute{o}\rho\iota o\ \tau\eta\varsigma\ f\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0=1$

$\Pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\acute{\omega}\ o\tau\iota: \lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\overset{\substack{\Pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\acute{\iota}\zeta\omega\ \alpha\rho\iota\theta\mu\eta\tau\acute{\eta}\ \kappa\alpha\iota\ \pi\rho o\nu o\mu\alpha\sigma\tau\acute{\eta} \\ \mu\varepsilon\ \left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}}{=}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}{(x-1)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}$$

$$\overset{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3}{=}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1}{(x-1)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}\overset{\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3=\alpha,\alpha\geq0}{=}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{1}\right)^2+\sqrt[3]{1}+1}=\frac{1}{3}$$

2.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-8x}, x\in(0,8)\cup(8,+\infty)$

$\mathrm{N}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \tau o\ \acute{o}\rho\iota o\ \tau\eta\varsigma\ f\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0=8$

$\Pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\acute{\omega}\ o\tau\iota: \lim\limits_{x\to8}\left(\sqrt[3]{x}-2\right)=\lim\limits_{x\to8}\left(x^2-8x\right)=0$

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-8x}\overset{\substack{\Pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\acute{\iota}\zeta\omega\ \alpha\rho\iota\theta\mu\eta\tau\acute{\eta}\ \kappa\alpha\iota \\ \pi\rho o\nu o\mu\alpha\sigma\tau\acute{\eta}\ \mu\varepsilon\ \left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+2^2 \\ \Pi\alpha\rho\alpha\gamma o\nu\tau o\pi o\iota\acute{\omega}\ \tau o\ \tau\rho\iota\acute{\omega}\nu\upsilon\mu o \\ x^2-8x=x(x-8)}}{=}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+2^2\right]}{x(x-8)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+2^2\right]}$$

$$\overset{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3}{=}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-2^3}{x(x-8)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4\right]}\overset{\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3=\alpha,\alpha\geq0}{=}$$

$$\frac{\cancel{x-8}}{x\left(\cancel{x-8}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4\right]}=\frac{1}{x\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4\right]}$$

$$\lim_{x\to 8} f(x)=\lim_{x\to 8}\frac{1}{x\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4\right]}=\frac{1}{8\left[\left(\sqrt[3]{8}\right)^2+2\sqrt[3]{8}+4\right]}=\frac{1}{8\bullet 12}=\frac{1}{96}$$

3.

$\Delta$ίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt[3]{x+6}}{x^2-2x},\ x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$

Να βρεθεί το όριο της $f$ στο σημείο $x_0=2$

Παρατηρώ οτι: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt[3]{x+6}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-2x\right)=0$

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt[3]{x+6}}{x^2-2x}\overset{\substack{\text{Πολλαπλασίζω αριθμητή και}\\ \text{προνομαστή με } \left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+\sqrt[3]{3x+2}\sqrt[3]{x+6}+\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2\\ \text{Παραγοντοποιώ το τριώνυμο:} x^2-2x=x(x-2)}}{=}$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt[3]{x+6}\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+\sqrt[3]{3x+2}\sqrt[3]{x+6}+\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2\right]}{x(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+\sqrt[3]{3x+2}\sqrt[3]{x+6}+\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2\right]}$$

$$\overset{(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)=\alpha^3-\beta^3}{=}\frac{\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^3}{x(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+\sqrt[3]{3x+2}\sqrt[3]{x+6}+\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2\right]}\overset{\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3=\alpha,\alpha\geq 0}{=}$$

$$\frac{3x+2-x-6}{x(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+\sqrt[3]{3x+2}\sqrt[3]{x+6}+\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2\right]}=$$

$$\frac{2x-4}{x(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+\sqrt[3]{3x+2}\sqrt[3]{x+6}+\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2\right]}=$$

$$\frac{2\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+\sqrt[3]{3x+2}\sqrt[3]{x+6}+\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2\right]}=$$

$$\frac{2}{x\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+\sqrt[3]{3x+2}\sqrt[3]{x+6}+\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2\right]}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2}{x\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+\sqrt[3]{3x+2}\sqrt[3]{x+6}+\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{1}{2\left[\left(\sqrt[3]{8}\right)^2+2\sqrt[3]{8}+4\right]}=\frac{1}{2\bullet 12}=\frac{1}{24}$$

4.

$\Delta$ίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+18}-\sqrt[3]{5x+12}}{x^2-3x}, x\in(0,3)\cup(3,+\infty)$

Να βρεθεί το όριο της $f$ στο σημείο $x_0=3$

Παρατηρώ οτι: $\lim_{x\to 3}\left(\sqrt[3]{x^2+18}-\sqrt[3]{5x+12}\right)=\lim_{x\to 3}\left(x^2-3x\right)=0$

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2+18}-\sqrt[3]{5x+12}}{x^2-3x}\overset{\substack{\text{Πολλαπλασίζω αριθμητή και}\\ \text{προνομαστή με } \left(\sqrt[3]{x^2+18}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+18}\sqrt[3]{5x+12}+\left(\sqrt[3]{5x+12}\right)^2\\ \text{Παραγοντοποιώ το τριώνυμο: } x^2-3x=x(x-3)}}{=}$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+18}-\sqrt[3]{5x+12}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^2+18}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+18}\sqrt[3]{5x+12}+\left(\sqrt[3]{5x+12}\right)^2\right]}{x(x-3)\left[\left(\sqrt[3]{x^2+18}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+18}\sqrt[3]{5x+12}+\left(\sqrt[3]{5x+12}\right)^2\right]}$$

$$\overset{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3}{=}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+18}\right)^3-\left(\sqrt[3]{5x+12}\right)^2}{x(x-3)\left[\left(\sqrt[3]{x^2+18}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+18}\sqrt[3]{5x+12}+\left(\sqrt[3]{5x+12}\right)^2\right]}\overset{\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3=\alpha,\alpha\geq 0}{=}$$

$$\frac{x^2+18-(5x+12)}{x(x-3)\left[\left(\sqrt[3]{x^2+18}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+18}\sqrt[3]{5x+12}+\left(\sqrt[3]{5x+12}\right)^2\right]}=$$

$$\frac{x^2-5x+6}{x(x-3)\left[\left(\sqrt[3]{x^2+18}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+18}\sqrt[3]{5x+12}+\left(\sqrt[3]{5x+12}\right)^2\right]}$$

Θεωρώ την δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2-5x+6=0(1)$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\bullet 1\bullet 6=25-24=1>0$

Επειδή $\Delta>0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση $(1)$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες:

$$\rho_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{matrix}\nearrow\frac{5+1}{2}=3\\ \searrow\frac{5-1}{2}=2\end{matrix}$$

$$x^2-5x+6\ \underset{\text{εξίσωσης } \alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \text{ όταν } \Delta>0}{\overset{\substack{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)\\ \rho_1,\rho_2:\text{Οι ρίζες της δευτεροβάθμιας}}}{=}}\ (x-3)(x-2)$$

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x(x-3)\left[\left(\sqrt[3]{x^2+18}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+18}\sqrt[3]{5x+12}+\left(\sqrt[3]{5x+12}\right)^2\right]}\overset{x^2-5x+6=(x-3)(x-2)}{=}$$

$$\frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{x\cancel{(x-3)}\left[\left(\sqrt[3]{x^2+18}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+18}\sqrt[3]{5x+12}+\left(\sqrt[3]{5x+12}\right)^2\right]}=$$

$$\frac{x-2}{x\left[\left(\sqrt[3]{x^2+18}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+18}\sqrt[3]{5x+12}+\left(\sqrt[3]{5x+12}\right)^2\right]}$$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x-2}{x\left[\left(\sqrt[3]{x^2+18}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+18}\sqrt[3]{5x+12}+\left(\sqrt[3]{5x+12}\right)^2\right]}=$$

$$\frac{1-2}{3\left[\left(\sqrt[3]{3^2+18}\right)^2+\sqrt[3]{3^2+18}\sqrt[3]{5\bullet3+12}+\left(\sqrt[3]{5\bullet3+12}\right)^2\right]}=\frac{-1}{3\bullet27}=-\frac{1}{81}$$

5.

| |
|---|
| $\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt[3]{x+7}}{\sqrt[3]{x}-1},\ x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$ |
| $\text{Να } \beta\rho\varepsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \tau o\ \acute{o}\rho\iota o\ \tau\eta\varsigma\ f\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0=3$ |

$$\Pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\acute{\omega}\ o\tau\iota:\lim_{x\to1}\left(\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt[3]{x+7}\right)=\lim_{x\to1}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)=0$$

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt[3]{x+7}}{\sqrt[3]{x}-1}\ \overset{\substack{\text{Πολλαπλασίζω αριθμητή και προνομαστή με}\\ \left(\sqrt[3]{x^2+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x+7}+\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2\\ \text{Πολλαπλασίζω αριθμητή και προνομαστή με}\\ \left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}}{=}$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt[3]{x+7}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^2+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x+7}+\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]\left[\left(\sqrt[3]{x^2+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x+7}+\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2\right]}$$

$$\overset{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3}{=} \ = \frac{\left[\left(\sqrt[3]{x^2+7}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^3\right]\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}{\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1\right]\left[\left(\sqrt[3]{x^2+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x+7}+\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2\right]}$$

$$\overset{\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3=\alpha,\alpha\geq 0}{=} \frac{\left[x^2+7-(x+7)\right]\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}{(x-1)\left[\left(\sqrt[3]{x^2+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x+7}+\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{\left(x^2-x\right)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}{(x-1)\left[\left(\sqrt[3]{x^2+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x+7}+\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{x\cancel{(x-1)}\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}{\cancel{(x-1)}\left[\left(\sqrt[3]{x^2+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x+7}+\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2\right]}=$$

$$\frac{x\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}{\left[\left(\sqrt[3]{x^2+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x+7}+\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2\right]}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}{\left[\left(\sqrt[3]{x^2+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x+7}+\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2\right]}=$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{1}\right)^2+\sqrt[3]{1}+1}{\left[\left(\sqrt[3]{1^2+7}\right)^2+\sqrt[3]{1^2+7}\sqrt[3]{1+7}+\left(\sqrt[3]{1+7}\right)^2\right]}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\bullet 4}=\frac{1}{4}$$

6.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}}, x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$

Να βρεθεί το όριο της $f$ στο σημείο $x_0=1$

$$\Pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\acute{\omega}\ o\tau\iota: \lim_{x\to1}\left(\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt[3]{2x+6}\right)=\lim_{x\to1}\left(\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}\right)=0$$

*Πολλαπλασίζω αριθμητή και προνομαστή με* $\left(\sqrt[3]{x^3+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{2x+6}+\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2$

*Πολλαπλασίζω αριθμητή και προνομαστή με* $\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}$

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt[3]{2x+6}}{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}}=$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt[3]{2x+6}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^3+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{2x+6}+\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2\right]\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^3+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{2x+6}+\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{\left[\left(\sqrt[3]{x^3+7}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2\right]\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}\right)}{\left[\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(2\sqrt{x}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt[3]{x^3+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{2x+6}+\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{\left[x^3+7-(2x+6)\right]\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}\right)}{\left[x+3-\left(2\sqrt{x}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt[3]{x^3+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{2x+6}+\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{\left(x^3-2x+1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}\right)}{(3-3x)\left[\left(\sqrt[3]{x^3+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{2x+6}+\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2\right]}=$$

$$=-\frac{\left(x^3-2x+1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}\right)}{3(x-1)\left[\left(\sqrt[3]{x^3+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{2x+6}+\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2\right]}$$

$$x^3-2x+1\overset{-2x=-x-x}{=}x^3-x-x+1=x\left(x^2-1\right)-(x-1)=x(x-1)(x+1)-(x-1)$$

$$=(x-1)\left[x(x+1)-1\right]=(x-1)\left(x^2+x-1\right)$$

$$f(x)=-\frac{\underbrace{\left(x^3-2x+1\right)}_{(x-1)\left(x^2+x-1\right)}\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}\right)}{3(x-1)\left[\left(\sqrt[3]{x^3+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{2x+6}+\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2\right]}=$$

$$-\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}\right)}{3\cancel{(x-1)}\left[\left(\sqrt[3]{x^3+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{2x+6}+\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2\right]}=$$

$$-\frac{\left(x^2+x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}\right)}{3\left[\left(\sqrt[3]{x^3+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{2x+6}+\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2\right]}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}\right)}{3\left[\left(\sqrt[3]{x^3+7}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{2x+6}+\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2\right]}=$$

$$-\frac{\left(1^2+1-1\right)\left(\sqrt{1+3}+2\sqrt{1}\right)}{3\left[\left(\sqrt[3]{1^3+7}\right)^2+\sqrt[3]{1^2+7}\sqrt[3]{2\bullet 1+6}+\left(\sqrt[3]{2\bullet 1+6}\right)^2\right]}=-\frac{4}{3\bullet 12}=-\frac{1}{3\bullet 3}=-\frac{1}{9}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

$\Delta$ίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}, x\in[0,8)\cup(8,+\infty)$

Να βρεθεί το όριο της $f$ στο σημείο $x_0=8$

2.

$\Delta$ίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-3}{x^2-27x}, x\in(0,27)\cup(27,+\infty)$

Να βρεθεί το όριο της $f$ στο σημείο $x_0=27$

3.

$\Delta$ίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{8x+3}-\sqrt[3]{x+24}}{x^2-3x}, x\in(0,3)\cup(3,+\infty)$

Να βρεθεί το όριο της $f$ στο σημείο $x_0=3$

4.

$\Delta$ίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+23}-\sqrt[3]{9x+9}}{x^2-2x}, x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$

Να βρεθεί το όριο της $f$ στο σημείο $x_0=2$

5.

$\Delta$ίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+9}-\sqrt[3]{8x+3}}{\sqrt[3]{x^2+18}-3}, x\in[0,3)\cup(3,+\infty)$

Να βρεθεί το όριο της $f$ στο σημείο $x_0=3$

6.

$\Delta$ίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{3x^3+5}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{x^2+8}-\sqrt{5x+4}}, x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$

Να βρεθεί το όριο της $f$ στο σημείο $x_0=1$