ΟΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Αν α,β>0 με α<β να αποδείξετε ότι : $e^{\alpha} < \dfrac{e^{\alpha} - e^{\beta}}{\alpha - \beta} < e^{\beta}$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = e^x$

$f'(x) = (e^x)' = e^x$

$\left.\begin{array}{l}\text{I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha,\beta] \\ \text{II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (\alpha,\beta)\end{array}\right\}$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [α,β].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξϵ(α,β) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha} = e^{\xi}$$

$$\xi \in (\alpha,\beta) \Longrightarrow \alpha < \xi < \beta \Longrightarrow e^{\alpha} < e^{\xi} < e^{\beta} \Longrightarrow e^{\alpha} < f'(\xi) < e^{\beta} \Longrightarrow$$

$$e^{\alpha} < \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha} < e^{\beta} \Longrightarrow e^{\alpha} < \frac{-(e^{\alpha} - e^{\beta})}{-(\alpha - \beta)} < e^{\beta} \Longrightarrow e^{\alpha} < \frac{e^{\alpha} - e^{\beta}}{\alpha - \beta} < e^{\beta}$$

2.

Αν α,β>0 με α<β να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\alpha - \beta}{\alpha} < \ln\alpha - \ln\beta < \dfrac{\alpha - \beta}{\beta}$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = \ln x, x > 0$

$f'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$\left.\begin{array}{l}\text{I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha,\beta] \\ \text{II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (\alpha,\beta)\end{array}\right\}$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [α,β].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξϵ(α,β) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{ln\beta - ln\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\xi}$$

$$\xi \in (\alpha,\beta) \Longrightarrow \alpha<\xi<\beta \Longrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{\beta} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\beta} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\alpha} \Longrightarrow \frac{1}{\beta} < f'(\xi) < \frac{1}{\alpha} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\beta} < \frac{ln\beta - ln\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha} \Longrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{-(ln\alpha - ln\beta)}{-(\alpha - \beta)} < \frac{1}{\alpha} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\beta} < \frac{ln\alpha - ln\beta}{\alpha - \beta} < \frac{1}{\alpha} \Longrightarrow (\alpha<\beta \text{ ή } \alpha-\beta<0)$$

$$(\alpha-\beta)\frac{1}{\beta} > (\alpha-\beta)\frac{ln\alpha - ln\beta}{\alpha - \beta} > (\alpha-\beta)\frac{1}{\alpha} \Longrightarrow$$

$$\frac{\alpha-\beta}{\beta} > ln\alpha - ln\beta > \frac{\alpha-\beta}{\alpha} \Longrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\alpha} < ln\alpha - ln\beta < \frac{\alpha-\beta}{\beta}$$

3.

Αν α,β>0 με α<β και ν∈IN με ν>1να αποδείξετε ότι :

$\nu \beta^{\nu-1} < \beta^\nu - \alpha^\nu < \nu \alpha^{\nu-1}$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = x^\nu, x>0$

$f'(x) = (x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$

I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]

II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [α,β].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\beta^{\nu} - \alpha^{\nu}}{\beta - \alpha} = \nu\xi^{\nu-1}$$

$$\xi \in (\alpha,\beta) \Longrightarrow \alpha^{\nu-1} < \xi^{\nu-1} < \beta^{\nu-1} \Longrightarrow \nu\,\alpha^{\nu-1} < \nu\xi^{\nu-1} < \nu\,\beta^{\nu-1} \Longrightarrow$$

$$\nu\,\alpha^{\nu-1} < f'(\xi) < \nu\,\beta^{\nu-1} \Longrightarrow \nu\,\alpha^{\nu-1} < \frac{\beta^{\nu} - \alpha^{\nu}}{\beta - \alpha} < \nu\,\beta^{\nu-1} \Longrightarrow$$

$$\nu\,\alpha^{\nu-1} < \frac{\beta^{\nu} - \alpha^{\nu}}{\beta - \alpha} < \nu\,\beta^{\nu-1} \Longrightarrow \nu\,\alpha^{\nu-1} < \frac{-(\alpha^{\nu} - \beta^{\nu})}{-(\alpha - \beta)} < \nu\,\beta^{\nu-1}$$

$$\nu\,\alpha^{\nu-1} < \frac{\alpha^{\nu} - \beta^{\nu}}{\alpha - \beta} < \nu\,\alpha^{\nu-1} \Longrightarrow \quad (\alpha<\beta \text{ ή } \alpha-\beta<0)$$

$$(\alpha-\beta)\,\nu\,\alpha^{\nu-1} > (\alpha-\beta)\frac{\alpha^{\nu} - \beta^{\nu}}{\alpha - \beta} > (\alpha-\beta)\,\nu\,\beta^{\nu-1} \Longrightarrow$$

$$(\alpha-\beta)\nu\alpha^{\nu-1} > \alpha^{\nu} - \beta^{\nu} > (\alpha-\beta)\nu\beta^{\nu-1} \Longrightarrow$$

$$(\alpha-\beta)\nu\beta^{\nu-1} < \alpha^{\nu} - \beta^{\nu} < (\alpha-\beta)\nu\alpha^{\nu-1}$$

4.

Αν $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι : $\frac{\alpha - \beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} < \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta < \frac{\alpha - \beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$f'(x) = (\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Ι) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]

ΙΙ) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [α,β].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξϵ(α,β) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\varepsilon\varphi\beta - \varepsilon\varphi\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi}$$

$$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha,\sigma\upsilon\nu\beta,\sigma\upsilon\nu\xi>0$$

Η συνάρτηση συνx είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\xi \in (\alpha,\beta) \Longrightarrow \alpha<\xi<\beta \Longrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha>\sigma\upsilon\nu\xi<\sigma\upsilon\nu\beta \Longrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\beta<\sigma\upsilon\nu\xi<\sigma\upsilon\nu\alpha \Longrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\beta<\sigma\upsilon\nu^2\xi<\sigma\upsilon\nu^2\alpha \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} > \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi} > \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} \Longrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} < f'(\xi) < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} \Longrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} < \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} < \frac{-(\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta)}{-(\alpha - \beta)} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} < \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{\alpha - \beta} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} \Longrightarrow (\alpha<\beta \text{ ή } \alpha-\beta<0)$$

$$(\alpha-\beta)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} > (\alpha-\beta)\frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{\alpha - \beta} > (\alpha-\beta)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} \Longrightarrow$$

$$\frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} > \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta > \frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} \Longrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} < \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta < \frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$$

5.

Αν $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\alpha-\beta}{\eta\mu^2\alpha} < \sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha < \dfrac{\alpha-\beta}{\eta\mu^2\beta}$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x, x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$

$$f'(x) = (\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha,\beta] \\ \text{II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (\alpha,\beta)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα [α,β].Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha}{\beta-\alpha} = -\frac{1}{\eta\mu^2\xi}$$

$$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \eta\mu\alpha, \eta\mu\beta, \eta\mu\xi > 0$$

Η συνάρτηση ημx είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, \dfrac{\pi}{2})$

$$\xi \in (\alpha,\beta) \Longrightarrow \alpha<\xi<\beta \Longrightarrow \eta\mu\alpha<\eta\mu\xi<\eta\mu\beta \Longrightarrow$$

$$\eta\mu^2\alpha<\eta\mu^2\xi<\eta\mu^2\beta \Longrightarrow \frac{1}{\eta\mu^2\alpha} > \frac{1}{\eta\mu^2\xi} > \frac{1}{\eta\mu^2\beta} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\eta\mu^2\beta} < \frac{1}{\eta\mu^2\xi} < \frac{1}{\eta\mu^2\alpha} \Longrightarrow -\frac{1}{\eta\mu^2\beta} > -\frac{1}{\eta\mu^2\xi} > -\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} \Longrightarrow$$

$$-\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} < -\frac{1}{\eta\mu^2\xi} < -\frac{1}{\eta\mu^2\beta} \Longrightarrow -\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} < f'(\xi) < -\frac{1}{\eta\mu^2\beta} \Longrightarrow$$

$$-\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} < \frac{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}{\beta-\alpha} < -\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} \Longrightarrow -\frac{1}{\eta\mu^2\beta} < \frac{-(\sigma\varphi\alpha-\sigma\varphi\beta)}{-(\alpha-\beta)} < -\frac{1}{\eta\mu^2\beta}$$

$$-\frac{1}{ημ^2α} < \frac{σφα - σφβ}{α-β} < -\frac{1}{ημ^2β} \Longrightarrow (α<β \text{ ή } α-β<0)$$

$$-(α-β)\frac{1}{ημ^2α} > (α-β)\frac{σφα - σφβ}{α-β} > -(α-β)\frac{1}{ημ^2β} \Longrightarrow$$

$$-\frac{α-β}{ημ^2β} < σφα - σφβ < -\frac{α-β}{ημ^2α} \Longrightarrow$$

$$-1\left(-\frac{α-β}{ημ^2β}\right) > -1(σφα - σφβ) < -1\left(-\frac{α-β}{ημ^2α}\right) \Longrightarrow$$

$$\frac{α-β}{ημ^2β} > σφβ - σφα > \frac{α-β}{ημ^2α} \Longrightarrow \frac{α-β}{ημ^2α} < σφβ - σφα < \frac{α-β}{ημ^2β}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν α,β>0 με 2α<β να αποδείξετε ότι : $e^{2α} < \frac{e^{2α} - e^{β}}{2α - β} < e^{β}$

2.

Αν α,β>0 με 3α<β να αποδείξετε ότι : $\frac{3α - β}{3α} < \ln 3α - \ln β < \frac{3α - β}{β}$

3.

Αν α,β>0 με α<β και ν∈IN με ν>1να αποδείξετε ότι :

$2ν\,(β-α)\,α^{2ν-1} < β^{2ν} - α^{2ν} < 2ν\,(β-α)\,β^{2ν-1}$

4.

Αν $0<2α<β<\frac{π}{2}$ να αποδείξετε ότι : $\frac{2α - β}{συν^2β} < εφ2α - εφβ < \frac{2α - β}{συν^2 2α}$

5.

Αν $0<2α<β<\frac{π}{2}$ να αποδείξετε ότι : $\frac{2α - β}{ημ^2 2α} < σφβ - σφ2α < \frac{2α - β}{ημ^2β}$