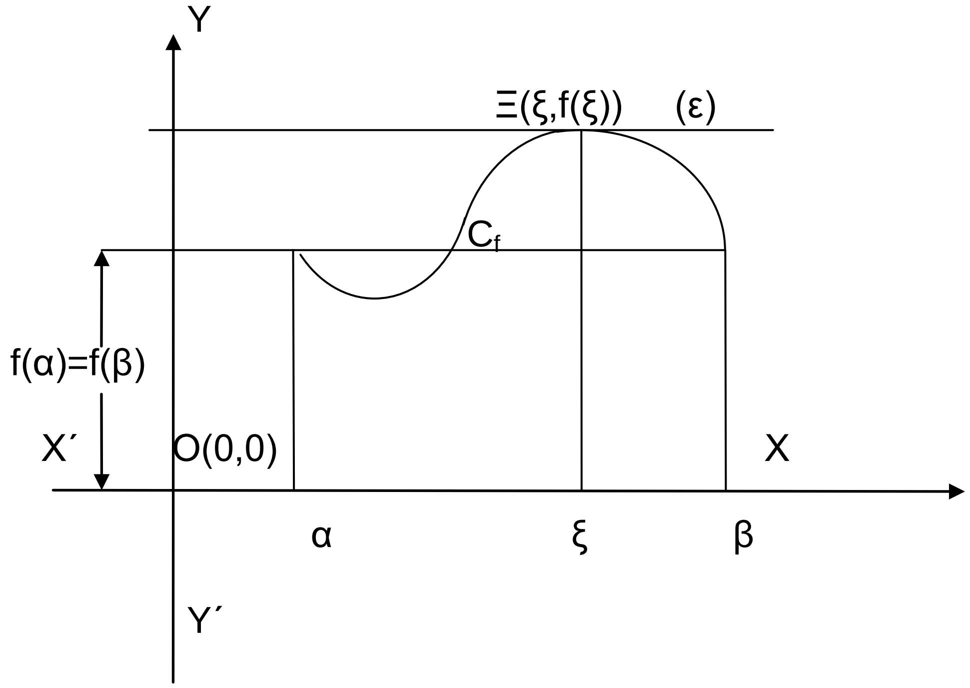
# <u>ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΝΩ ΣΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ROLL-ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ</u>

## Το θεώρημα του Rolle

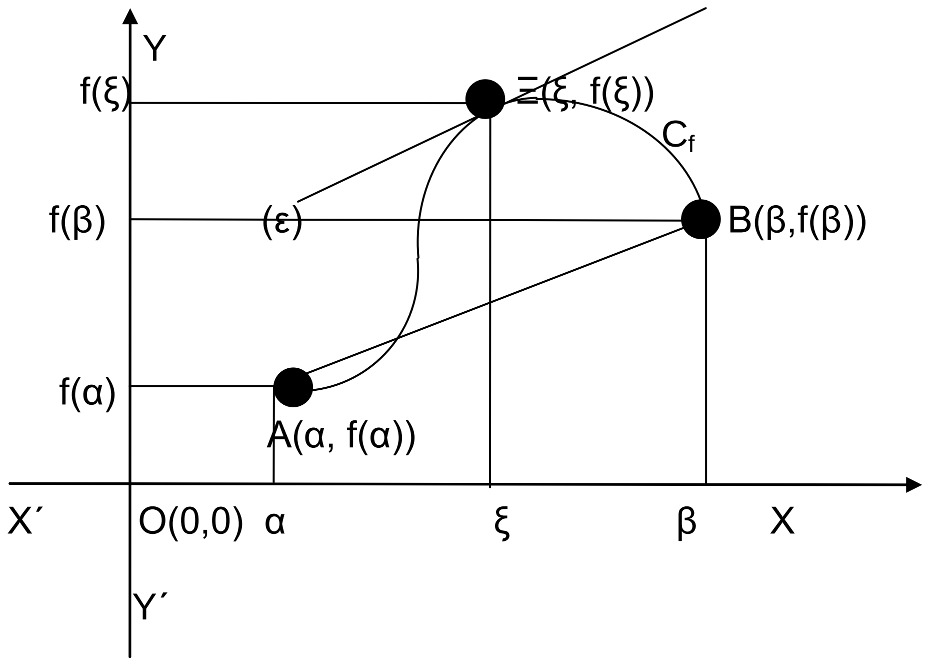



Αν:
- I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]
- II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)
- II) f(α)= f(β)

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε f΄(ξ)= 0

<u>Γεωμετρική ερμηνεία :</u>
Αν (ε) η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο επαφής Ξ(ξ,f(ξ)) τότε θα ισχύει $\lambda_\varepsilon$ = f΄(ξ)= 0.Έχω $\lambda_{X΄X}$ =0.Άρα η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο επαφής Ξ(ξ,f(ξ)) είναι παράλληλη με τον άξονα Χ΄Χγιατί $\lambda_\varepsilon$= $\lambda_{X΄X}$
*Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της $C_f$ στο οποίο η εφαπτομένη στη $C_f$ να είναι παράλληλη με τον άξονα Χ΄Χ*

## Το θεώρημα της μέσης τιμής




Αν: I) f συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]

II) f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία :</u>
Αν (ε) η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο επαφής Ξ(ξ,f(ξ)) τότε θα ισχύει $\lambda_\varepsilon = f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Η ευθεία ΑΒ έχει στντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB} =\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Άρα η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο επαφής Ξ(ξ,f(ξ)) είναι παράλληλη με την ευθεία ΑΒ γιατί $\lambda_\varepsilon= \lambda_{AB}$

*Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της $C_f$ στο οποίο η εφαπτομένη στη $C_f$ να είναι παράλληλη με την ευθεία ΑΒ*

1.

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως (Σ) ή (Λ)

I)Αν για την συνάρτηση f ισχύουν οι προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στα διαστήματα $A_1$ και $A_2$ τότε ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής στην ένωση των διαστημάτων $A_1$ και $A_2$

II)

$\text{Αν η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [1,2]$ $\text{και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (1,2) \text{ με } f(1)=4 \text{ και }$ $f(2)=3 \text{ τότε υπάρχει } \xi \in (1,2) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi)=-1$

III)

$\text{Αν η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστο διάστημα } [0,1]$ $\text{και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα } (0,1) \text{ με } f(0)=f(1)$ $\text{τότε υπάρχει μοναδικό } \xi \in (0,1) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi)=0$

$IV)\text{Η εξίσωση } x^{2003}+2x^{201}+x^{15}+32x=0 \text{ έχει μοναδική ρίζα}$ $\text{την } x=0$

$V)\text{Αν η συνάρτηση } f \text{ ορισμένη στο } \mathbb{R} \text{ είναι συνεχής στο}$ $\text{διάστημα } (0,2] \text{ και παραγωγίσιμη στο διάστημα } (0,2)$ $\text{με } f(0)=f(2) \text{ τότε υπάρχει } \xi \in (0,1) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi)=0$

$VI)\text{Αν η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με}$ $f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ τότε η εξίσωση } f(x)=0 \text{ έχει το πολύ}$ $\text{μια ρίζα}$

I)Το θεώρημα της μέσης τιμής εφαρμόζεται μονο για διάστημα.Αν τα $A_1$ και $A_2$ είναι διαστήμα δεν έπεται οτι και η ένωση των διαστημάτων τους είναι διάστημα.Άρα(I)→(Λ)

$$\text{II)}\begin{cases}\text{I)Η } \textit{συνάρτηση } f \textit{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [1,2] \\ \text{II)Η } \textit{συνάρτηση } f \textit{ είναι παραγωγίσιμη στο} \\ \textit{ανοικτό διάστημα } (1,2)\end{cases}$$

*Άρα η συνάρτηση* $f$ *ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα* $[1,2]$

Ο*πότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi \in (1,2)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $f'(\xi) = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(\xi) = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} \\ \xi \in (1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(\xi) = \dfrac{3-4}{1} \\ \xi \in (1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(\xi) = -1 \\ \xi \in (1,2) \end{array}\right\}$$

$(\text{II}) \to (\Sigma)$

III)

$$\begin{cases}\text{I)Α}\textit{ν η συνάρτηση } f \textit{ είναι συνεχής στο κλειστο διάστημα } [0,1] \\ \text{II)Α}\textit{ν η συνάρτηση } f \textit{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό} \\ \textit{διάστημα } (0,1) \\ \text{III) } f(0) = f(1)\end{cases}$$

Τ*ότε η συνάρτηση* $f$ *ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα* $[0,1]$.Ο*πότε τότε υπάρχει* $\xi \in (0,1)$ *τέτοιο ώστε* $f'(\xi) = 0$

Τ*ο* $\xi$ *δεν είναι κατα ανάγκη μοναδικό*!!!

$(\text{III}) \to (\Lambda)$

$IV)Έστω\ η\ εξίσωση: x^{2003}+2x^{201}+x^{15}+32x=0(1)$

$\text{Α}ν\ x=0\ θα\ έχω: x^{2003}+2x^{201}+x^{15}+32x=$

$=0^{2003}+2\bullet 0^{201}+0^{15}+32\bullet 0=0$

$Άρα\ το\ 0\ είναι\ λύση\ της\ εξίσωσης\ (1)$

$Έστω\ η\ εξίσωση\ (1)\ έχει\ δυο\ διακεκριμένες\ λύσεις\ \rho_1,\rho_2$

$με\ \rho_1<\rho_2.\text{Τ}ότε\ θα\ έχω:$

$\rho_1^{2003}+2\rho_1^{201}+\rho_1^{15}+32\rho_1=\rho_2^{2003}+2\rho_2^{201}+\rho_2^{15}+32\rho_2=0$

$\Theta εωρώ\ την\ συνάρτηση\ f(x)=x^{2003}+2x^{201}+x^{15}+32x$

$f'(x)=(x^{2003}+2x^{201}+x^{15}+32x)'=(x^{2003})'+2(x^{201})'+(x^{15})'+32(x)'=$

$=2003x^{2002}+2\bullet 201x^{200}+15x^{14}+32=2003x^{2002}+402x^{200}+15x^{14}+32$

$$\left.\begin{array}{l} x^{2002}\geq 0 \\ x^{200}\geq 0 \\ x^{14}\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2003x^{2002}\geq 0 \\ 402x^{200}\geq 0 \\ 15x^{14}\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2003x^{2002}+402x^{200}+15x^{14}\geq 0 \Rightarrow$$

$2003x^{2002}+402x^{200}+15x^{14}+32\geq 32>0\Rightarrow$

$2003x^{2002}+402x^{200}+15x^{14}+32>0\Rightarrow f'(x)>0$

$$\begin{cases} \text{I)Η}\ συνάρτηση\ f\ είναι\ συνεχής\ στο\ κλειστό\ διάστημα\ [\rho_1,\rho_2] \\ \text{II)Η}\ συνάρτηση\ f\ είναι\ παραγωγίσιμη\ στο \\ ανοικτό\ διάστημα\ (\rho_1,\rho_2) \\ \text{III)}\ f(\rho_1)=f(\rho_2) \end{cases}$$

$Άρα\ η\ συνάρτηση\ f\ ικανοποιεί\ τις\ προυποθέσεις\ του$

$θεωρήματος\ του\ Rolle\ στο\ κλειστό\ διάστημα\ [\rho_1,\rho_2]$

$\text{Ο}πότε\ θα\ υπάρχει\ ένα\ τουλάχιστον\ \xi\in(\rho_1,\rho_2)\ τέτοιο\ ώστε\ να$

$ισχύει\ f'(\xi)=0.Άτοπο\ γιατι\ f'(x)>0\ για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}$

$IV)$Το *θεώρημα του Rolle*

$$\begin{cases} \text{I)Η } \textit{συνάρτηση } f \textit{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha,\beta] \\ \text{II)Η } \textit{συνάρτηση } f \textit{ είναι παραγωγίσιμη στο} \\ \textit{ανοικτό διάστημα } (\alpha,\beta) \\ \text{III) } f(\alpha)=f(\beta) \end{cases}$$

Ο*πότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(\alpha,\beta)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $f'(\xi)=0.$

Η *συνάρτηση* $f$ *δενικανοποίει τις προυποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο κλειστό διάστημα* $[0,2]$.Ο*πότε* $(IV)\rightarrow(\Lambda)$

$VI)$*Έστω η εξίσωση* $f(x)=0$ *έχει δυο διακεκριμένες λύσεις* $\rho_1,\rho_2$ *με* $\rho_1<\rho_2$.Τ*ότε θα έχω*: $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$

$$\begin{cases} \text{I)Η } \textit{συνάρτηση } f \textit{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\rho_1,\rho_2] \\ \text{II)Η } \textit{συνάρτηση } f \textit{ είναι παραγωγίσιμη στο} \\ \textit{ανοικτό διάστημα } (\rho_1,\rho_2) \\ \text{III) } f(\rho_1)=f(\rho_2) \end{cases}$$

*Άρα η συνάρτηση* $f$ *ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα* $[\rho_1,\rho_2]$

Ο*πότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $f'(\xi)=0$.*Άτοπο γιατί* $f'(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$

*Άρα η εξίσωση* $f(x)=0$ *έχει το πολύ μια ρίζα*

Ο*πότε*: $(VI)\rightarrow(\Sigma)$

2.

Αντιστοιχείστε τα όρια της στήλης Α με ποσά που είναι ίσα με αυτά και βρίσκονται στην στήλη Β

| Στήλη Α | Στήλη Β |
|---|---|
| 1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}$ | Α)0 |
| 2) $\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$ | Β)1 |
| 3) $\lim\limits_{x\to \pi^+}\dfrac{\eta\mu x}{x-\pi}$ | Γ)-1 |
| 4) $\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{x^2\ln x-e^2}{x-e}$ | Δ) $3e$ |
| | Ε)1/8 |
| | ΣΤ) $\dfrac{1}{e}$ |

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\, f(t)=e^t$

$f'(t)=(e^t)'=e^t$

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ x>0$

$$\begin{cases} \text{I)H } \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [0,x] \\ \omega\varsigma\ \varepsilon\kappa\theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\eta} \\ \text{II)H } \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ \alpha\nu o\iota\kappa\tau\acute{o} \\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ (0,x)\ \omega\varsigma\ \varepsilon\kappa\theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\eta} \end{cases}$$

*Άρα η συνάρτηση $f$ ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα* $[0,x]$

Ο*πότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(1,2)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $f'(\xi_x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$\begin{Bmatrix} f'(\xi_x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ \xi_x\in(0,x) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} e^{\xi_x}=\dfrac{e^x-1}{x} \\ \xi_x\in(0,x) \end{Bmatrix}$$

$0<\xi_x<x(1)$

$\lim\limits_{x\to0^+}0=\lim\limits_{x\to0^+}x=0(2)$

Α*πο τις σχέσεις* $(1),(2)$ *σύμφωνα με το κριτήριοπαρεμβολής θα έχω*: $\lim\limits_{x\to0^+}\xi_x=0$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{\xi_x\to0}e^{\xi_x}=1$

$(1)\to(\mathrm{B})$

$\Theta \varepsilon \omega \rho \acute{\omega}\ \tau \eta \nu\ \sigma \upsilon \nu \acute{\alpha} \rho \tau \eta \sigma \eta\, f(t) = \ln t, t \in (0, +\infty)$

$$f'(t) = (\ln t)' = \frac{1}{t}$$

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ x > e$

$$\begin{cases} \text{I)Η } \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau\text{o}\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [e,x] \\ \omega\varsigma\ \lambda o\gamma\alpha\rho\iota\theta\mu\iota\kappa\acute{\eta} \\ \text{II)Η } \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ \alpha\nu o\iota\kappa\tau\acute{o} \\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ (e,x)\ \omega\varsigma\ \lambda o\gamma\alpha\rho\iota\theta\mu\iota\kappa\acute{\eta} \end{cases}$$

*Άρα η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα* $[e,x]$

Ο*πότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi \in (1,2)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $f'(\xi_x) = \dfrac{f(x) - f(e)}{x - e}$

$$\begin{Bmatrix} f'(\xi_x) = \dfrac{f(x) - f(e)}{x - 0} \\ \xi_x \in (e,x) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\xi_x} = \dfrac{\ln x - \ln e}{x - e} \\ \xi_x \in (e,x) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\xi_x} = \dfrac{\ln x - 1}{x - e} \\ \xi_x \in (e,x) \end{Bmatrix}$$

$e < \xi_x < x (1)$

$$\lim_{x \to e^+} e = \lim_{x \to e^+} x = e (2)$$

Α*πο τις σχέσεις* $(1),(2)$ *σύμφωνα με το κριτήριοπαρεμβολής θα έχω*: $\lim\limits_{x \to e^+} \xi_x = e$

$$\lim_{x \to e^+} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \lim_{\xi_x \to e^+} \frac{1}{\xi_x} = \frac{1}{e}$$

$(2) \to (\Sigma\mathrm{T})$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\, f(t)=\eta\mu t$

$f'(t)=(\eta\mu t)'=\sigma\upsilon\nu t$

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ x>\pi$

$$\begin{cases} \text{I)H } \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [\pi,x] \\ \omega\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\omega\nu o\mu\varepsilon\tau\rho\iota\kappa\acute{\eta} \\ \text{II)H } \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ \alpha\nu o\iota\kappa\tau\acute{o} \\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ (\pi,x)\ \omega\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\omega\nu o\mu\varepsilon\tau\rho\iota\kappa\acute{\eta} \end{cases}$$

*Άρα η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα* $[\pi,x]$

Ο*πότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi_x\in(\pi,x)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $f'(\xi_x)=\dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$

$$\begin{Bmatrix} f'(\xi_x)=\dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} \\ \xi_x\in(\pi,x) \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} \sigma\upsilon\nu\xi_x=\dfrac{\eta\mu x-\eta\mu\pi}{x-\pi} \\ \xi_x\in(\pi,x) \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} \sigma\upsilon\nu\xi=\dfrac{\eta\mu x}{x-\pi} \\ \xi_x\in(e,x) \end{Bmatrix}$$

$\pi<\xi_x<x(1)$

$\lim\limits_{x\to\pi^+}\pi=\lim\limits_{x\to\pi^+}x=\pi(2)$

Α*πο τις σχέσεις* $(1),(2)$ *σύμφωνα με το κριτήριοπαρεμβολής θα έχω:* $\lim\limits_{x\to e^+}\xi_x=e$

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\eta\mu x}{x-\pi}=\lim_{\xi_x\to\pi^+}\sigma\upsilon\nu\xi_x=-1$$

$(3)\to(\Gamma)$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta f(t)=t^2\ln t, t\in(0,+\infty)$

$$f'(t)=(t^2\ln t)'=(t^2)'\ln t+t^2(\ln t)'=2t\ln t+t^2\frac{1}{t}=2t\ln t+t$$

*Έστω* $x>e$

$$\begin{cases}\text{I)Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [e,x]\\ \text{ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων}\\ \text{II)Η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό}\\ \text{διάστημα } (e,x) \text{ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων}\end{cases}$$

*Άρα η συνάρτηση* $f$ *ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα* $[e,x]$

Ο*πότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(1,2)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $f'(\xi_x)=\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(\xi_x)=\dfrac{f(x)-f(e)}{x-0}\\ \xi_x\in(e,x)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2\xi_x\ln\xi_x+\xi_x=\dfrac{x^2\ln x-e^2\ln e}{x-e}\\ \xi_x\in(e,x)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}2\xi_x\ln\xi_x+\xi_x=\dfrac{x^2\ln x-e^2}{x-e}\\ \xi_x\in(e,x)\end{array}\right\}$$

$e<\xi_x<x(1)$

$\lim\limits_{x\to e^+}e=\lim\limits_{x\to e^+}x=e(2)$

Α*πο τις σχέσεις* $(1),(2)$ *σύμφωνα με το κριτήριοπαρεμβολής θα έχω*: $\lim\limits_{x\to e^+}\xi_x=e$

$$\lim_{x\to e^+}\frac{x^2\ln x-e^2}{x-e}=\lim_{\xi_x\to e^+}2\xi_x\ln\xi_x+\xi_x=2e\ln e+e=3e$$

$(2)\to(\Delta)$

## ΕΝΑ ΠΡΩΤΟ ΘΕΜΑ

$(\mathrm{A}1)\,\mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

$(\mathrm{A}2)\,\mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

$(\mathrm{B})$ Να χαρακτηρίσετε σωστή $(\Sigma)$ ή λανθασμένη $(\Lambda)$ τις παρακάτω προτάσεις

$(\mathrm{B}1)$ Αν για τη συνάρτηση $f$ ορίζεται η εφαπτομένη της $C_f$ στο $x_0$ τότε δεν είναι συνεχής στο $x_0$

$(\mathrm{B}2)$ Αν η συνάρτηση είναι $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ τότε ο άξονας $x'x$ εφάπτεται της $C_f$ στο $x_0=0$

$(\mathrm{B}3)$ Αν η συνάρτηση είναι $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ έχω $f'(\alpha)>0$ τότε η $f$ δεν έχει μέγιστη τιμή στην θέση $x_0=\alpha$

$(\mathrm{B}4)$ Αν η συνάρτηση είναι $f:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$ έχω $f'(\alpha)>0$ τότε η $f$ δεν έχει ελάχιστη τιμή στην θέση $x_0=\alpha$

$(\mathrm{B}5)$ Αν για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $\eta\mu x\le f(x)\le x$ τότε υπάρχει η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $x_0=0$

$(\Gamma)$ Η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $x_0$ διέρχεται απο την αρχή των αξόνων. Να αντιστοιχίσετε την συνάρτηση $f$ που βρίσκεται στην στήλη Α με το σημείο $x_0$ που βρίσκεται στην στήλη Β

| ΣΤΗΛΗ Α | ΣΤΗΛΗ Β |
|---|---|
| 1) $f(x)=x^2-5x+25$ | Α) $x_0=0$ |
| 2) $f(x)=x^3-2$ | Β) $x_0=1$ |
| 3) $f(x)=\eta\mu x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ | Γ) $x_0=\pm5$ |
| 4) $f(x)=e^x+x$ | Δ) $x_0=-2$ |
| | Ε) $x_0=-1$ |
| | ΣΤ) $x_0=5$ |