

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Έστω η συνάρτηση $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ (D_f : Το πεδίο ορισμού της f) και $x_0 \in D_f$

Αν υπάρχει το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός

τότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 και ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$f'(x_0)$: Η παράγωγος της f στο σημείο x_0

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 3$ με $f'(3) = 1$

να βρεθεί το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+9} - 3}{f(3+h) - f(3)}$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 3$ θα ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3) = 1$$

$$\frac{\sqrt{h+9} - 3}{f(3+h) - f(3)} = \frac{(\sqrt{h+9} - 3)(\sqrt{h+9} + 3)}{[f(3+h) - f(3)](\sqrt{h+9} + 3)} \quad (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

$$\frac{(\sqrt{h+9})^2 - 3^2}{[f(3+h) - f(3)](\sqrt{h+9} + 3)} = \frac{h + \cancel{9} - \cancel{9}}{[f(3+h) - f(3)](\sqrt{h+9} + 3)} \quad \begin{array}{l} \text{Διαιρώ τον αριθμητή και} \\ \text{τον παρονομαστή με το } h \end{array}$$

$$= \frac{\frac{h}{h}}{[f(3+h) - f(3)](\sqrt{h+9} + 3)} = \frac{1}{\frac{f(3+h) - f(3)}{h}(\sqrt{h+9} + 3)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+9} - 3}{f(3+h) - f(3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(3+h) - f(3)}{h}(\sqrt{h+9} + 3)} =$$

$$\frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}(\sqrt{h+9} + 3)} = \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} (\sqrt{h+9} + 3)} =$$

$$= \frac{1}{1 \cdot (\sqrt{9} + 3)} = \frac{1}{6}$$

2.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 2$

να βρεθεί το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{(h+5)^2 - 25}$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$ θα ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 2$$

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{(h+5)^2 - 25} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h^2 + 2 \cdot h \cdot 5 + 5^2 - 25} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h^2 + 10h + \cancel{25} - \cancel{25}} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h^2 + 10h} =$$

$$= \frac{f(1+h) - f(1)}{h(h+10)} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \cdot \frac{1}{h+10}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{(h+5)^2 - 25} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \cdot \frac{1}{h+10} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h+10} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2:2}{10:2} = \frac{1}{5}$$

3.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 5$ με $f'(5) = 8$

να βρεθεί το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{(h+1)^3 - 1}$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 5$ θα ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = f'(5) = 8$$

$$\frac{f(5+h) - f(5)}{(h+1)^3 - 1} \stackrel{(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 \cdot \beta + 3\alpha \cdot \beta^2 + \beta^3}{=} \frac{f(5+h) - f(5)}{h^3 + 3 \cdot h^2 \cdot 1 + 3 \cdot h \cdot 1^2 + 1^3} =$$

$$= \frac{f(5+h) - f(5)}{h^3 + 3h^2 + 3h + \cancel{1} - \cancel{1}} = \frac{f(5+h) - f(5)}{h(h^2 + 3h + 3)} = \frac{f(5+h) - f(5)}{h} \cdot \frac{1}{h^2 + 3h + 3}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{(h+1)^3 - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} \frac{1}{h^2 + 3h + 3} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2 + 3h + 3} = 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

4.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 1$
να βρεθεί το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-2h)}{h}$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$ θα ισχύει :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 1$$

$$\frac{f(1+2h) - f(1-2h)}{h} \stackrel{\text{Προσθαφαιρώ το } f(1)}{=} \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1-2h)}{h} =$$

$$2 \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1-2h)}{2h} = 2 \left(\frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} + \frac{f(1) - f(1-2h)}{2h} \right) =$$

$$2 \left[\frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} + \frac{-(f(1-2h) - f(1))}{2h} \right] =$$

$$2 \left[\frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} + \frac{(f(1-2h) - f(1))}{-2h} \right]$$

Θέτω : $w = 2h$

Εχ ω : $h \rightarrow 0 \Rightarrow w \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \stackrel{w=2h}{\stackrel{w \rightarrow 0}{=}} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(1+w) - f(1)}{w} = f'(1) = 1$$

Θέτω : $t = -2h$

Εχ ω : $h \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} \stackrel{t=-2h}{\stackrel{t \rightarrow 0}{=}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = f'(1) = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-2h)}{h} = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} + \frac{(f(1-2h) - f(1))}{-2h} \right] =$$

$$2 \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(1-2h) - f(1))}{-2h} \right] = 2(1+1) = 4$$

5.

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ και ισχύει

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)}{h} = 5. \text{Να βρεθούν:}$$

(I) Η τιμή $f(2)$ (II) Η παράγωγος της f στο σημείο $x_0 = 2$

$$(III) \text{Το όριο } A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + \sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 4}$$

(I) Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

(II) Θέτω: $t = 2 + h$

$$\text{Έχω: } t = 2 + h \Leftrightarrow h = t - 2$$

$$\text{Έχω: } h \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)}{h} = 5 \xrightarrow{\substack{t=2+h \\ h=t-2 \\ t \rightarrow 2}} \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t)}{t-2} = 5$$

$$\text{Θεωρώ την συνάρτηση } g(t) = \frac{f(t)}{t-2}, t \neq 2$$

$$\text{Τότε θα έχω: } \lim_{t \rightarrow 2} g(t) = 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(t) = \frac{f(t)}{t-2} \\ t \neq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(t) = g(t)(t-2) \\ t \neq 2 \end{array} \right\}$$

$$\text{Οπότε: } \lim_{t \rightarrow 2} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2} g(t)(t-2) = \lim_{t \rightarrow 2} g(t) \lim_{t \rightarrow 2} (t-2) = 5 \cdot 0 = 0$$

$$\text{Έχω: } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)}{h} = 5 \xrightarrow{f(2)=0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 5$$

Επειδή υπάρχει το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$ και ισχύει

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 5$$

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad \frac{f(x) + \sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 4} &= \frac{g(x)(x-2) + \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}}{x^2 - 2^2} = \\ &= \frac{g(x)(x-2) + \frac{(\sqrt{x^2 + 5})^2 - 3^2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3}}{(x-2)(x+2)} = \frac{g(x)(x-2) + \frac{x^2 - 4}{(x-2)(x+2)}}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \frac{g(x)(x-2) + \frac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{x^2 + 5} + 3}}{(x-2)(x+2)} = \frac{\cancel{(x-2)} \left(g(x) + \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} \right)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{g(x) + \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3}}{x+2} \\ \text{A} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + \sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) + \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3}}{x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} g(x) + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3}}{\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)} = \\ &= \frac{5 + \frac{4}{6}}{4} = \frac{5 + \frac{2}{3}}{4} = \frac{\frac{15}{3} + \frac{2}{3}}{4} = \frac{\frac{17}{3}}{4} = \frac{17}{12} \end{aligned}$$

6.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 4$ με $f'(4) \neq 0$ να βρεθεί το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+3h) - f(4-2h)}{f(4+5h) - f(4-4h)}$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 4$ θα ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = f'(4)$$

$$\frac{f(4+3h) - f(4-2h)}{f(4+5h) - f(4-4h)} \stackrel{\text{Προσθαφαιρώ το } f(4)}{=} \frac{f(4+3h) - f(4) + f(4) - f(4-2h)}{f(4+5h) - f(4) + f(4) - f(4-4h)} =$$

$$= \frac{f(4+3h) - f(4) + \underbrace{f(4) - f(4-2h)}_{-[f(4-2h) - f(4)]}}{f(4+5h) - f(4) + \underbrace{f(4) - f(4-4h)}_{-[f(4-4h) - f(4)]}} =$$

$$\frac{f(4+3h) - f(4) - [f(4-2h) - f(4)]}{f(4+5h) - f(4) - [f(4-4h) - f(4)]} \stackrel{\text{Διαιρώ τον αριθμητή και τον παρονομαστή με το } h}{=} =$$

$$\frac{f(4+3h) - f(4) - [f(4-2h) - f(4)]}{f(4+5h) - f(4) - [f(4-4h) - f(4)]} =$$

$$\frac{\frac{h}{f(4+5h) - f(4) - [f(4-4h) - f(4)]}}{h} =$$

$$\frac{\frac{f(4+3h) - f(4)}{h} + \frac{-[f(4-2h) - f(4)]}{h}}{\frac{f(4+5h) - f(4)}{h} + \frac{-[f(4-4h) - f(4)]}{h}} =$$

$$\frac{\frac{f(4+3h) - f(4)}{h} + \frac{f(4-2h) - f(4)}{-h}}{\frac{f(4+5h) - f(4)}{h} + \frac{f(4-4h) - f(4)}{-h}} =$$

$$3 \frac{\frac{f(4+3h) - f(4)}{3h} + 2 \frac{f(4-2h) - f(4)}{-2h}}{5 \frac{f(4+5h) - f(4)}{5h} + 4 \frac{f(4-4h) - f(4)}{-4h}}$$

Θέτω: $t = 3h$

Έχω: $h \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+3h) - f(4)}{3h} \stackrel{t=3h}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(4+t) - f(4)}{t} = f'(4)$$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega : w = -2h$$

$$E\chi\omega : h \rightarrow 0 \Rightarrow w \rightarrow 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4-2h) - f(4)}{-2h} \stackrel{w=-2h}{w \rightarrow 0} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(4+w) - f(4)}{w} = f'(4)$$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega : r = 5h$$

$$E\chi\omega : h \rightarrow 0 \Rightarrow r \rightarrow 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+5h) - f(4)}{5h} \stackrel{r=5h}{r \rightarrow 0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(4+r) - f(4)}{r} = f'(4)$$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega : s = -4h$$

$$E\chi\omega : h \rightarrow 0 \Rightarrow s \rightarrow 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4-4h) - f(4)}{-4h} \stackrel{s=-4h}{s \rightarrow 0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(4+s) - f(4)}{s} = f'(4)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+3h) - f(4-2h)}{f(4+5h) - f(4-4h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \frac{f(4+3h) - f(4)}{3h} + 2 \frac{f(4-2h) - f(4)}{-2h}}{5 \frac{f(4+5h) - f(4)}{5h} + 4 \frac{f(4-4h) - f(4)}{-4h}} =$$

$$\frac{3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+3h) - f(4)}{3h} + 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4-2h) - f(4)}{-2h}}{5 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+5h) - f(4)}{5h} + 4 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4-4h) - f(4)}{-4h}} =$$

$$\frac{\underbrace{3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+3h) - f(4)}{3h}}_{f'(4)} + \underbrace{2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4-2h) - f(4)}{-2h}}_{f'(4)}}{\underbrace{5 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+5h) - f(4)}{5h}}_{f'(4)} + \underbrace{4 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4-4h) - f(4)}{-4h}}_{f'(4)}} = \frac{3f'(4) + 2f'(4)}{5f'(4) + 4f'(4)} =$$

$$= \frac{\cancel{5f'(4)}}{\cancel{9f'(4)}} = \frac{5}{9}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$ με $f'(2) = 1$

να βρεθεί το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+4} - 2}{f(2+h) - f(2)}$

2.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 5$ με $f'(5) = 3$

να βρεθεί το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{(h+4)^2 - 16}$

3.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 8$ με $f'(8) = 5$

να βρεθεί το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(8+h) - f(8)}{(h+2)^3 - 8}$

4.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 5$ με $f'(5) = 1$

να βρεθεί το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+3h) - f(5-4h)}{h}$

5.

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$ και ισχύει

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h} = 2$. Να βρεθούν :

(I) Η τιμή $f(1)$

(II) Η παράγωγος της f στο σημείο $x_0 = 1$

(III) Το όριο $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \sqrt{2x^2 + 7} - 3}{x^2 - 1}$

6.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$ με $f'(2) \neq 0$

να αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+7h) - f(2-3h)}{f(2+6h) - f(2-4h)} = 1$

7.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$ με $f'(1) \neq 0$

να αποδείξετε ότι: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-\theta^2 h)}{f(1+\theta^4 h) - f(1-\theta^2 h)} = \frac{1}{\theta^2}, \theta \neq 0$