ΠΩΣ ΘΑ ΒΡΩ ΤΟΥΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ Λ ΚΑΙ Μ ΟΤΑΝ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ F ΕΙΝΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣΙΜΗ ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ Xo

1.

Να βρεθούν οι παράμετροι κ, μ ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \kappa x + \mu, x < 2 \\ x^3, x \geq 2 \end{cases}$$

Θεωρώ την συνάρτηση $\lambda(h) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, h \neq 0$

$$\lambda(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \overset{x_0=2}{=} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \overset{f(2)=8}{=} \frac{f(2+h) - 8}{h} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{f(2+h)-8}{h}, 2+h < 2 \\ \dfrac{f(2+h)-8}{h}, 2+h > 2 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\kappa(2+h)+\mu-8}{h}, h < 0 \\ \dfrac{(2+h)^3-8}{h}, h > 0 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \dfrac{\kappa h + 2\kappa + \mu - 8}{h}, h < 0 \\ \dfrac{(2+h)^3 - 8}{h}, h > 0 \end{cases}$$

Αν $h < 0$ θα έχω:

$$\lambda(h) = \frac{\kappa h + 2\kappa + \mu - 8}{h}$$

Έστω $2\kappa + \mu - 8 \neq 0$. Τότε θα έχω:

$$\lim_{h \to 0^-} \lambda(h) = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h} \lim_{h \to 0^-} (\kappa h + 2\kappa + \mu - 8) = (-\infty)(2\kappa + \mu - 8) =$$

$$\begin{cases} -\infty, 2\kappa + \mu - 8 > 0 \\ +\infty, 2\kappa + \mu - 8 < 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$. Οπότε υπάρχει το όριο της συνάρτησης λ στο σημείο $h_0 = 0$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Άρα και το αριστερό πλευρικό όριο της συνάρτησης λ υπάρχει στο σημείο $h_0 = 0$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Άτοπο γιατί* $\lim_{h \to 0^-} \lambda(h) = \pm\infty$.*Συνεπώς θα έχω* $2\kappa + \mu - 8 = 0$

$2\kappa + \mu - 8 = 0 \Leftrightarrow \mu = -2\kappa + 8 \quad (1)$

$$\lambda(h) = \frac{\kappa h + 2\kappa + \mu - 8}{h} \overset{\mu = -2\kappa + 8}{=} \frac{\kappa h + 2\kappa - 2\kappa + 8 - 8}{h} = \frac{\kappa h}{h} = \kappa$$

Οπότε : $\lim_{h \to 0^-} \lambda(h) = \lim_{h \to 0^-} \kappa = \kappa$

Αν $h > 0$ *θα έχω*:

$$\lambda(h) = \frac{(2+h)^3 - 8}{h} \overset{(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\cdot\alpha^2\cdot\beta + 3\cdot\alpha\cdot\beta^2 + \beta^3}{=} \frac{\cancel{2^3} + 3\cdot 2^2\cdot h + 3\cdot 2\cdot h^2 + h^3 - \cancel{8}}{h} =$$

$$= \frac{h\left(12 + 6h + h^2\right)}{h} = 12 + 6h + h^2$$

Οπότε : $\lim_{h \to 0^+} \lambda(h) = \lim_{h \to 0^+} \left(12 + 6h + h^2\right) = 12$

Η *συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0 = 2$.Οπότε *υπάρχει το όριο της συνάρτησης λ στο σημείο* $h_0 = 0$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Άρα θα έχω*:

$\lim_{h \to 0^+} \lambda(h) = \lim_{h \to 0^-} \lambda(h) \Leftrightarrow \kappa = 12$

Θέτω $\kappa = 12$ *στην σχέση* (1):

$$\mu = -2\kappa + 8 \overset{\kappa = 12}{=} -2\cdot 12 + 8 = -24 + 8 = -16$$

2.

Να *βρείτε τις τιμές των* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *για τις οποίες η συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0 = 1$ $f(x) = \begin{cases} \kappa x^2 + \mu x + 3, x < 1 \\ x^3 + x + 2, x \geq 1 \end{cases}$

Θεωρώ *την συνάρτηση* $\lambda(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, h \neq 0$

$$\lambda(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \overset{x_0 = 1}{=} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \overset{f(1) = 12}{=} \frac{f(1+h) - 12}{h} =$$

$$=\begin{cases}\dfrac{f\left(1+h\right)-12}{h},1+h<1\\ \dfrac{f\left(1+h\right)-12}{h},1+h>1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\kappa\left(1+h\right)^2+\mu\left(1+h\right)+3-4}{h},h<0\\ \dfrac{\left(1+h\right)^3+1+h+2-4}{h},h>0\end{cases}\overset{\substack{(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\cdot\alpha\cdot\beta^2+3\cdot\alpha\cdot\beta^2+\beta^3\\(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2}}{=}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\kappa\left(1+2h+h^2\right)+\mu+\mu h-1}{h},h<0\\ \dfrac{1+3h+3h^2+h^3+h-1}{h},h>0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\kappa+2\kappa h+\kappa h^2+\mu+\mu h-1}{h},h<0\\ \dfrac{h\left(h^2+3h+4\right)}{h}h>0\end{cases}=$$

$$\begin{cases}\dfrac{\kappa h^2+\left(2\kappa+\mu\right)h+\kappa+\mu-1}{h},h<0\\ h^2+3h+4,h>0\end{cases}$$

$\text{Αν } h<0 \ \theta\alpha \ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\lambda\left(h\right)=\frac{\kappa h^2+\left(2\kappa+\mu\right)h+\kappa+\mu-1}{h}$$

$\acute{\text{Ε}}\sigma\tau\omega \ \kappa+\mu-1\neq 0.\text{Τ}\acute{o}\tau\varepsilon \ \theta\alpha \ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\lim_{h\to 0^-}\lambda\left(h\right)=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}\lim_{h\to 0^-}\left[\kappa h^2+\left(2\kappa+\mu\right)h+\kappa+\mu-1\right]=\left(-\infty\right)\left(\kappa+\mu-1\right)=$$

$$\begin{cases}-\infty,\kappa+\mu-1>0\\ +\infty,\kappa+\mu-1<0\end{cases}$$

Η *συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0=1$.Ο*πότε υπάρχει το όριο της συνάρτησης* λ *στο σημείο* $h_0=0$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Άρα και το αριστερό πλευρικό όριο της συνάρτησης* λ *υπάρχει στο σημείο* $h_0=0$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Άτοπο γιατί* $\lim_{h\to 0^-}\lambda\left(h\right)=\pm\infty$.Σ*υνεπώς θα έχω* $\kappa+\mu-1=0$

$$\kappa+\mu-1=0\Leftrightarrow\mu=-\kappa+1\left(1\right)$$

$$\lambda\left(h\right)=\frac{\kappa h^2+\left(2\kappa+\mu\right)h+\kappa+\mu-1}{h}\overset{\mu=-\kappa+1}{=}\frac{\kappa h^2+\left(2\kappa-\kappa+1\right)h+\kappa-\kappa+1-1}{h}=$$

$$=\frac{\kappa h^2+\left(\kappa+1\right)h}{h}=\frac{h\left(\kappa h+\kappa+1\right)}{h}=\kappa h+\kappa+1$$

Ο*πότε*: $\lim_{h\to 0^-}\lambda\left(h\right)=\lim_{h\to 0^-}\left(\kappa h+\kappa+1\right)=\kappa+1$

$Aν\ h>0\ θα\ έχω:$

$\lambda(h)=h^2+3h+4$

$Οπότε: \lim_{h\to 0^+}\lambda(h)=\lim_{h\to 0^+}\left(h^2+3h+4\right)=4$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.Οπότε υπάρχει το όριο της συνάρτησης λ στο σημείο $h_0=0$ και είναι πραγματικός αριθμός.Άρα θα έχω:

$\lim_{h\to 0^+}\lambda(h)=\lim_{h\to 0^-}\lambda(h)\Leftrightarrow \kappa+1=4\Leftrightarrow \kappa=3$

Θέτω $\kappa=3$ στην σχέση (1):

$\mu=-\kappa+1\overset{\kappa=3}{=}-3+1=-2$

3.

Να βρεθούν οι πραγματικοι αριθμοί κ,μ ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=2$ $f(x)=\begin{cases}x^2+\mu, x\le 2\\ \kappa x+1, x>2\end{cases}$

Θεωρώ την συνάρτηση $\lambda(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, h\neq 0$

$$\lambda(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{x_0=2}{=}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\overset{f(2)=4+\mu}{=}\frac{f(2+h)-(4+\mu)}{h}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{f(2+h)-4-\mu}{h}, 2+h<2\\ \dfrac{f(2+h)-4-\mu}{h}, 2+h>2\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{(2+h)^2+\mu-4-\mu}{h}, h<0\\ \dfrac{\kappa(2+h)+1-4-\mu}{h}, h>2\end{cases}=$$

$$\begin{cases}\dfrac{4+4h+h^2-4}{h}, h<0\\ \dfrac{2\kappa+\kappa h-3-\mu}{h}, h>2\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{h(4+h)}{h}, h<0\\ \dfrac{\kappa h+2\kappa-\mu-3}{h}, h>0\end{cases}=\begin{cases}4+h, h<0\\ \dfrac{\kappa h+2\kappa-\mu-3}{h}, h>0\end{cases}$$

$Aν\ h<0\ θα\ έχω:$

$\lambda(h)=4+h$

Οπότε : $\lim\limits_{h\to 0^-} \lambda(h) = \lim\limits_{h\to 0^-}(4+h) = 4$

Αν $h>0$ *θα έχω*:

$$\lambda(h) = \frac{\kappa h + 2\kappa - \mu - 3}{h}$$

Έστω $2\kappa - \mu - 3 \neq 0$.Τ*ότε θα έχω*:

$$\lim_{h\to 0^+} \lambda(h) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \lim_{h\to 0^+}(\kappa h + 2\kappa - \mu - 3) = (+\infty)(2\kappa - \mu - 3) =$$

$$\begin{cases} +\infty, 2\kappa - \mu - 3 > 0 \\ +\infty, 2\kappa - \mu - 3 < 0 \end{cases}$$

Η *συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0 = 2$.Ο*πότε υπάρχει το όριο της συνάρτησης* λ *στο σημείο* $h_0 = 0$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Άρα και το δεξιό πλευρικό όριο της συνάρτησης* λ *υπάρχει στο σημείο* $h_0 = 0$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Άτοπο γιατί* $\lim\limits_{h\to 0^{++}} \lambda(h) = \pm\infty$.Σ*υνεπώς θα έχω* $2\kappa - \mu - 3 = 0$

$$2\kappa - \mu - 3 = 0 \Leftrightarrow \mu = 3 + 2\kappa \ (1)$$

$$\lambda(h) = \frac{\kappa h + 2\kappa - \mu - 3}{h} \overset{\mu=3+2\kappa}{=} \frac{\kappa h + 2\kappa - (3+2\kappa) - 3}{h} = \frac{\kappa h + 2\kappa - 3 - 2\kappa - 3}{h}$$

$$= \frac{\kappa h}{h} = \kappa$$

Οπότε : $\lim\limits_{h\to 0^+} \lambda(h) = \lim\limits_{h\to 0^+} \kappa = \kappa$

Η *συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0 = 2$.Ο*πότε υπάρχει το όριο της συνάρτησης* λ *στο σημείο* $h_0 = 0$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Άρα θα έχω*:

$$\lim_{h\to 0^+} \lambda(h) = \lim_{h\to 0^-} \lambda(h) \Leftrightarrow \kappa = 4$$

Θ*έτω* $\kappa = 4$ *στην σχέση* (1):

$$\mu = 3 + 2\kappa \overset{\kappa=3}{=} 3 + 2 \bullet 3 = 9$$

4.

Να βρεθούν οι πραγματικοι αριθμοί α,β,γ ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+\beta x+3, x<1\\ 2, x=1\\ x^3+\gamma x+2, x>1\end{cases}$$

Θεωρώ την συνάρτηση $\lambda(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, h\neq 0$

$$\lambda(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{x_0=1}{=}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\overset{f(1)=2}{=}\frac{f(1+h)-2}{h}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{f(1+h)-2}{h},1+h<1\\ \dfrac{f(1+h)-2}{h},1+h>1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\alpha(1+h)^2+\beta(1+h)+3-4}{h},h<0\\ \dfrac{(1+h)^3+\gamma(1+h)+2-2}{h},h>0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\alpha\left(1+2h+h^2\right)+\beta+\beta h-1}{h},h<0\\ \dfrac{1+3h+3h^2+1+h^3+\gamma+\gamma h}{h},h>0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\alpha+2\alpha h+\alpha h^2+\beta+\beta h-1}{h},h<0\\ \dfrac{h^3+3h^2+(\gamma+3)h+\gamma+2}{h},h>0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\alpha h^2+(2\alpha+\beta)h+\alpha+\beta-1}{h},h<0\\ \dfrac{h^3+3h^2+(\gamma+3)h+\gamma+2}{h},h>0\end{cases}$$

Αν $h<0$ θα έχω:

$$\lambda(h)=\frac{\alpha h^2+(2\alpha+\beta)h+\alpha+\beta-1}{h}$$

Έστω $a+\beta-1\neq 0$.Τότε θα έχω:

$$\lim_{h\to 0^-}\lambda(h)=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}\lim_{h\to 0^-}\left[\alpha h^2+(2\alpha+\beta)h+\alpha+\beta-1\right]=(-\infty)(\alpha+\beta-1)=$$

$$\begin{cases}-\infty,\alpha+\beta-1>0\\ +\infty,\alpha+\beta-1<0\end{cases}$$

Η *συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0 = 1$.Ο*πότε υπάρχει το όριο της συνάρτησης* λ *στο σημείο* $h_0 = 0$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Άρα και το αριστερό πλευρικό όριο της συνάρτησης* λ *υπάρχει στο σημείο* $h_0 = 0$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Άτοπο γιατί* $\lim\limits_{h\to 0^-} \lambda(h) = \pm\infty$.Σ*υνεπώς θα έχω* $a+\beta-1=0$

$a+\beta-1=0 \Leftrightarrow \beta = 1-\alpha\,(1)$

$$\lambda(h) = \frac{\alpha h^2 + (2\alpha+\beta)h + \alpha + \beta - 1}{h} \overset{\beta=1-\alpha}{=} \frac{\alpha h^2 + (2\alpha+1-\alpha)h + \alpha + 1 - \alpha - 1}{h} =$$

$$\frac{\alpha h^2 + (\alpha+1)h}{h} = \frac{h(\alpha h^2 + \alpha + 1)}{h} = \alpha h^2 + \alpha + 1$$

Ο*πότε*$:\lim\limits_{h\to 0^-} \lambda(h) = \lim\limits_{h\to 0^-} \left(\alpha h^2 + \alpha + 1\right) = \alpha + 1$

$$= \begin{cases} \dfrac{\alpha h^2 + (2\alpha+\beta)h + \alpha + \beta - 1}{h}, h < 0 \\ \dfrac{h^3 + 3h^2 + (\gamma+3)h + \gamma + 2}{h}, h > 0 \end{cases}$$

Α*ν* $h > 0$ *θα έχω*:

$$\lambda(h) = \frac{h^3 + 3h^2 + (\gamma+3)h + \gamma + 2}{h}$$

Έστω $\gamma + 2 \neq 0$.Τ*ότε θα έχω*:

$$\lim_{h\to 0^+} \lambda(h) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \lim_{h\to 0^+} \left[h^3 + 3h^2 + (\gamma+3)h + \gamma + 2\right] = (+\infty)(\gamma+2) =$$

$$= \begin{cases} +\infty, \gamma + 2 > 0 \\ -\infty, \gamma + 2 < 0 \end{cases}$$

Η *συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0 = 1$.Ο*πότε υπάρχει το όριο της συνάρτησης* λ *στο σημείο* $h_0 = 0$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Άρα και το δεξιόπλευρικό όριο της συνάρτησης* λ *υπάρχει στο σημείο* $h_0 = 0$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Άτοπο γιατί* $\lim\limits_{h\to 0^+} \lambda(h) = \pm\infty$.Σ*υνεπώς θα έχω* $\gamma + 2 = 0$

$\gamma + 2 = 0 \Leftrightarrow \gamma = -2$

$$\lambda(h)=\frac{h^3+3h^2+(\gamma+3)h+\gamma+2}{h}\overset{\gamma=-2}{=}\frac{h^3+3h^2+(-2+3)h-2+2}{h}=$$

$$=\frac{h\left(h^2+3h+1\right)}{h}=h^2+3h+1$$

$\text{Οπότε}: \lim\limits_{h\to 0^+}\lambda(h)=\lim\limits_{h\to 0^+}\left(h^2+3h+1\right)=1$

Η *συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0=1$.Ο*πότε υπάρχει το όριο της συνάρτησης* λ *στο σημείο* $h_0=0$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Άρα θα έχω*:

$$\lim_{h\to 0^+}\lambda(h)=\lim_{h\to 0^-}\lambda(h)\Leftrightarrow \alpha+1=1\Leftrightarrow a=0$$

Θ*έτω* $a=0$ *στην σχέση* (1):

$$\beta=1-\alpha\overset{a=0}{=}1-0=1$$

5.

Ν*α βρεθούν οι πραγματικοι αριθμοί* α,β,γ *ώστε η συνάρτηση* f *να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0=1$ $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+\beta, x<1 \\ \gamma, x=1 \\ \sqrt{x^2+3}, x<1 \end{cases}$

Θ*εωρώ την συνάρτηση* $\lambda(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, h\neq 0$

$$\lambda(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{x_0=1}{=}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\overset{f(1)=\gamma}{=}\frac{f(1+h)-\gamma}{h}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{f(1+h)-\gamma}{h}, 1+h<1 \\ \dfrac{f(1+h)-\gamma}{h}, 1+h>1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{(1+h)^2+a(1+h)+\beta-\gamma}{h}, h<0 \\ \dfrac{\sqrt{(1+h)^2+3}-\gamma}{h}, h>0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1+2h+h^2+a+ah+\beta-\gamma}{h}, h<0\\ \dfrac{\sqrt{(1+h)^2+3}-\gamma}{h}, h>0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{h^2+(2+a)h+1+a+\beta-\gamma}{h}, h<0\\ \dfrac{\sqrt{(1+h)^2+3}-\gamma}{h}, h>0\end{cases}$$

Αν $h<0$ *θα έχω*:

$$\lambda(h)=\frac{h^2+(2+a)h+1+a+\beta-\gamma}{h}$$

Έστω $a+\beta+1-\gamma\neq 0$.Τ*ότε θα έχω*:

$$\lim_{h\to 0^-}\lambda(h)=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}\lim_{h\to 0^-}\left[h^2+(2+\alpha)h+\alpha+\beta+1-\gamma\right]=(-\infty)(\alpha+\beta+1-\gamma)=$$

$$\begin{cases}-\infty, \alpha+\beta+1-\gamma>0\\ +\infty, \alpha+\beta+1-\gamma<0\end{cases}$$

Η *συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0=1$.Ο*πότε υπάρχει το όριο της συνάρτησης* λ *στο σημείο* $h_0=0$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Άρα και το αριστερό πλευρικό όριο της συνάρτησης* λ *υπάρχει στο σημείο* $h_0=0$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Άτοπο γιατί* $\lim_{h\to 0^-}\lambda(h)=\pm\infty$.Σ*υνεπώς θα έχω* $a+\beta+1-\gamma=0$

$$a+\beta+1-\gamma=0\Leftrightarrow\beta=-1-\alpha+\gamma\,(1)$$

$$\lambda(h)=\frac{\alpha h^2+(2\alpha+\beta)h+\alpha+\beta+1-\gamma}{h}\overset{\beta=-1-\alpha+\gamma}{=}$$

$$\frac{h^2+(\alpha+2)h+\alpha-\alpha-1+\gamma+1-\gamma}{h}=\frac{h(\alpha h+\alpha+2)}{h}=\alpha h+\alpha+2$$

Ο*πότε*: $\lim_{h\to 0^-}\lambda(h)=\lim_{h\to 0^-}(\alpha h+\alpha+2)=\alpha+2$

Αν $h>0$ *θα έχω*:

$$\lambda(h)=\frac{\sqrt{(1+h)^2+3}-\gamma}{h}$$

Έστω $2-\gamma\neq 0$.Τ*ότε θα έχω*:

$$\lim_{h\to 0^+}\lambda(h)=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\lim_{h\to 0^+}\left[\sqrt{(1+h)^2+3}-\gamma\right]=(+\infty)(2-\gamma)=$$

$$\begin{cases}+\infty, 2-\gamma>0\\ -\infty, 2-\gamma<0\end{cases}$$

Η *συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0=1$.Ο*πότε υπάρχει το όριο της συνάρτησης* λ *στο σημείο* $h_0=0$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Άρα και το δεξιό πλευρικό όριο της συνάρτησης* λ *υπάρχει στο σημείο* $h_0=0$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Άτοπο γιατί* $\lim_{h\to 0^-}\lambda(h)=\pm\infty$.*Συνεπώς θα έχω* $2-\gamma=0$

$2-\gamma=0\Leftrightarrow\gamma=2$

$$\lambda(h)=\frac{\sqrt{(1+h)^2+3}-\gamma}{h}\overset{\gamma=2}{=}\frac{\left[\sqrt{(1+h)^2+3}-2\right]\left[\sqrt{(1+h)^2+3}+2\right]}{h\left[\sqrt{(1+h)^2+3}+2\right]}=$$

$$\frac{\left[\sqrt{(1+h)^2+3}\right]^2-4}{h\left[\sqrt{(1+h)^2+3}+2\right]}=\frac{(1+h)^2-1}{h\left[\sqrt{(1+h)^2+3}+2\right]}=\frac{(1+h-1)(1+h+1)}{h\left[\sqrt{(1+h)^2+3}+2\right]}=$$

$$=\frac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}\left[\sqrt{(1+h)^2+3}+2\right]}=\frac{h+2}{\sqrt{(1+h)^2+3}+2}$$

Ο*πότε* : $\lim_{h\to 0^+}\lambda(h)=\lim_{h\to 0^+}\frac{h+2}{\sqrt{(1+h)^2+3}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Η *συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0=1$.Ο*πότε υπάρχει το όριο της συνάρτησης* λ *στο σημείο* $h_0=0$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Άρα θα έχω*:

$$\lim_{h\to 0^+}\lambda(h)=\lim_{h\to 0^-}\lambda(h)\Leftrightarrow\alpha+2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{2}-\frac{4}{2}\Leftrightarrow\alpha=-\frac{3}{2}$$

Θ*έτω* $a=-\frac{3}{2}$ *στην σχέση* (1):

$$\beta=-1-\alpha+\gamma\overset{-\frac{3}{2}}{=}-1+\frac{3}{2}+2=\frac{5}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρεθούν οι παράμετροι κ, μ ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$

$$f(x) = \begin{cases} -\kappa x + \mu, x < 2 \\ x^3, x \geq 2 \end{cases}$$

2.

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$

$$f(x) = \begin{cases} -\kappa x^2 + \mu x + 3, x < 1 \\ x^3 + x + 2, x \geq 1 \end{cases}$$

3.

Να βρεθούν οι πραγματικοι αριθμοί κ, μ ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \mu, x \leq 2 \\ -\kappa x + 1, x > 2 \end{cases}$$

4.

Να βρεθούν οι πραγματικοι αριθμοί α, β, γ ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$

$$f(x) = \begin{cases} -\alpha x^2 + \beta x + 3, x < 1 \\ 2, x = 1 \\ x^3 + \gamma x + \gamma + 2, x > 1 \end{cases}$$

5.

Να βρεθούν οι πραγματικοι αριθμοί α, β, γ ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + \beta, x < 1 \\ \gamma, x = 1 \\ \sqrt{3x^2 + 1}, x < 1 \end{cases}$$

6.

Να *βρεθούν οι πραγματικοι αριθμοί* α,β *και ο μη μηδενικός φυσικός αριθμός* ν *ώστε η συνάρτηση* f *να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0=1$

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^2-\beta, x<1\\ 0, x=1\\ \dfrac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)^\nu}, x>1\end{cases}$$

Υ*πόδειξη*:

$$\lambda(h)=\frac{f(1+h)}{h}=\begin{cases}\dfrac{f(1+h)}{h},1+h<1\\ \dfrac{f(1+h)}{h},1+h>1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{a(1+h)^2-\beta}{h},h<0\\ \dfrac{\eta\mu h}{h^\nu},h>0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2ah+ah^2+a-\beta}{h},h<0\\ \dfrac{\eta\mu h}{h^\nu},h>0\end{cases}$$

Αν $h>0$ *διακρίνω τις περιπτώσεις*: $\begin{Bmatrix}(\mathrm{I})\nu=1\\ (\mathrm{II})\nu>1\end{Bmatrix}$

Π*ερίπτωση* $(\mathrm{I}):\nu=1$

$$\lim_{h\to0^+}\lambda(h)=\lim_{h\to0^+}\frac{\eta\mu h}{h}=1$$

Π*ερίπτωση* $(\mathrm{II}):\nu>1\Rightarrow\nu-1>0$

$$\lim_{h\to0^+}\lambda(h)=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h^{\nu-1}}\lim_{h\to0^+}\frac{\eta\mu h}{h}=(+\infty)\bullet1=+\infty\left(\text{Άτοπο γιατί }\lim_{h\to0^+}\lambda(h)\in\mathbb{R}\right)$$

Αν $h<0$:

Έστω $a-\beta\neq0$.Τ*ότε θα έχω* $\lim_{h\to0^-}\lambda(h)=\pm\infty\left(\text{Άτοπο γιατί }\lim_{h\to0^-}\lambda(h)\in\mathbb{R}\right)$

Αν $\alpha=\beta$ *τότε*: $\lim_{h\to0^-}\lambda(h)=\lim_{h\to0^-}\dfrac{\alpha h(2+h)}{h}=2a$