Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΤΗΣ C_f ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ $\mathrm{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$

Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΤΗΣ C_f ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ $\mathrm{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$

Αν η συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ $\left(D_f : \text{Το πεδίο ορισμού της } f\right)$ *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0 \in D_f$ *υπάρχει εφαπτομένη* (ε) *της* C_f *στο σημείο επαφής* $\mathrm{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ *με* $(\varepsilon) \nparallel y'y$ *και ο συντελεστής διεύθυνσης της* (ε) *είναι ίσος με την παράγωγο της* f *στο σημείο* x_0

Η *εξίσωση της εφαπτομένης* (ε) *δίνεται απο την σχέση*:

$$y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$$

Η f *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* x_0

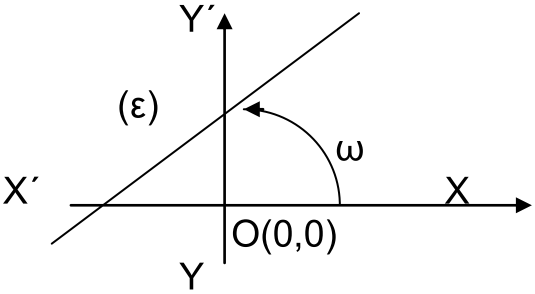
(ε): Η *εφαπτομένη της* C_f *στο σημείο επαφής* $\mathrm{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$

$(\varepsilon) \nparallel y'y$

λ: Ο *συντελεστής διεύθυνσης της* (ε)

$\lambda = f'\left(x_0\right)$

$(\varepsilon): y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$

<table>
<tr><th colspan="2">Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε)</th></tr>
<tr><td>Πότε ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε)</td><td>Όταν (ε) δεν είναι παράλληλη με τον άξονα Υ΄Υ</td></tr>
<tr><td>Πως ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε)</td><td>


λ = εφω

λ= Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε)

ω = Η γωνία που διαγράφει ο άξονας Χ΄Χ όταν στραφεί αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού έτσι ώστε να συναντήσει την ευθεία (ε)</td></tr>
</table>

Συνθήκη παραλληλίας	(ε_1)//(ε_2) $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1 = \lambda_2$ λ_1 : Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε_1) λ_2 : Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε_2)
Συνθήκη καθετότητας	(ε_1)//(ε_2) $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1 \bullet \lambda_2 = -1$ λ_1 : Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθεία (ε_1) λ_2 : Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε_2)
Απο ποια σχέση δίνεται ο συντελεστής διευθυνσης της ευθείας (ε) όταν ευθεία (ε) έχει εξίσωση (ε) : y = α x + β	(ε) : y = α x + β λ = α = Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Ν*α βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης* $f(x) = x^2 + 2x + 5$ *στο σημείο* $x_0 = 0$

$$f'(x) = \left(x^2 + 2x + 5\right)' \overset{\left(F(x)+G(x)+H(x)\right)' = F'(x)+G'(x)+H'(x)}{=} \left(x^2\right)' + (2x)' + (5)' \overset{\substack{\left(x^a\right)' = ax^{a-1} \\ \left(cF(x)\right)' = cF'(x), c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha} \\ (c)' = 0, c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}}{=}$$

$$= 2x + 2(x)' + 0 \overset{(x)'=1}{=} 2x + 2 \bullet 1 = 2x + 2$$

$$f'(x) = 2x + 2$$

$$f'(0) = 2 \bullet 0 + 2 = 2$$

$$f(0) = 0^2 + 2 \bullet 0 + 5 = 5$$

Η *εξίσωση της ευθείας* (ε) *θα είναι* :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \overset{\substack{f(0)=0 \\ f'(0)=2}}{\Longleftrightarrow} y - 5 = 2x \Leftrightarrow y = 2x + 5$$

2.

Ν*α βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης* $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ *στο σημείο επαφής* $\mathrm{A}\left(x_0, f(x_0)\right)$ *όταν ισχύει* $f'(x_0) = 2f(x_0)$

$$f'(x) = \left[\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\right]' \overset{\left(cF(x)\right)' = cF'(x), c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}{=} \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)' = \overset{\left(F(x)-G(x)\right)' = F'(x)-G'(x)}{=}$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(e^{x}\right)'-\left(e^{-x}\right)'\right]\overset{\substack{\left(e^{x}\right)'=e^{x}\\ \left(e^{F(x)}\right)'=e^{F(x)}F'(x)}}{=}\frac{1}{2}\left[e^{x}-\left(e^{-x}\right)(-x)'\right]=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$f'(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},x\in\mathbb{R}$$

$$f'(x_0)=2f(x_0)\Leftrightarrow\frac{e^{x_0}+e^{-x_0}}{2}=\cancel{2}\,\frac{e^{x_0}-e^{-x_0}}{\cancel{2}}\Leftrightarrow\frac{e^{x_0}+e^{-x_0}}{2}=e^{x_0}-e^{-x_0}\Leftrightarrow$$

$$e^{x_0}+e^{-x_0}=2\left(e^{x_0}-e^{-x_0}\right)\Leftrightarrow e^{x_0}+e^{-x_0}=2e^{x_0}-2e^{-x_0}\Leftrightarrow e^{x_0}-2e^{x_0}=-2e^{-x_0}-e^{-x_0}\Leftrightarrow$$

$$e^{x_0}=3e^{-x_0}\overset{\alpha^{-x}=\frac{1}{\alpha^{x}},\alpha\neq0}{\Longleftrightarrow}e^{x_0}=\frac{3}{e^{x_0}}\Leftrightarrow\left(e^{x_0}\right)^2=3\overset{e^{x_0}>0}{\Longleftrightarrow}e^{x_0}=\sqrt{3}$$

$$e^{-x_0}\overset{a^{-x}=\frac{1}{a^{x}},a\neq0}{=}\frac{1}{e^{x_0}}=\frac{1\bullet\sqrt{3}}{\sqrt{3}\bullet\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'(x_0)=\frac{e^{x_0}+e^{-x_0}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}\bullet3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$e^{x_0}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\ln e^{x_0}=\ln\sqrt{3}\overset{\substack{\ln\theta^{\kappa}=\kappa\ln\theta,\theta>0\\ \sqrt{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{2}},\alpha\geq0\\ \ln e=1}}{\Longleftrightarrow}x_0\ln e=\ln3^{\frac{1}{2}}\overset{\ln e=1}{\Longleftrightarrow}x_0=\frac{\ln3}{2}$$

$$f'(x_0)=2f(x_0)\Leftrightarrow2f(x_0)=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow f(x_0)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}\Leftrightarrow f(x_0)=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Επειδή *η συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη στο σημείο* $x_0=\frac{\ln3}{2}$

υπάρχει η εφαπτομένη (ε) *της* C_f *στο σημείο επαφής* $\mathrm{A}\left(x_0,f(x_0)\right)$ *με* $(\varepsilon)\not\parallel y'y$

Τ*ότε ο συντελεστής διεύθυνσης* λ *της* (ε) *θα είναι* $\lambda=f'(x_0)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Η *εξίσωση της ευθείας* (ε) *θα είναι*:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\overset{\substack{f(x_0)=\frac{\sqrt{3}}{6}\\ f'(x_0)=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ x_0=\frac{\ln3}{2}}}{\Longleftrightarrow}y-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\ln3}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{6y-\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{2x-\ln 3}{2}\Leftrightarrow\frac{6y-\sqrt{3}}{6}=\frac{2\sqrt{3}x-\sqrt{3}\ln 3}{6}\Leftrightarrow 6y-\sqrt{3}=2\sqrt{3}x-\sqrt{3}\ln 3$$

$$\Leftrightarrow 6y-2\sqrt{3}x-\sqrt{3}+\sqrt{3}\ln 3=0\Leftrightarrow 5y-2\sqrt{3}x+\sqrt{3}\left(\ln 3-1\right)=0\overset{\ln e=1}{\Longleftrightarrow}$$

$$5y-2\sqrt{3}x+\sqrt{3}\left(\ln 3-\ln e\right)=0\quad\overset{\ln\theta_1-\ln\theta_2=\ln\frac{\theta_1}{\theta_2},\theta_1,\theta_2>0}{\Longleftrightarrow}\quad 5y-2\sqrt{3}x+\sqrt{3}\ln\frac{3}{e}=0$$

3.

Δίνεται η συνάτρηση $f\left(x\right)=3x^4-6x^2+5$ *και* C_f *η γραφική της παράσταση. Να αποδείξετε οτι υπάρχουν τρία σημεία της* C_f *στα οποία οι εφαπτομένης της* C_f *να είναι παράλληλες με την ευθεία* $y=1$

$$f'\left(x\right)=\left(3x^4-6x^2+5\right)'\overset{\left(F(x)+G(x)+H(x)\right)'=F'(x)+G'(x)+H'(x)}{=}\left(3x^4\right)'+\left(-6x^2\right)'+\left(5\right)'\overset{\substack{\left(cF(x)\right)'=cF'(x),c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\\ \left(c\right)'=0,c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}}{=}$$

$$3\left(x^4\right)'-6\left(x^2\right)'+0\overset{\left(x^a\right)'=ax^{a-1}}{=}3\bullet 4x^3-6\bullet 2x=12x\left(x^2-1\right)=12x\left(x-1\right)\left(x+1\right)$$

$f'\left(x\right)=12x\left(x-1\right)\left(x+1\right),x\in\mathbb{R}$

$\left(\varepsilon\right):y=1$

Τ*ότε ο συντελεστής διεύθυνσης* λ_ε *της* $\left(\varepsilon\right)$ *θα είναι*: $\lambda_\varepsilon=0$

Α*ν* $\left(l\right)$ *η εφαπτομένη της* C_f *στο σημείο επαφής* $\mathrm{A}\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ *με* $\left(\varepsilon\right)\not\parallel y'y$ *και* $\left(l\right)//\left(\varepsilon\right)$.Τ*ότε ο συντελεστής διεύθυνσης* λ_l *της* $\left(l\right)$ *θα είναι*:

$\lambda_l=f'\left(x_0\right)=12x_0\left(x_0-1\right)\left(x_0+1\right)$

$$\left(l\right)//\left(\varepsilon\right)\Leftrightarrow\lambda_l=\lambda_\varepsilon\Leftrightarrow 12x_0\left(x_0-1\right)\left(x_0+1\right)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x_0=0\\ \acute{\eta}\\ x_0-1=0\\ \acute{\eta}\\ x_0+1=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x_0=0\\ \acute{\eta}\\ x_0=1\\ \acute{\eta}\\ x_0=-1\end{matrix}\right\}$$

4.

Ν*α βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της* f *με* $f\left(x\right)=3x^2+5x+1$ *που είναι κάθετη στην ευθεία* $\left(\varepsilon\right):y=x+2$

$$f'(x)=\left(3x^2+5x+1\right)' \overset{\left(F(x)+G(x)+H(x)\right)'=F'(x)+G'(x)+H'(x)}{=} \left(3x^2\right)'+\left(5x\right)'+\left(1\right)'$$

$$\overset{\substack{\left(cF(x)\right)'=cF'(x),c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\\ (c)'=0,c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}}{=} 3\left(x^2\right)'+5\left(x\right)'+0 \overset{\left(x^a\right)'=ax^{a-1}}{=} 3\bullet 2x+5\bullet 1=6x+5$$

$f'(x)=6x+5, x\in\mathbb{R}$

Αν (l) *η εφαπτομένη της* C_f *στο σημείο επαφής* $\mathrm{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$

με $(\varepsilon)\not\parallel y'y$.Τότε *ο συντελεστής διεύθυνσης* λ_l *της* (l) *θα είναι*:

$\lambda_l = f'\left(x_0\right)=6x_0+5$

$(\varepsilon): y=x+2$

Ο *συντελεστής διεύθυνσης* λ_ε *της* (ε) *θα είναι*: $\lambda_\varepsilon=1$

$(l)\perp(\varepsilon)\Leftrightarrow \lambda_l\ \lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow 1\bullet\left(6x_0+5\right)=-1\Leftrightarrow 6x_0+5=-1\Leftrightarrow 6x_0=-6\Leftrightarrow$

$6x_0=6(-1)\Leftrightarrow x_0=-1$

$f\left(x_0\right)=f(-1)=3(-1)^2+5(-1)+1=3-5+1=-1$

$f'\left(x_0\right)=f'(-1)=6(-1)+5=-1$

Η *εξίσωση της ευθείας* (ε) *θα είναι*:

$y-f(-1)=f'(-1)\left[x-(-1)\right]\Leftrightarrow y-(-1)=-1(x+1)\Leftrightarrow y+1=-x-1\Leftrightarrow$

$y=-x-2$

5

Να *βρεθεί τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής* $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ *που διέρχονται απο το σημείο* $\mathrm{A}(1,-4)$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!!!</u>

Το *σημείο* $\mathrm{A}(1,-4)$ *δεν ανήκει στην* C_f *γιατι* $f(1)=\dfrac{1^2}{2}=\dfrac{1}{2}\neq -4$

(I) Θ*α υποθέσω οτι υπάρχει εφαπτομένη* $(\varepsilon),(\varepsilon)\not\parallel y'y$ *της* C_f *στο σημείο επαφής* $\mathrm{M}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ *τέτοιο ώστε* $\mathrm{A}(1,-4)\in(\varepsilon)$.

(II) Θ*α βρώ την εξίσωση της* (ε) *συναρτήσει του* x_0

.

(III) Επειδή $\mathrm{A}(1,-4) \in (\varepsilon)$ *οι συντεταγμένες του* Α *ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας* (ε). *Στην εξίσωση της ευθείας* (ε) *θα θέσω όπου* $x=1$ *και* $y=-4$ *και θα κατασκευάσω μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς* x_0
Α*ν η δευτεροβάθμια εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες το σημείο βρίσκεται στο εσωτερικό της παραβολής και το πρόβλημα δεν έχει λύση γιατι απο ένα σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό μιας παραβολής δεν μπορώ να φέρω εφαπτομένες σε αυτήν* !!!!
(IV) Γ*ια να βρώ τις εξισώσεις της ευθείας* (ε) *θα αντικαταστήσω τις τιμές του* x_0 *στην εξίσωση της ευθείας* (ε)

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2\right)' \overset{(cF(x))'=cF'(x),c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}{=} \frac{1}{2}\left(x^2\right)' \overset{(x^a)'=ax^{a-1}}{=} \frac{1}{2}\bullet 2x = x$$

$f'(x)=x, x\in\mathbb{R}$

Α*ν* (ε) *η εφαπτομένη της* C_f *στο σημείο επαφής* $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ *με* $(\varepsilon) \not\parallel y'y$ *και* $\mathrm{A}(1,-4)\in(\varepsilon)$.Τ*ότε η εξίσωση της ευθείας* (ε) *θα είναι* :

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-\frac{x_0^{\ 2}}{2}=x_0(x-x_0) \Leftrightarrow y-\frac{x_0^{\ 2}}{2}=x_0x-\frac{2x_0^{\ 2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$y-\frac{x_0^{\ 2}}{2}=x_0x-\frac{2x_0^{\ 2}}{2} \Leftrightarrow y=x_0x-\frac{2x_0^{\ 2}}{2}+\frac{x_0^{\ 2}}{2} \Leftrightarrow y=x_0x-\frac{x_0^{\ 2}}{2}$$

$$(\varepsilon): y=x_0x-\frac{x_0^{\ 2}}{2}$$

$$\mathrm{A}(1,-4)\in(\varepsilon) \Leftrightarrow -4=x_0\bullet 1-\frac{x_0^{\ 2}}{2} \Leftrightarrow 2(-4)=2x_0-2\frac{x_0^{\ 2}}{2} \Leftrightarrow x_0^{\ 2}-2x_0-8=0\,(1)$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\bullet 1\bullet(-8)=4+32=36$$

Ε*πειδή* $\Delta>0$ *η δευτεροβάθμια εξίσωση* (1) *έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες* :

$$x_0=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}=\frac{2(1\pm 3)}{2}=1\pm 3 = \begin{cases} \nearrow 1+3=4 \\ \searrow 1-3=-2 \end{cases}$$

Α*ν* $x_0=4$ *τότε η ευθεία* (ε) *θα έχει εξίσωση* :

$\text{Αν } x_0 = 4 \text{ τότε η ευθεία } (\varepsilon) \text{ θα έχει εξίσωση}:$

$$y = x_0 x - \frac{x_0{}^2}{2} \overset{x_0=4}{\Longleftrightarrow} y = 4x - \frac{4^2}{2} \Leftrightarrow y = 4x - 8$$

$\text{Αν } x_0 = -2 \text{ τότε η ευθεία } (\varepsilon) \text{ θα έχει εξίσωση}:$

$$y = x_0 x - \frac{x_0{}^2}{2} \overset{x_0=-2}{\Longleftrightarrow} y = -2x - \frac{(-2)^2}{2} \Leftrightarrow y = -2x - 2$$

6.

$\text{Να αποδείξετε οτι η ευθεία } y = x \text{ είναι εφάπτομένη της } C_f \text{ με } f(x) = e^{\frac{x}{e}}$

$$f'(x) = \left(e^{\frac{x}{e}}\right)' \overset{\left(e^{F(x)}\right)' = e^{F(x)}F'(x)}{=} e^{\frac{x}{e}} \left(\frac{x}{e}\right)' = e^{\frac{x}{e}} \frac{1}{e} (x)' = \frac{e^{\frac{x}{e}}}{e}$$

$\text{Η ευθεία } (\varepsilon) \text{ εφάπτεται της } C_f \text{ στο σημείο } \mathrm{A}(x_0, f(x_0)) \text{ όταν}:$

$$\begin{cases} f'(x_0) = \text{Ο συντελεστής διεύθυνσης της } (\varepsilon) \\ \mathrm{A}(x_0, f(x_0)) \in (\varepsilon) \end{cases}$$

$\text{Η ευθεία } (\varepsilon): y = x \text{ εφάπτεται της } C_f \text{ στο σημείο } \mathrm{A}(x_0, f(x_0)) \text{ αν και μόνο αν ισχύει}:$

$$\begin{cases} f'(x_0) = 1 \\ \mathrm{A}(x_0, f(x_0)) \in (\varepsilon): y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{x_0}{e}}}{e} = 1 \\ f(x_0) = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{x_0}{e}} = e^1 \\ e^{\frac{x_0}{e}} = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{e} = 1 \\ e^{\frac{x_0}{e}} = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = e \\ e^{\frac{x_0}{e}} = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = e \\ e^{\frac{e}{e}} = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = e \\ e^1 = e \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = e$$

$\text{Η ευθεία } (\varepsilon): y = x \text{ εφάπτεται της } C_f \text{ στο σημείο } \mathrm{A}(e, f(e))$

7.

(I) *Δίνεται η συνάρτηση* $f(x)=-x^2$. *Να αποδείξετε οτι εφαπτομένες της* C_f *που διέρχονται απο το σημείο* $\mathrm{A}(1,0)$ *είναι ο άξονας* $x'x$ *και η ευθεία* $(\varepsilon): y=-4x+4$ (II) *Δίνεται η συνάρτηση* $g(x)=a\ln x+\beta x^2, x>0$. *Να βρεθούν τα* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *ώστε η ευθεία* $(\varepsilon): y=-4x+4$ *να εφάπτεται της* C_g *στο σημείο με τετμημένη* $x_0=1$

$$(\mathrm{I})\ f'(x)=\left(-x^2\right)' \overset{(cF(x))'=cF'(x),c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}{=} -\left(x^2\right)' \overset{\left(x^a\right)'=ax^{a-1}}{=} -2x=-2x$$

$f'(x)=-2x, x\in\mathbb{R}$

Αν (ε) *η εφαπτομένη της* C_f *στο σημείο επαφής* $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ *με* $(\varepsilon)\not\parallel y'y$ *και* $\mathrm{A}(1,0)\in(\varepsilon)$. *Τότε η εξίσωση της ευθείας* (ε) *θα είναι*:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \overset{\substack{f(x_0)=-x_0^2\\ f'(x_0)=-2x_0}}{\Longleftrightarrow} y-\left(-x_0^{\ 2}\right)=-2x_0(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$y+x_0^{\ 2}=-2x_0x+2x_0^{\ 2}\Leftrightarrow y=-2x_0x+x_0^{\ 2}$$

$$(\varepsilon): y=-2x_0x+x_0^{\ 2}$$

$$\mathrm{A}(1,0)\in(\varepsilon) \overset{(\varepsilon):y=-2x_0x+x_0^{\ 2}}{\Longleftrightarrow} 0=-2x_0\bullet 1+x_0^{\ 2}\Leftrightarrow x_0^{\ 2}-2x_0=0\Leftrightarrow x_0(x_0-2)=0\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} x_0=0\\ \acute{\eta}\\ x_0-2=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x_0=0\\ \acute{\eta}\\ x_0=2\end{array}\right\}$$

Αν $x_0=0$ *τότε η ευθεία* (ε) *θα έχει εξίσωση*:

$$y=-2x_0x+x_0^{\ 2} \overset{x_0=0}{\Longleftrightarrow} y=-2\bullet 0\bullet x+0^2\Leftrightarrow y=0$$

Δηλαδή αν $x_0=0$ *η ευθεία* (ε) *είναι ο άξονας* $x'x$

Αν $x_0=2$ *τότε η ευθεία* (ε) *θα έχει εξίσωση*:

$$y=-2x_0x+x_0^{\ 2} \overset{x_0=2}{\Longleftrightarrow} y=-2\bullet 2\bullet x+2^2\Leftrightarrow y=-4x+4$$

(II)

Η $ευθεία\ (\varepsilon)\ εφάπτεται\ της\ C_f\ στο\ σημείο\ \mathrm{A}(x_0, f(x_0))\ όταν:$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x_0) = \text{Ο συντελεστής διεύθυνσης της } (\varepsilon) \\ \mathrm{A}(x_0, f(x_0)) \in (\varepsilon) \end{array}\right\}$$

$$g'(x) = \left(a\ln x + \beta x^2\right)' \overset{(F(x)+G(x))'=F'(x)+G'(x)}{=} (a\ln x)' + \left(\beta x^2\right)' \overset{(cF(x))'=cF'(x),c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}{=}$$

$$a(\ln x)' + \beta\left(x^2\right)' \overset{\substack{(\ln x)'=\frac{1}{x},x>0 \\ (x^a)'=ax^{a-1}}}{=} a\frac{1}{x} + \beta \bullet 2x = \frac{a}{x} + 2\beta x$$

$$g'(x) = \frac{a}{x} + 2\beta x, x > 0$$

Η $ευθεία\ (\varepsilon): y = -4x + 4\ εφάπτεται\ της\ C_g\ στο\ στο\ σημείο\ με\ τετμημένη$ $x_0 = 1.$ $Οπότε\ θα\ έχω:$

$$\left\{\begin{array}{l} g'(x_0) = \lambda_\varepsilon \\ \mathrm{A}(x_0, g(x_0)) \in (\varepsilon) \end{array}\right\} \overset{x_0=1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} g'(1) = -4 \\ \mathrm{A}(1, g(1)) \in (\varepsilon) \end{array}\right\} \overset{(\varepsilon):y=-4x+4}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} g'(1) = -4 \\ g(1) = -4 \bullet 1 + 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left(g'(1) = \frac{a}{1} + 2\beta \bullet 1 = \alpha + 2\beta, g(1) = a\ln 1 + \beta \bullet 1^2 \overset{\ln 1}{=} \alpha \bullet 0 + \beta = \beta\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + 2\beta = -1 \\ \beta = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha + 2 \bullet 0 = -1 \\ \beta = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \end{array}\right\}$$

8.

$Έστω\ η\ παραγωγίσιμη\ συνάρτηση\ f\ τέτοια\ ώστε\ για\ κάθε\ x \in \mathbb{R}\ να\ ισχύει:$

$$x^2 + xf^3(x) + f^2(x) = 3 \quad (*)$$

Ν$α\ βρείτε\ την\ εξίσωση\ της\ εφαπτομένης\ της\ C_f\ στο\ σημείο\ επαφής\ \mathrm{A}(1, f(1))$

$Θέτω\ x = 1\ στην\ σχέση\ (*):$

$$1^2 + 1 \bullet f^3(1) + f^2(1) = 3 \Leftrightarrow 1 + f^3(1) + f^2(1) - 3 = 0 \Leftrightarrow f^3(1) + f^2(1) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f^3(1) - 1^3 + f^2(1) - 1^2 = 0 \quad \overset{\substack{\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) \\ \alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underbrace{\left[f(1) - 1\right]\left[f^2(1) + f(1) \bullet 1 + 1^2\right] + \left[f(1) - 1\right]\left[f(1) + 1\right]}_{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το } f(1)-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[f(1)-1\right]\left[f^2(1)+f(1)+1+f(1)+1\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\left[f(1)-1\right]\left[f^2(1)+2f(1)+1+1\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\left[f(1)-1\right]\left[\underbrace{f^2(1)+2\bullet f(1)\bullet 1+1^2}_{\alpha^2+2\bullet\alpha\bullet\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2}+1\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\left[f(1)-1\right]\left[\left(f(1)+1\right)^2+1\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\left[\left(f(1)+1\right)^2\geq 0\Rightarrow\left(f(1)+1\right)^2+1\geq 1>0\Rightarrow\left(f(1)+1\right)^2+1>0\Rightarrow\left(f(1)+1\right)^2+1\neq 0\right]$$

$$f(1)-1=0\Leftrightarrow f(1)=1$$

$$x^2+xf^3(x)+f^2(x)=3\xRightarrow{\substack{\left.\begin{cases}f(x)=g(x)\\ f,g:\Pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\varepsilon\varsigma\end{cases}\right\}\Rightarrow f'(x)=g'(x)\\ \Pi\rho o\sigma o\chi\acute{\eta}\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\eta}\ \kappa\alpha\iota\\ \acute{o}\chi\iota\ \eta\ \iota\sigma o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{\iota}\alpha!!!}}\left(x^2+xf^3(x)+f^2(x)\right)'=(3)'$$

$$\xRightarrow{\substack{\left(F(x)+G(x)+H(x)\right)'=F'(x)+G'(x)+H'(x)\\ (c)'=0,c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}}\left(x^2\right)'+\left(xf^3(x)\right)'+\left(f^2(x)\right)'=0\xRightarrow{\substack{\left(F(x)G(x)\right)'=F'(x)G(x)+F(x)G'(x)\\ (x)'=1\\ \left(x^a\right)'=ax^{a-1}\\ \left(F^a(x)\right)'=aF^{a-1}(x)F'(x)}}$$

$$2x+(x)'f^3(x)+x\left(f^3(x)\right)'+2f(x)f'(x)=0\Rightarrow$$

$$2x+f^3(x)+3xf^2(x)f'(x)+2f(x)f'(x)=0\xRightarrow{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ x=1}$$

$$2\bullet 1+f^3(1)+3\bullet 1\bullet f^2(1)f'(1)+2f(1)f'(1)=0\Rightarrow$$

$$2+f^3(1)+3f^2(1)f'(1)+2f(1)f'(1)=0\xRightarrow{f(1)=1}2+1^3+3\bullet 1^2\bullet f'(1)+2\bullet 1\bullet f'(1)=0$$

$$\Rightarrow 3+5f'(1)=0\Rightarrow 5f'(1)=-3\Rightarrow 5\Rightarrow f'(1)=-\frac{3}{5}$$

Η *εξίσωση της ευθείας* (ε) *θα είναι*:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=-\frac{3}{5}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{-3x+3}{5}+\frac{5}{5}\Leftrightarrow y=\frac{-3x+8}{5}$$

9.

Έστω η συνάρτηση f *τέτοια ώστε για κάθε* $x>\frac{1}{e}$ *να ισχύει*:

$$x^{f(x)}=e^{x-f(x)}$$

(I) *Να αποδείξετε οτι* $f(x)=\dfrac{x}{1+\ln x}, x>\dfrac{1}{e}$

(II) *Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της* C_f *στο σημείο με τετμημένη* $x_0=e$

(III) *Να αποδείξετε οτι δεν υπάρχει εφαπτομένη της* C_f *που να είναι κάθετη με την ευθεία* $(\eta): y=-x+2017$

$$(\mathrm{I})\, x^{f(x)}=e^{x-f(x)} \Leftrightarrow \ln x^{f(x)}=\ln e^{x-f(x)} \overset{\ln\theta^{\kappa}=\kappa\ln\theta,\theta>0}{\Longleftrightarrow} f(x)\ln x=(x-f(x))\ln e \overset{\ln e=1}{\Longleftrightarrow}$$

$$f(x)\ln x=(x-f(x))\bullet 1 \Leftrightarrow f(x)\ln x=x-f(x) \Leftrightarrow f(x)\ln x+f(x)=x \Leftrightarrow$$

$$[\ln x+1]f(x)=x \Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{\ln x+1}$$

$$\left(\begin{array}{l} x>\dfrac{1}{e} \Rightarrow \ln x>\ln\dfrac{1}{e} \overset{a^{-1}=\frac{1}{a},a\neq 0}{\Longrightarrow} \ln x>\ln e^{-1} \overset{\ln\theta^{\kappa}=\kappa\ln\theta,\theta>0}{\Longrightarrow} \ln x>-\ln e \overset{\ln e=1}{\Longrightarrow} \ln x>-1 \Rightarrow \\ \ln x+1>0 \Rightarrow \ln x+1\neq 0 \end{array}\right)$$

$$(\mathrm{II})\, f'(x)=\left(\frac{x}{\ln x+1}\right)' \overset{\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)'=\frac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}}{=} \frac{(x)'(\ln x+1)-x(\ln x+1)'}{(\ln x+1)^2}=$$

$$\overset{\substack{(x)'=1 \\ (\ln x)'=\frac{1}{x},x>0 \\ (F(x)+G(x))'=F'(x)+G'(x) \\ (c)'=0,c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}}{=} \frac{1\bullet(\ln x+1)-x\left[(\ln x)'+(1)'\right]}{(\ln x+1)^2}=\frac{\ln x+1-x\frac{1}{x}}{(\ln x+1)^2}=\frac{\ln x}{(\ln x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\ln x}{(\ln x+1)^2}, x>\frac{1}{e}$$

$$\acute{E}\chi\omega: e>\frac{1}{e} \overset{e>0}{\Longleftrightarrow} ee>e\frac{1}{e} \Leftrightarrow e^2>1 \Leftrightarrow \sqrt{e^2}>\sqrt{1} \overset{\sqrt{x^2}=|x|}{\Longleftrightarrow} |e|>1 \overset{\substack{\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ e>0\ \theta\alpha \\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ |e|=e}}{\Longleftrightarrow} e>1(\mathrm{I}\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota)$$

$$f'(e)=\frac{\ln e}{(\ln e+1)^2} \overset{\ln e=1}{=} \frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}$$

$$f(e)=\frac{e}{\ln e+1} \overset{\ln e=1}{=} \frac{e}{1+1}=\frac{e}{2}$$

Η $\varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\varsigma\ (\varepsilon)\ \theta\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$:

$$y-f(e)=f'(e)(x-e)\Leftrightarrow y-\frac{e}{2}=\frac{1}{4}(x-e)\Leftrightarrow y=\frac{x}{4}-\frac{e}{4}+\frac{2e}{4}\Leftrightarrow y=\frac{x+e}{4}$$

(III) Έστω υπάχει εφαπτομένη (l) της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}(x_1, f(x_1))$,

$x_1>\frac{1}{e}$ με $(l)\not\parallel y'y$ και $(l)\perp(\eta)$. Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_1 θα έχω:

$$\lambda_l=f'(x_1)\Leftrightarrow \lambda_l=\frac{\ln x_1}{(\ln x_1+1)^2}$$

$(\eta): y=-1\bullet x+2017$

Οπότε: $\lambda_\eta=-1$

$$(l)\perp(\eta)\Leftrightarrow \lambda_l\lambda_\eta=-1\Leftrightarrow \frac{\ln x_1}{(\ln x_1+1)^2}(-1)=-1\Leftrightarrow (\ln x_1+1)^2=\ln x_1\Leftrightarrow$$

$$\ln^2 x_1+2\ln x_1+1-\ln x_1=0\Leftrightarrow (\ln x_1)^2+\ln x_1+1=0$$

Θέτω: $t=\ln x_1$

Τότε θα έχω:

$t^2+t+1=0\ (1)$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\bullet 1\bullet 1=1-4=-3<0$

Επειδή $\Delta<0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Οπότε δεν υπάρχει $x_1>\frac{1}{e}$ που να ικανοποιεί την σχέση $(\ln x_1)^2+\ln x_1+1=0$

Συνεπώς δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να είναι κάθετη με την ευθεία (η)

10.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\frac{2a}{x}+\beta, x\neq 0$. Να βρεθούν τα α,β όταν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $x_1=2$ να είναι ο άξονας $x'x$.

$$f'(x)=\left(x^2+\frac{2a}{x}+\beta\right)' \overset{\substack{(F(x)+G(x)+H(x))'=F'(x)+G'(x)+H'(x)\\ a^{-1}=\frac{1}{a},a\neq 0}}{=} (x^2)'+(2ax^{-1})'+(\beta)'$$

$$\overset{\substack{\left(x^{a}\right)'=ax^{a-1}\\ \left(cF(x)\right)'=cF'(x),c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\\ (c)'=0,c:\Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}}{=}\quad 2x+2a\left(x^{-1}\right)'=2x+2a\left(-1\right)x^{-2}\overset{a^{-\nu}=\frac{1}{a^{\nu}},\alpha\neq 0}{=}2x-2a\frac{1}{x^{2}}=2x-\frac{2a}{x^{2}}$$

$\text{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: f'\left(x\right)=2x-\dfrac{2a}{x^{2}}, x\neq 0$

$\text{H}\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon)\ \varepsilon\varphi\acute{\alpha}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\ \tau\eta\varsigma\ C_f\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \text{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right) \acute{o}\tau\alpha\nu:$
$\left\{\begin{matrix} f'\left(x_0\right)=\text{O}\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\ \delta\iota\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\nu\sigma\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ (\varepsilon) \\ \text{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)\in(\varepsilon) \end{matrix}\right\}$

$\text{O}\ \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha\varsigma\ \left(x'x\right): y=0\bullet x+0\ \varepsilon\varphi\acute{\alpha}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\ \tau\eta\varsigma\ C_f\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \mu\varepsilon\ \tau\varepsilon\tau\mu\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta$ $x_1=2. \text{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left\{\begin{matrix} f'\left(x_1\right)=\lambda_{x'x} \\ \text{A}\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)\in\left(x'x\right)\end{matrix}\right\}\overset{x_1=2}{\Leftrightarrow}\left\{\begin{matrix} f'(2)=0 \\ f(2)=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} 2\bullet 2-\dfrac{2a}{2^2}=0 \\ 2^2+\dfrac{2a}{2}+\beta=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} 4-\dfrac{a}{2}=0 \\ 2^2+\dfrac{2a}{2}+\beta=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{a}{2}=4 \\ 4+a+\beta=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} a=8 \\ 4+8+\beta=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} a=8 \\ 12+\beta=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} a=8 \\ \beta=-12\end{matrix}\right\}$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1.

$\text{N}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \gamma\rho\alpha\varphi\iota\kappa\acute{\eta}\varsigma\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma$ $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\varsigma\ f\left(x\right)=x^2+4x+3\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0=0$

2.

$\text{N}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \gamma\rho\alpha\varphi\iota\kappa\acute{\eta}\varsigma\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma$ $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\varsigma\ f\left(x\right)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{3}\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma\ \text{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right) \acute{o}\tau\alpha\nu\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota$ $f'\left(x_0\right)=3f\left(x_0\right)$

3.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\tau\rho\eta\sigma\eta\ f\left(x\right)=7x^4-14x^2+13\ \kappa\alpha\iota\ C_f\ \eta\ \gamma\rho\alpha\varphi\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\eta\varsigma\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta.$ $\text{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi o\upsilon\nu\ \tau\rho\acute{\iota}\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \tau\eta\varsigma\ C_f\ \sigma\tau\alpha\ o\pi o\acute{\iota}\alpha\ o\iota\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\varsigma$ $\tau\eta\varsigma\ C_f\ \nu\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\varepsilon\varsigma\ \mu\varepsilon\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ y=9$

4.

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της f με $f(x)=x^2+2x+8$ που είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): y=\frac{x}{2}+7$

5.

Να βρεθεί τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $f(x)=\frac{x^2}{2}$ που διέρχονται απο το σημείο $\mathrm{A}\left(3,\frac{5}{2}\right)$

6.

Να αποδείξετε οτι η ευθεία $y=\frac{x}{2}$ είναι εφάπτομένη της C_f με $f(x)=\frac{e^{\frac{x}{e}}}{2}$

7.

(I) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-2x^2$. Να αποδείξετε οτι εφαπτομένες της C_f που διέρχονται απο το σημείο $\mathrm{A}(1,0)$ είναι ο άξονας $x'x$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=-8x+8$

(II) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=a\ln x+\beta x^2, x>0$. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $(\varepsilon): y=-8x+8$ να εφάπτεται της C_g στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$

8.

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις σχέσεις

$f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}, f(0)=2017, f'(0)=1, f(1)=e$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(\ln x)+\ln f(x), x>0$

Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$ είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$ να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $(\varepsilon): y=ax+\beta$ να εφάπτεται της C_g στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$

Υποδειξη:

$$g'(x)=\left(f(\ln x)\right)'+\left(\ln f(x)\right)'=f'(\ln x)(\ln x)'+\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(\ln x)}{x}+\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Η ευθεία $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta$ εφάπτεται της C_g στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$ όταν: $\left(g'(x_0)=\lambda_\varepsilon, \mathrm{A}\left(x_0, g(x_0)\right)\in(\varepsilon)\right)$