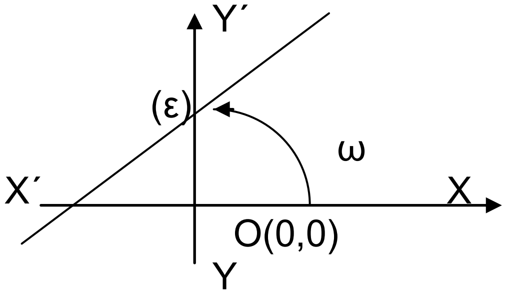
# <u>Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΤΗΣ $C_f$ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ</u>

## <u>ΕΥΘΕΙΑ</u>

| *Ο συντελεστής διεύθυνσης* | |
|---|---|
| Πότε ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) | Όταν (ε) $\nparallel$ Y΄Y |
| Πως ορίζεται ο συνυτελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) | <br>$\lambda = \varepsilon\varphi\omega$<br><br>λ= Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε)<br><br>ω = Η γωνία που διαγράφει ο άξονας X΄X όταν στραφεί αντίθετα<br>με τους δείκτες του ρολογιού έτσι ώστε να συναντήσει την ευθεία (ε) |
| Από ποια σχέση δινεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) όταν γνωρίζω ότι τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ ανήκουν στην (ε) | $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$<br>λ= Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε)<br>Τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ ανήκουν στην (ε) |
| *Συνθήκη παραλληλίας* | $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2) \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$<br>$\lambda_1$ : Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $(\varepsilon_1)$<br>$\lambda_2$ : Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $(\varepsilon_2)$ |

| | |
|---|---|
| Συνθήκη καθετότητας | $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$<br>$\lambda_1$ : Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $(\varepsilon_1)$<br>$\lambda_2$ : Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $(\varepsilon_2)$ |
| Από ποια σχέση δίνεται ο συντελεστής διευθυνσης της ευθείας (ε) όταν ευθεία (ε) έχει εξίσωση εξίσωση<br>$(\varepsilon) : y = \alpha x + \beta$ | $(\varepsilon) : y = \alpha x + \beta$<br><br>$\lambda = \alpha$<br><br>λ= Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) |
| Από ποια σχέση δίνεται ο συντελεστής διευθυνσης της ευθείας (ε) όταν ευθεία (ε) έχει εξίσωση<br>$(\varepsilon) : A x + B y + \Gamma = 0$ με $B \neq 0$ | $(\varepsilon) : A x + B y + \Gamma = 0$<br>$\lambda = -\dfrac{A}{B}$ όταν $B \neq 0$<br>λ= Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) |

| Εξίσωση ευθείας (ε) όταν γνωρίζω το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε) και ένα σημείο $A(x_1,y_1)$ που ανήκει στην (ε) |
|---|
| $(\varepsilon) : y - y_1 = \lambda (x - x_1)$<br>λ= Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε)<br>$A(x_1,y_1)$ σημείο της (ε) |

| Εξίσωση ευθείας (ε) όταν (ε)//Υ΄Υ και ένα σημείο $A(x_1,y_1)$ που ανήκει στην (ε) |
|---|
| $(\varepsilon) : x = x_1$<br>(ε)//Υ΄Υ και $A(x_1,y_1)$ σημείο της (ε) |

| Εξίσωση ευθείας (ε) όταν (ε)//Χ΄Χ και ένα σημείο $A(x_1,y_1)$ που ανήκει στην (ε) |
|---|
| $(\varepsilon) : y = y_1$<br>(ε)//Χ΄Χ και $A(x_1,y_1)$ σημείο της (ε) |

| |
|---|
| Εξίσωση ευθείας (ε) όταν γνωρίζω το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε) και η αρχή των αξόνων δηλ. το σημείο Ο(0,0) ανήκει στην (ε) |
| (ε) : $y = \lambda x$<br>λ = Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε)<br>Όταν το σημείο Ο(0,0) ανήκει στην (ε) |

| |
|---|
| *ΓΕΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ* |
| Η εξίσωση $A x + B y + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία όταν $\lvert A\rvert + \lvert B\rvert \neq 0$ δηλ. η εξίσωση $A x + B y + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία όταν τα Α και Β δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν |

| |
|---|
| *Απόσταση σημείου από ευθεία* |
| $d(A, \varepsilon) = \dfrac{\lvert A x_o + B y_o + \Gamma \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$<br>(ε) : $A x + B y + \Gamma = 0$<br>d(A, ε) : Απόσταση του σημείου $A(x_o , y_o)$ από την ευθεία (ε) |

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

| |
|---|
| Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 – 6x^2 + 5$ και $C_f$ η γραφική της παράσταση.Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τρια σημεία της $C_f$ στα οποία οι εφαπτομένες της $C_f$ είναι παράλληλες με την ευθεία (ε):y=1 |

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική
$f'(x) = (3x^4 – 6x^2 + 5)' = (3x^4)' – (6x^2)' + (5)' = 3 (x^4)' – 6 ( x^2)' + 0 =$
$= 3 \cdot 4x^3 – 6 \cdot 2x = 12x^3 – 12x$
Αν (ℓ) η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείοεπαφής $A(x_o, f(x_o))$Τότε θα ισχύει: $\lambda_\ell = f'( x_o)$
Έχω : $\lambda_\varepsilon = 0$
Επειδή (ℓ)//(ε) θα έχω : $\lambda_\ell = \lambda_\varepsilon$ ή $f'( x_o) = 0$ ή$12 x_o^3 – 12 x_o = 0$ ή

ή $12x_o(x_o^2-1) = 0$ ή $12x_o(x_o-1)(x_o+1) = 0$ ή

$$\left.\begin{array}{l} x_o=0 \\ \text{ή} \\ x_o-1=0 \\ \text{ή} \\ x_o+1 = 0 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{l} x_o=0 \\ \text{ή} \\ x_o=1 \\ \text{ή} \\ x_o+ = -1 \end{array}\right\}$$

Αν $x_o=0$ έχω : $f(0) = 3\cdot 0^4-6\cdot 0^2+5=5$ Οπότε έχω το σημείο A(0,5)
Αν $x_o=1$ έχω : $f(1) = 3\cdot 1^4-6\cdot 1^2+5=2$ Οπότε έχω το σημείο B(1,2)
Αν $x_o=-1$ έχω: $f(-1)=3\cdot(-1)^4-6\cdot(-1)^2+5=5$ Οπότε έχω το σημείο Γ(–1,2)

2.

| |
|---|
| Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f με $f(x) = 3x^2+5x+1$ που είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $x-y+2=0$ |

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική
$f'(x) = (3x^2+5x+1)'= (3x^2)'+(5x)'+(1)'= 3\,(x^2)'+ 5(x)'+0=$
$= 3\cdot 2x+ 5\cdot 1=6x+5$
Αν ($\ell$) η επαπτομένη της $C_f$ στο σημείοεπαφής $A(x_o, f(x_o))$ Τότε θα ισχύει: $\lambda_\ell = f'(x_o)$ ή $\lambda_\ell = 6x_o+5$

Έχω : $\lambda_\varepsilon = -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{1}{-1} = 1$

Επειδή ($\ell$) $\perp$ (ε) θα έχω : $\lambda_\ell \cdot \lambda_\varepsilon = -1$ ή $(6x_o+5)\cdot 1=-1$ ή $6x_o+5=-1$

ή $6x_o = -5-1$ ή $6x_o= -6$ ή $\dfrac{6x_o}{6} = \dfrac{-6}{6}$ ή $x_o= -1$
$f(x_o) = f(-1)= 3(-1)^2+5(-1)+1= 3\cdot 1-5+1=3-5+1=-1$
$f'(x_o) = f'(-1) =6(-1)+5 = -6+5=-1$
Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο επαφής $A(x_o,f(x_o))$ θα είναι :

$y- f(x_o) = f'(x_o)(x- x_o) \Longleftrightarrow y- (-1) =(-1)\,[x- (-1)] \Longleftrightarrow$

$y+1 = -(x+1) \Longleftrightarrow y+1 = -x-1 \Longleftrightarrow y+1+x+1=0 \Longleftrightarrow$
$x+ y+2=0$

3.

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ που διέρχονται από το σημείο Α(1,–4 )

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'=\frac{1}{2}(x^2)'=\frac{1}{2}2x=x$$

Αν (ℓ) η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο επαφής $A(x_o,f(x_o))$ Τότε η ευθεία (ℓ) θα έχει εξίσωση :

$$y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o) \Longleftrightarrow y-\frac{x_o^2}{2}=x_o(x-x_o) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{2y-x_o^2}{2}=x_ox-x_o^2 \Longleftrightarrow 2y-x_o^2=2(x_ox-x_o^2) \Longleftrightarrow 2y-x_o^2=2x_ox-2x_o^2$$

$$\Longleftrightarrow 2y-x_o^2-2x_ox+2x_o^2=0 \Longleftrightarrow -2x_ox+2y+x_o^2=0$$

$(\ell): -2x_ox+2y+x_o^2=0$

Επειδή Α(1,–4) θα έχω : $-2x_o x_A+2y_A+x_o^2=0 \Longleftrightarrow$

$$-2x_o\cdot 1+2(-4)+x_o^2=0 \Longleftrightarrow x_o^2-2x_o-8=0$$

$$\boxed{1}\,x_o^2\,\boxed{-2}\,x_o\,\boxed{-8}=0 \quad (1)$$

$$\alpha=1 \quad \beta=-2 \quad \gamma=-8$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)=4+32=36$$

Επειδή Δ > 0 η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$x_o=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{36}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 6}{2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2+6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ \dfrac{2-6}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Αν $x_o = 4$ η ευθεία (ℓ) θα έχει εξίσωση :

$$-2x_ox+2y+x_o^2=0 \iff -2\cdot 4x+2y+4^2=0 \iff -8x+2y+16=0 \iff$$

$$2(-4x+y+8)=0 \iff -4x+y+8=0$$

Αν $x_o = -2$ η ευθεία (ℓ) θα έχει εξίσωση :

$$-2x_ox+2y+x_o^2=0 \iff -2\cdot(-2)x+2y+{}^2=0 \iff 4x+2y+(-2)^2=0 \iff$$

$$2(2x+y+8)=0 \iff 2x+y+8=0$$

4.

Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2+\beta, & x<1 \\ \dfrac{\gamma}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της $C_f$ στο σημείο Α(1, f(1)) να εφαπτομένη παράλληλη με την ευθεία (ε): $-2x+y+2=0$

Έστω $x_o=1$ Θεωρώ την συνάρτηση :

$$\lambda(h) = \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{f(1+h)-\gamma}{h} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{f(1+h)-\gamma}{h}, & 1+h>0 \\ \dfrac{f(1+h)-\gamma}{h}, & 1+h<0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\gamma}{1+h}-\gamma}{h}, & h>0 \\ \dfrac{\alpha(1+h)^2+\beta-\gamma}{h}, & h<0 \end{cases} =$$

Αν h>0 θα έχω :

$$\lambda(h) = \frac{\dfrac{\gamma}{1+h} - \dfrac{\gamma(1+h)}{1+h}}{h} = \frac{\dfrac{\gamma}{1+h} - \dfrac{\gamma+\gamma h}{1+h}}{h} = \frac{\dfrac{\gamma-(\gamma+\gamma h)}{1+h}}{h}$$

$$= \frac{\gamma-\gamma-\gamma h}{h(1+h)} = \frac{-\gamma h}{h(1+h)} = -\frac{\gamma}{1+h}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \lambda(h) = \lim_{h\to 0^+} \left(-\frac{\gamma}{1+h}\right) = -\gamma$$

Αν h<0 θα έχω :

$$\lambda(h) = \frac{1}{h}[\,\alpha(1+h)^2+\beta-\gamma]$$

Έστω $\alpha+\beta-\gamma \neq 0$Τότε θα έχω :

$$\lim_{h\to 0^-} \lambda(h) = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}[\,\alpha(1+h)^2+\beta-\gamma] = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} \lim_{h\to 0^-} [\,\alpha(1+h)^2+\beta-\gamma] =$$

$$=(-\infty)\,(\alpha+\beta-\gamma) = \begin{cases} -\infty\,, & \alpha+\beta-\gamma>0 \\ +\infty\,, & \alpha+\beta-\gamma<0 \end{cases} \quad (\text{ Άτοπο})$$

Υπάρχει εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο Α(1, f(1)) παράλληλη με την ευθεία (ε): $-2x+y+2=0$.Οπότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o=1$.Συνεπώς υπάρχει το όριο της συνάρτησης λ στο σημείο $h_o=0$ και είναι πραγματικός αριθμός.Άρα υπάρχει το αρισερό πλευρικό όριο της συνάρτησης λ στο σημείο $h_o=0$ και είναι πραγματικός αριθμός.Άρα : $\alpha+\beta-\gamma=0$ ή $\gamma=\alpha+\beta$ (1)

$$\lambda(h) = \frac{\alpha(1+h)^2+\beta-\gamma}{h} = \frac{\alpha(1^2+2\cdot 1\cdot h+h^2)+\beta-\gamma}{h} = \frac{\alpha(1+2h+h^2)+\beta-\gamma}{h} \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{\alpha \cdot 1+\alpha \cdot 2h+\alpha h^2+\beta-(\alpha+\beta)}{h} = \frac{\alpha+2\alpha h+\alpha h^2+\beta-\alpha-\beta}{h} = \frac{\alpha\, h(2+h)}{h} =$$

$= \alpha(2+h)$

$\lim\limits_{h\to 0^-} \lambda(h) = \lim\limits_{h\to 0^-} \alpha(2+h) = 2\alpha$

Υπάρχει εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο Α(1, f(1)) παράλληλη με την ευθεία (ε): –2x+y+2 =0.Οπότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o$=1.Συνεπώς υπάρχει το όριο της συνάρτησης λ στο σημείο $h_o$=0 και είναι πραγματικός αριθμός.Άρα θα ισχύει :

$\lim\limits_{h\to 0^-} \lambda(h) = \lim\limits_{h\to 0^{-+}} \lambda(h)$ ή $2\alpha = -\gamma$ ή $2\alpha = -(\alpha+\beta)$ ή $2\alpha = -\alpha-\beta$ή
$2\alpha + \alpha = \beta$ ή $\beta = 3\alpha$ (2)
Έχω : $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \lambda(h) = 2\alpha$
Έστω (ℓ) η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο Α(1, f(1))Τότε θα ισχύει :
$\lambda_\ell = f'(1) = 2\alpha$

Έχω : $\lambda_\varepsilon = -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{-2}{1} = 2$

Επειδή (ℓ)//(ε) θα έχω : $\lambda_\ell = \lambda_\varepsilon$ ή$2\alpha = 2$ ή $\dfrac{2\alpha}{2} = \dfrac{2}{2}$ ή $\alpha = 1$

Θέτω α=1στην εξίσωση(2) : $\beta = 3\alpha = 3 \cdot 1 = 3$
Θέτω α=1και β=3στην εξίσωση(1) : $\gamma = \alpha+\beta = 1+3 = 4$
5.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία y=x είναι εφαπτομένη της $C_f$ με
$f(x) = e^{x/e}$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων x/e και $e^x$

$$f'(x) = (e^{x/e})' = e^{x/e}\left(\frac{x}{e}\right)' = e^{x/e}\left(\frac{1}{e}x\right)' = e^{x/e} \cdot \frac{1}{e} \cdot (x)' =$$

$$= e^{x/e} \cdot \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{e^{x/e}}{}$$

e e

Θεωρώ την ευθεία (ε) με εξίσωση y=x.Τότε θα έχω: $\lambda_\varepsilon = 1$
Έστω (ℓ) η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο επαφής $A(x_o, f(x_o))$με (ℓ)//(ε)

Τότε θα ισχύει: $\lambda_\ell = f'(x_o) = \dfrac{e^{x_o/e}}{e}$

Επειδή (ℓ)//(ε) θα έχω : $\lambda_\ell = \lambda_\varepsilon$ ή $\dfrac{e^{x_o/e}}{e} = 1$ ή $e^{x_o/e} = e$ ή $e^{x_o/e} = e^1$ ή

$\dfrac{x_o}{e} = 1$ ή $x_o = e$

Άρα : A(e,e)
Έχω : $y_A = x_A$ Οπότε A(e,e)є(ε)
Επειδή (ℓ)//(ε) και A(e,e)є(ε) , A(e,e)є(ℓ) προκύπτει ότι οι ευθείες (ℓ) και (ε) ταυτίζονται.Άρα η ευθεία y=x είναι εφαπτομένη της $C_f$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 – 6x^2 + 6$ και $C_f$ η γραφική της παράσταση.Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τρια σημεία της $C_f$ στα οποία οι εφαπτομένες της $C_f$ είναι παράλληλες με την ευθεία (ε):y=1

2.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f με $f(x) = 3x^2+5x+8$που είναι κάθετη στην ευθεία (ε):x–y+7=0

3.

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής

$f(x)= \dfrac{x^2}{2}$ που διέρχονται από το σημείο Α(–5/2,3 )

4.

$$\text{Αν } f(x) = \begin{cases} -\alpha x^2+\beta \ , & x<1 \\ \dfrac{\gamma}{x} \ , & x \geq 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των α,β,γєIR για τις οποίες η γραφική παράσταση της $C_f$ στο σημείο A(1, f(1)) να εφαπτομένη παράλληλη με την ευθεία (ε): –2x+y+2 =0