ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

$$\Delta \acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-x}{x-1}, x\in\left(-\infty,1\right)\\ 1, x=1\\ \dfrac{\beta\sqrt{x^2+3}-x+\gamma}{x-1}, x\in\left(1,+\infty\right)\end{cases}$$

$\mathrm{N}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta o\acute{\upsilon}\nu\ \tau\alpha\ \alpha,\beta\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0=1$

$\acute{\mathrm{E}}\sigma\tau\omega\ \alpha-1\neq 0.\mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\lim_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax^2-x}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}\lim_{x\to 1^-}\left(ax^2-x\right)=\left(-\infty\right)\left(a-1\right)=\begin{cases}-\infty, a-1>0\\ +\infty, a-1<0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}-\infty, a>1\\ +\infty, a<1\end{cases}\left(\acute{\mathrm{A}}\tau o\pi o\right)$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0=1\,\theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)= f\left(1\right)\in\mathbb{R}.\ \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \tau o \lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)$

$\kappa\alpha\iota\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma.\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$a-1=0\Leftrightarrow a=1$

$\mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \gamma\iota\alpha\ x\in\in\left(-\infty,1\right)\theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$f\left(x\right)=\frac{ax^2-x}{x-1}\overset{\alpha=1}{=}\frac{x^2-x}{x-1}=\frac{x\left(x-1\right)}{x-1}=x$$

$$\lim_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1^-} x=1$$

$\acute{\mathrm{E}}\sigma\tau\omega\ 2\alpha+\gamma-1\neq 0.\mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\lim_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\beta\sqrt{x^2+3}-x+\gamma}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\lim_{x\to 1^+}\left(\beta\sqrt{x^2+3}-x+\gamma\right)=$$

$$\left(+\infty\right)\left(2\beta+\gamma-1\right)=\begin{cases}+\infty, 2\beta+\gamma-1>0\\ +\infty, 2\beta+\gamma-1<0\end{cases}\left(\acute{\mathrm{A}}\tau o\pi o\right)$$

Επειδή η συνάρτηση f *είναι συνεχής στο σημείο* $x_0 = 1$ *θα ισχύει*
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \in \mathbb{R}$. *Οπότε υπάρχει το* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
και είναι πραγματικός αριθμός.Συνεπώς θα έχω:

$2\beta + \gamma - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\gamma = 1 - 2\beta}\ (1)$

Τότε για $x \in \in (1, +\infty)$ *θα έχω*:

$$f(x) = \frac{\beta\sqrt{x^2+3} - x + \gamma}{x-1} \overset{\gamma=1-2\beta}{=} \frac{\beta\sqrt{x^2+3} - x + 1 - 2\beta}{x-1} =$$

$$\frac{\beta\sqrt{x^2+3} - 2\beta}{x-1} + \frac{-x+1}{x-1} = \frac{\beta\left(\sqrt{x^2+3} - 2\right)}{x-1} + \frac{-(x-1)}{x-1} =$$

$$= \beta\frac{\left(\sqrt{x^2+3} - 2\right)\left(\sqrt{x^2+3} + 2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3} + 2\right)} - 1 = \beta\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2 - 2^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3} + 2\right)} - 1 =$$

$$= \beta\frac{x^2 - 1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3} + 2\right)} - 1 = \beta\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3} + 2\right)} - 1 =$$

$$= \beta\frac{\cancel{(x-1)}\,(x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3} + 2\right)} - 1 = \frac{\beta(x+1)}{\sqrt{x^2+3} + 2} - 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{\beta(x+1)}{\sqrt{x^2+3} + 2} - 1\right] = \frac{2\beta}{4} - 1 = \frac{\beta}{2} - 1$$

Επειδή η συνάρτηση f *είναι συνεχής στο σημείο* $x_0 = 1$ *θα ισχύει*

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} - 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} = 2 \Leftrightarrow \beta = 4$$

Θέτω $\beta = 2$ *στην σχέση* (1):

$$\gamma = 1 - 2\beta \overset{\beta=2}{=} 1 - 2 \bullet 2 = 1 - 4 = -3$$

2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + 1}{x^2 - 2x + 1}, x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \\ -1, x = 1 \end{cases}$

Να βρεθούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *ώστε η* f *να είναι συνεχής*

Αν $x \in (-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ $\theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$f(x)=\frac{\alpha x^3+\beta x^2-\gamma x+1}{x^2-2x+1}=\frac{\alpha x^3+\beta x^2-\gamma x+1}{\underbrace{x^2-2\bullet x\bullet 1+1^2}_{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}}=\frac{\alpha x^3+\beta x^2-\gamma x+1}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}\left(\alpha x^3+\beta x^2-\gamma x+1\right)$$

Η *συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο* $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ *ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.Συνεπώς η* f *είναι συνεχής στο* $\mathbb{R}$ *αν και μόνο αν είναι συνεχής στο* $x_0=1$

Έστω $\alpha+\beta-\gamma+1\neq 0$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}\lim_{x\to 1}\left(\alpha x^3+\beta x^2-\gamma x+1\right)=(+\infty)(\alpha+\beta-\gamma+1)=$$

$$=\begin{cases}+\infty, \alpha+\beta-\gamma+1>0\\ -\infty, \alpha+\beta-\gamma+1<0\end{cases}(\text{Άτοπο})$$

Επειδή *η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο σημείο* $x_0=1$ *θα ισχύει* $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)\in\mathbb{R}$. Οπότε *υπάρχει το* $\lim_{x\to 1} f(x)$ *και είναι πραγματικός αριθμός.Συνεπώς θα έχω*:

$$\alpha+\beta-\gamma+1=0 \Leftrightarrow \boxed{\gamma=\alpha+\beta+1}\ (1)$$

$$f(x)=\frac{\alpha x^3+\beta x^2-\gamma x+1}{(x-1)^2}\overset{\gamma=\alpha+\beta+1}{=}\frac{\alpha x^3+\beta x^2-(\alpha+\beta+1)x+1}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{\alpha x^3-\alpha x+\beta x^2-\beta x-x+1}{(x-1)^2}=\frac{\alpha x(x-1)(x+1)+\beta x(x-1)-(x-1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{(x-1)}\left[\alpha x(x+1)+\beta x-1\right]}{(x-1)^{\cancel{2}}}=\frac{\alpha x^2+(\alpha+\beta)x-1}{x-1}$$

Έστω $2\alpha+\beta-1\neq 0$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\lim_{x\to 1}\left[\alpha x^2+(\alpha+\beta)x-1\right]=(+\infty)(2\alpha+\beta-1)=$$

$$=\begin{cases}+\infty, 2\alpha+\beta-1>0\\-\infty, 2\alpha+\beta-1<0\end{cases}\left(\textit{Άτοπο}\right)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$ θα ισχύει

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\in\mathbb{R}$. Οπότε υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός. Συνεπώς θα έχω:

$$2\alpha+\beta-1=0\Leftrightarrow \boxed{\beta=-2\alpha+1}\ (2)$$

$$f(x)=\frac{\alpha x^2+(\alpha+\beta)x-1}{x-1}\overset{\beta=-2\alpha+1}{=}\frac{\alpha x^2+(\alpha-2\alpha+1)x-1}{x-1}=$$

$$=\frac{\alpha x^2-\alpha x+x-1}{x-1}=\frac{\alpha x^2-\alpha x}{x-1}+\frac{x-1}{x-1}=\frac{\alpha x(x-1)}{x-1}+\frac{x-1}{x-1}=\alpha x+1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(\alpha x+1)=\alpha+1$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$ θα ισχύει:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \alpha+1=-1\Leftrightarrow \alpha=-2$$

Θέτω $\alpha=-2$ στην σχέση (2):

$$\beta=-2\alpha+1\overset{\alpha=-2}{=}-2(-2)+1=5$$

Θέτω $\alpha=-2, \beta=5$ στην σχέση (1):

$$\gamma=\alpha+\beta+1\overset{\substack{\alpha=-2\\ \beta=5}}{=}-2+5+1=4$$

3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}3\alpha e^{x+1}+x, x\le -1\\ 2x^2-\alpha x+3\beta, -1<x<0\\ \beta\eta\mu x+\alpha\sigma\upsilon\nu x+1, x\ge 0\end{cases}$

Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής

Η συνάρτηση e^{x+1} είναι συνεχής στο $(-\infty,-1)$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $x+1$ και e^x. Η συνάρτηση $3\alpha e^{x+1}$ είναι συνεχής στο $(-\infty,-1)$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Η συνάρτηση $3\alpha e^{x+1}+x$ είναι συνεχής στο $(-\infty,-1)$ άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Η $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ 2x^2-\alpha x+3\beta\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ (-1,0)\ \omega\varsigma\ \pi o\lambda\upsilon\omega\nu\upsilon\mu\iota\kappa\acute{\eta}.$

Η $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ \beta\eta\mu x+\alpha\sigma\upsilon\nu x+1\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ (0,+\infty)\ \omega\varsigma\ \acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha$ $\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\omega}\nu\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu.$Ο$\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \alpha\nu\ \kappa\alpha\iota\ \mu\acute{o}\nu o$ $\alpha\nu\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ x_1=-1\ \kappa\alpha\iota\ x_2=0.$Ά$\rho\alpha\ \pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\ \nu\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^+} f(x)=f(-1)\,(1)\ \kappa\alpha\iota\ \lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)\,(2)$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\left(3\alpha e^{x+1}+x\right)=3\alpha e^0-1=3\alpha-1$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\left(2x^2-\alpha x+3\beta\right)=2(-1)^2-\alpha(-1)+3\beta=2+\alpha+3\beta$$

$$f(-1)=3\alpha e^0-1=3\alpha-1$$

Α$\pi o\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (1)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^+} f(x)=f(-1)\Leftrightarrow 3\alpha-1=2+\alpha+3\beta\Leftrightarrow \boxed{2\alpha-3\beta=3}\,(3)$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(2x^2-\alpha x+3\beta\right)=2\bullet0^2-\alpha\bullet0+3\beta=3\beta$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\beta\eta\mu x+\alpha\sigma\upsilon\nu x+1\right)=\beta\eta\mu0+\alpha\sigma\upsilon\nu0+1\overset{\substack{\eta\mu0=0\\ \sigma\upsilon\nu0=1}}{=}\alpha+1$$

$$f(0)\,\beta\eta\mu0+\alpha\sigma\upsilon\nu0+1=\alpha+1$$

Α$\pi o\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (2)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow 3\beta=\alpha+1\Leftrightarrow \boxed{\beta=\frac{\alpha+1}{3}}\,(4)$$

Α$\pi o\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (3)\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$2\alpha-3\beta=3\overset{3\beta=\alpha+1}{\Longleftrightarrow}2\alpha-(\alpha+1)=3\Leftrightarrow 2\alpha-\alpha-1=3\Leftrightarrow 2\alpha=4\Leftrightarrow \alpha=\frac{4}{2}\Leftrightarrow \alpha=2$$

Θ$\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \alpha=2\ \sigma\tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (4):$

$$\beta=\frac{\alpha+1}{3}=\frac{2+1}{3}=\frac{3}{3}=1$$

4.

Α$\nu\ \gamma\iota\alpha\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:$

$f^2(x)+4f(x)+4\sigma\upsilon\nu^2x\le0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}$

$\nu\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ 0$

$$f^2(x)+4f(x)+4\sigma\upsilon\nu^2x\le0\Leftrightarrow f^2(x)+4f(x)\le-4\sigma\upsilon\nu^2x\Leftrightarrow$$

$$\underbrace{f^2(x)+2\cdot f(x)\cdot 2+2^2}_{\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2}\le 2^2-4\sigma\upsilon\nu^2x\Leftrightarrow\left(f(x)+2\right)^2\le 4\left(1-\sigma\upsilon\nu^2x\right)\overset{\eta\mu^2x=1-\sigma\upsilon\nu^2x}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(f(x)+2\right)^2\le 4\eta\mu^2x\Leftrightarrow\sqrt{\left(f(x)+2\right)^2}\le\sqrt{\left(2\eta\mu x\right)^2}\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{\Longleftrightarrow}\left|f(x)+2\right|\le\left|2\eta\mu x\right|$$

$$\overset{|x|\le\theta\Leftrightarrow-\theta\le x\le\theta,\theta\ge 0}{\Longleftrightarrow}\quad-\left|2\eta\mu x\right|\le f(x)+2\le\left|2\eta\mu x\right|\Leftrightarrow-2\left|\eta\mu x\right|-2\le f(x)\le 2\left|\eta\mu x\right|-2$$

$\text{Α}\nu\ x=0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$-2\left|\eta\mu 0\right|-2\le f(0)\le\left|2\eta\mu 0\right|-2\Leftrightarrow-2\le f(0)\le-2\Leftrightarrow f(0)=-2$$

$$\acute{\text{Ε}}\chi\omega:\left\{\begin{matrix}(\text{I})-\left|2\eta\mu x\right|-2\le f(x)\le\left|2\eta\mu x\right|-2\\(\text{II})\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|2\eta\mu x\right|-2\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\left|2\eta\mu x\right|-2\right)=-2\end{matrix}\right\}$$

$\text{Ο}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha\pi o\ \tau o\ \kappa\rho\iota\tau\acute{\eta}\rho\iota o\ \tau\eta\varsigma\ \pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-2=f(0)\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

$\acute{\text{Α}}\rho\alpha\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0=0$

5.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \gamma\iota\alpha\ \tau\eta\nu\ o\pi o\acute{\iota}\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:$
$f^3(x)+2f(x)=x+2014\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}$
$\text{Ν}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma$

$\text{Α}\nu\ x_0\in\mathbb{R}.\Theta\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\omega\ o\tau\iota:\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$$\left.\begin{cases}f^3(x)+2f(x)=x+2014\\f^3(x_0)+2f(x_0)=x_0+2014\end{cases}\right\}(-)$$

$$f^3(x)+2f(x)-\left(f^3(x_0)+2f(x_0)\right)=x+2014-\left(x_0+2014\right)\Rightarrow$$

$$f^3(x)-f^3(x_0)+2f(x)-2f(x_0)=x+2014-x_0+2014\overset{\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)}{\Longrightarrow}$$

$$\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+2\left[f(x)-f(x_0)\right]=x-x_0\Rightarrow$$

$$\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\right]=x-x_0\,(1)$$

$$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2=f^2(x)+2f(x)\frac{f(x_0)}{2}+\left(\frac{f(x_0)}{2}\right)^2-\left(\frac{f(x_0)}{2}\right)^2+f^2(x_0)+2$$

$$=\left[f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right]^2-\frac{f^2(x_0)}{4}+\frac{4f^2(x_0)}{4}+2=\left[f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right]^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+2$$

$$\left.\begin{cases}\left[f(x)+\dfrac{f(x_0)}{2}\right]^2\geq 0\\[2mm] \dfrac{3f^2(x_0)}{4}\geq 0\end{cases}\right\}(+)$$

$$\left[f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right]^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}\geq 0\Rightarrow\left[f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right]^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+2\geq 2>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right]^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+2>0\Rightarrow\left[f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right]^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+2\neq 0$$

$\text{Απο την σχέση } (1)\ \text{θα έχω}:$

$$\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\right]=x-x_0\overset{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\neq 0}{\Longrightarrow}$$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}\Rightarrow$$

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|\frac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}\right|\Rightarrow$$

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\frac{\left|x-x_0\right|}{\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\right|}\overset{\substack{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2>0\Rightarrow\\ \left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\right|=f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}}{\Longrightarrow}$$

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\frac{\left|x-x_0\right|}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}$$

$$\text{Έχω}: f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\geq 2\Rightarrow\frac{1}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{\left|x-x_0\right|}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}\leq\frac{\left|x-x_0\right|}{2}\Rightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|\leq\frac{\left|x-x_0\right|}{2}\Rightarrow$$

$$-\frac{\left|x-x_0\right|}{2}\leq f(x)-f(x_0)\leq\frac{\left|x-x_0\right|}{2}\Rightarrow-\frac{\left|x-x_0\right|}{2}+f(x_0)\leq f(x)\leq\frac{\left|x-x_0\right|}{2}+f(x_0)$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})-\dfrac{\left|x-x_0\right|}{2}+f(x_0)\leq f(x)\leq\dfrac{\left|x-x_0\right|}{2}+f(x_0)\\[2mm] (\mathrm{II})\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\dfrac{\left|x-x_0\right|}{2}+f(x_0)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{\left|x-x_0\right|}{2}+f(x_0)\right)=f(x_0)\end{array}\right\}$$

$\text{Οπότε απο το κριτήριο της παρεμβολής θα έχω } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Άρα η f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ θα είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της οπότε θα είναι συνεχής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 - 4}{x-2}, x \in (-\infty, 1) \\ 4, x = 2 \\ \dfrac{\beta\sqrt{x^2+5} - x + \gamma}{x-2}, x \in (2, +\infty) \end{cases}$

Να βρεθούν τα α, β όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στα σημείο $x_0 = 2$

2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 1}{x^2 + 2x + 1}, x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \\ -1, x = -1 \end{cases}$

Να βρεθούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής

3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha e^{x+2} + x^2, x \leq -2 \\ x^2 + \alpha x + \beta, -2 < x < 0 \\ \alpha \eta\mu x - \beta \sigma\upsilon\nu x + 2, x \geq 0 \end{cases}$

Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής

4.

Αν για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$f^2(x) + 2f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

να αποδείξετε οτι η f είναι συνεχής στο 0

5.

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f^3(x) + 3f(x) = x + 2017$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε οτι η f είναι συνεχής