ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

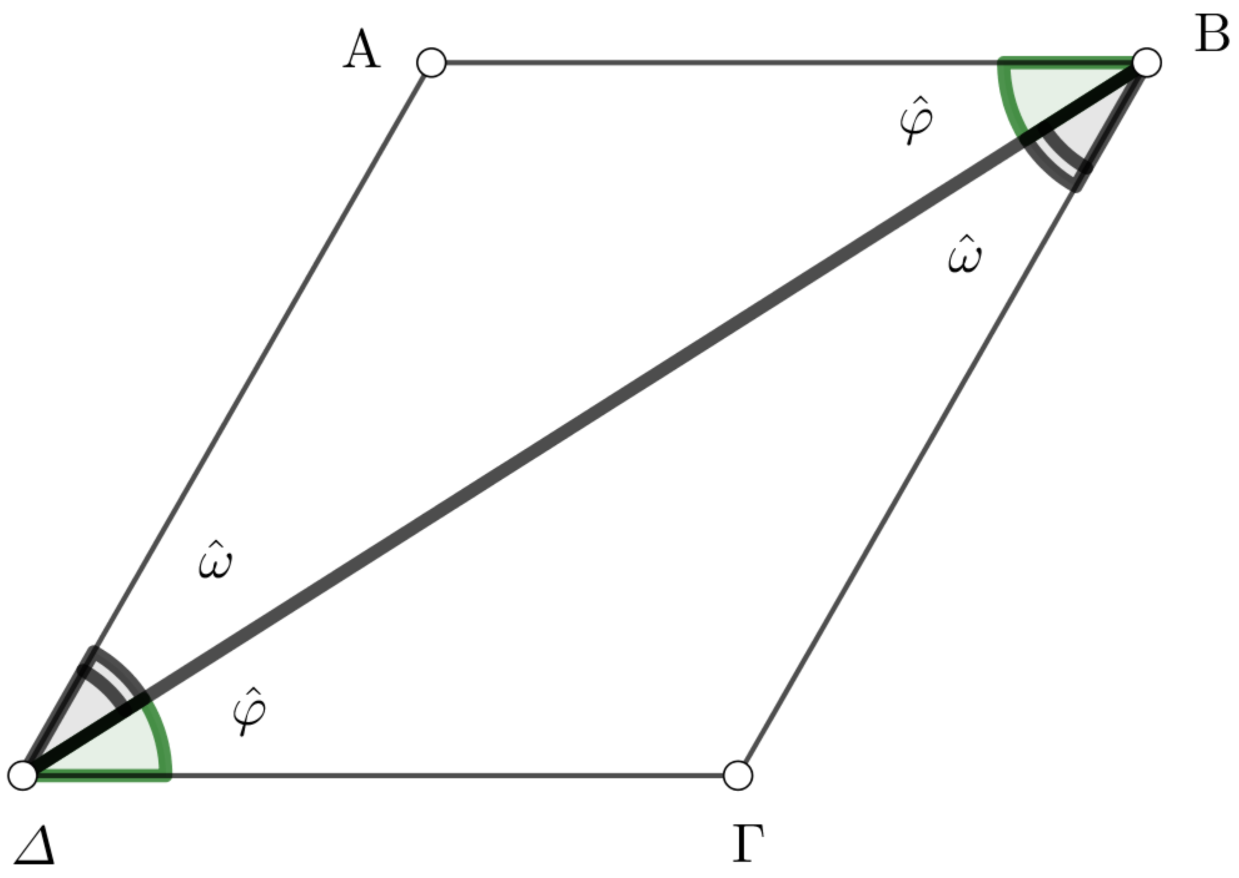
1.

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι ιδιότητες :

(I) Οι *απέναντι πλευρές του είναι ίσες*

(II) Οι *απέναντι γωνιές του είναι ίσες*

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
ΑΒΓΔ : Π*αραλληλόγραμμο*	(i) ΑΒ = ΓΔ (ii) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$



$\Sigma \upsilon \gamma \kappa \rho \acute{\iota} \nu \omega\ \tau \alpha\ \tau \rho \acute{\iota} \gamma \omega \nu \alpha\ \stackrel{\triangle}{\mathrm{AB\Delta}}\ \kappa \alpha \iota\ \stackrel{\triangle}{\Gamma\Delta\mathrm{B}}:$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\, \mathrm{B\Delta} = \mathrm{B\Delta}\left(\Omega \varsigma\ \kappa o \iota \nu \acute{\eta}\ \pi \lambda \varepsilon \upsilon \rho \acute{\alpha}\right) \\ (\mathrm{II})\, \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma\left(\Omega \varsigma\ \varepsilon \nu \tau \acute{o} \varsigma\ \varepsilon \nu \alpha \lambda \lambda \acute{\alpha} \xi\right) \\ (\mathrm{III})\, \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma\left(\Omega \varsigma\ \varepsilon \nu \tau \acute{o} \varsigma\ \varepsilon \nu \alpha \lambda \lambda \acute{\alpha} \xi\right)\end{array}\right\}$$

$\stackrel{\triangle}{\mathrm{AB\Delta}} = \stackrel{\triangle}{\Gamma\Delta\mathrm{B}}(\Gamma\Pi\Gamma).\mathrm{O}\pi \acute{o} \tau \varepsilon\ \theta \alpha\ \acute{\varepsilon} \chi \omega:$

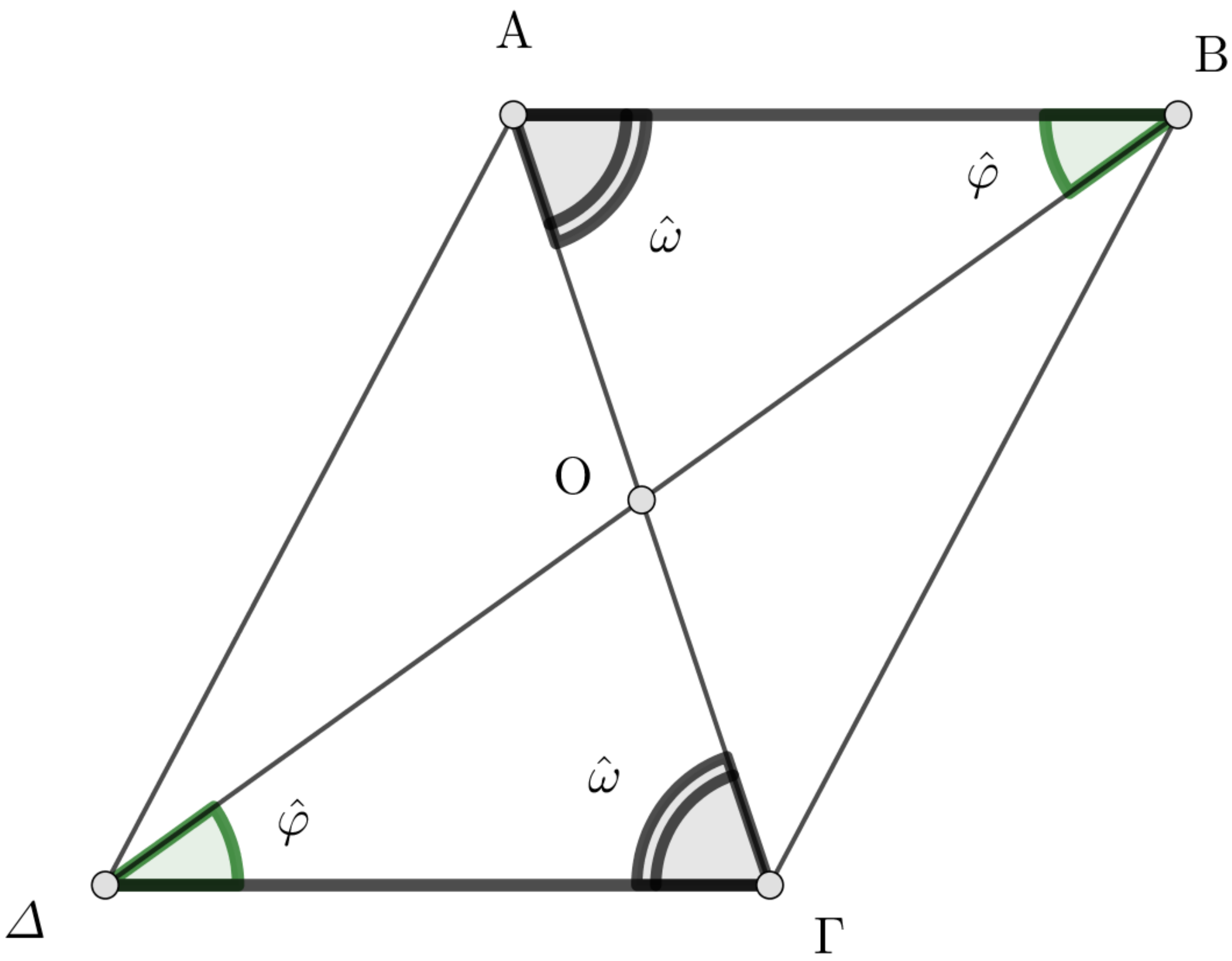
$\mathrm{AB} = \Delta\Gamma, \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\varphi}, \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \hat{\omega}$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\mathrm{B}} = \hat{\varphi} + \hat{\omega} \\ \hat{\Delta} = \hat{\varphi} + \hat{\omega}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Delta}$$

2.

$\boxed{\Sigma \varepsilon\ \kappa \acute{\alpha} \theta \varepsilon\ \pi \alpha \rho \alpha \lambda \lambda \eta \lambda \acute{o} \gamma \rho \alpha \mu \mu o\ o \iota\ \iota \delta \iota \alpha \gamma \acute{\omega} \nu \iota \varepsilon \varsigma\ \tau o \upsilon\ \delta \iota \chi o \tau o \mu o \acute{\upsilon} \nu \tau \alpha \iota}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AB\Gamma\Delta}: \Pi \alpha \rho \alpha \lambda \lambda \eta \lambda \acute{o} \gamma \rho \alpha \mu \mu o$	$\mathrm{O}: \mathrm{M}\acute{\varepsilon} \sigma o\ \tau \eta \varsigma\ \mathrm{A\Gamma}$ $\mathrm{O}: \mathrm{M}\acute{\varepsilon} \sigma o\ \tau \eta \varsigma\ \mathrm{B\Delta}$



Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΟΒ *και* ΓΟΔ :

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \mathrm{AB}=\Delta\Gamma\ (\textit{Ως απέναντι πλευρές παραλληλογραμου}) \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{O}=\mathrm{O}\hat{\Delta}\Gamma\ (\textit{Ως εντός εναλλάξ}) \\ (\mathrm{III})\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O}=\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{O}\ (\textit{Ως εντός εναλλάξ})\end{array}\right\}$$

$\overset{\triangle}{\mathrm{AOB}} = \overset{\triangle}{\Gamma\mathrm{O}\Delta}\ (\Gamma\Pi\Gamma)$

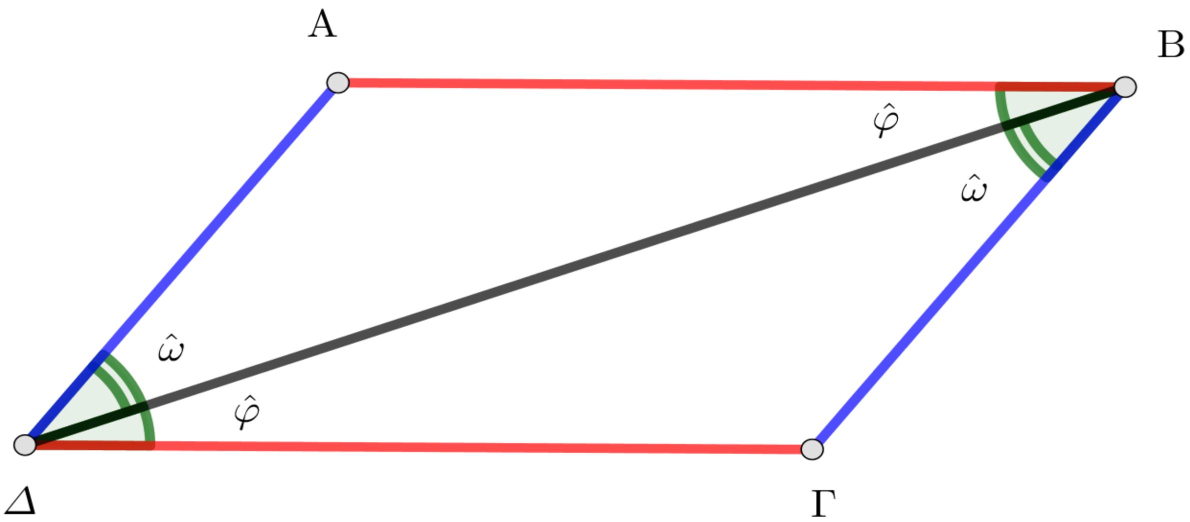
Οπότε : ΑΟ = ΟΓ *και* ΟΒ = ΟΔ

Άρα Ο *μέσο των ευθυγράμμων τμημάτων* ΑΓ *και* ΒΔ.*Συνεπώς οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου διχοτομούνται*

3.

Αν οι απέναντι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι ανα δυο ίσες το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
ΑΒ = ΓΔ, ΑΔ = ΒΓ	Το ΑΒΓΔ *είναι παραλληλόγραμμο*



Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Delta}}$ *και* $\overset{\Delta}{\mathrm{\Gamma\Delta B}}$*. Αυτά έχουν:*

$$\begin{cases} (\mathrm{I})\ \mathrm{AB} = \mathrm{\Delta\Gamma}\ (\text{Υπόθεση}) \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{A\Delta} = \mathrm{B\Gamma}\ (\text{Υπόθεση}) \\ (\mathrm{III})\ \mathrm{B\Delta} = \mathrm{B\Delta}\ (\text{Κοινή πλευρά}) \end{cases}$$

Οπότε: $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Delta}} = \overset{\Delta}{\mathrm{\Gamma\Delta B}}\ (\Pi\Pi\Pi)$

Συνεπώς θα έχω: $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{\Delta} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{\Delta}}\mathrm{\Gamma} = \hat{\varphi}$ *και* $\mathrm{A}\hat{\mathrm{\Delta}}\mathrm{B} = \mathrm{\Delta}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{\Gamma} = \hat{\omega}$

Επειδή $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{\Delta} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{\Delta}}\mathrm{\Gamma}$ *θα έχω* $\mathrm{AB} // \mathrm{\Gamma\Delta}$ *γιατι έχουν δυο τουλάχιστον εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.*

Επειδή $\mathrm{A}\hat{\mathrm{\Delta}}\mathrm{B} = \mathrm{\Delta}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{\Gamma}$ *θα έχω* $\mathrm{A\Delta} // \mathrm{\Gamma B}$ *γιατι έχουν δυο τουλάχιστον εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.*

Επειδή $\mathrm{AB} // \mathrm{\Gamma\Delta}$ *και* $\mathrm{A\Delta} // \mathrm{\Gamma B}$ *προκύπτει ότι το τετράπλευρο* ΑΒΓΔ *είναι παραλληλόγραμμο*

4.

Αν δυο απέναντι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι ίσες και παράλληλες τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AB} // = \mathrm{\Gamma\Delta}$	Το ΑΒΓΔ *είναι παραλληλόγραμμο*

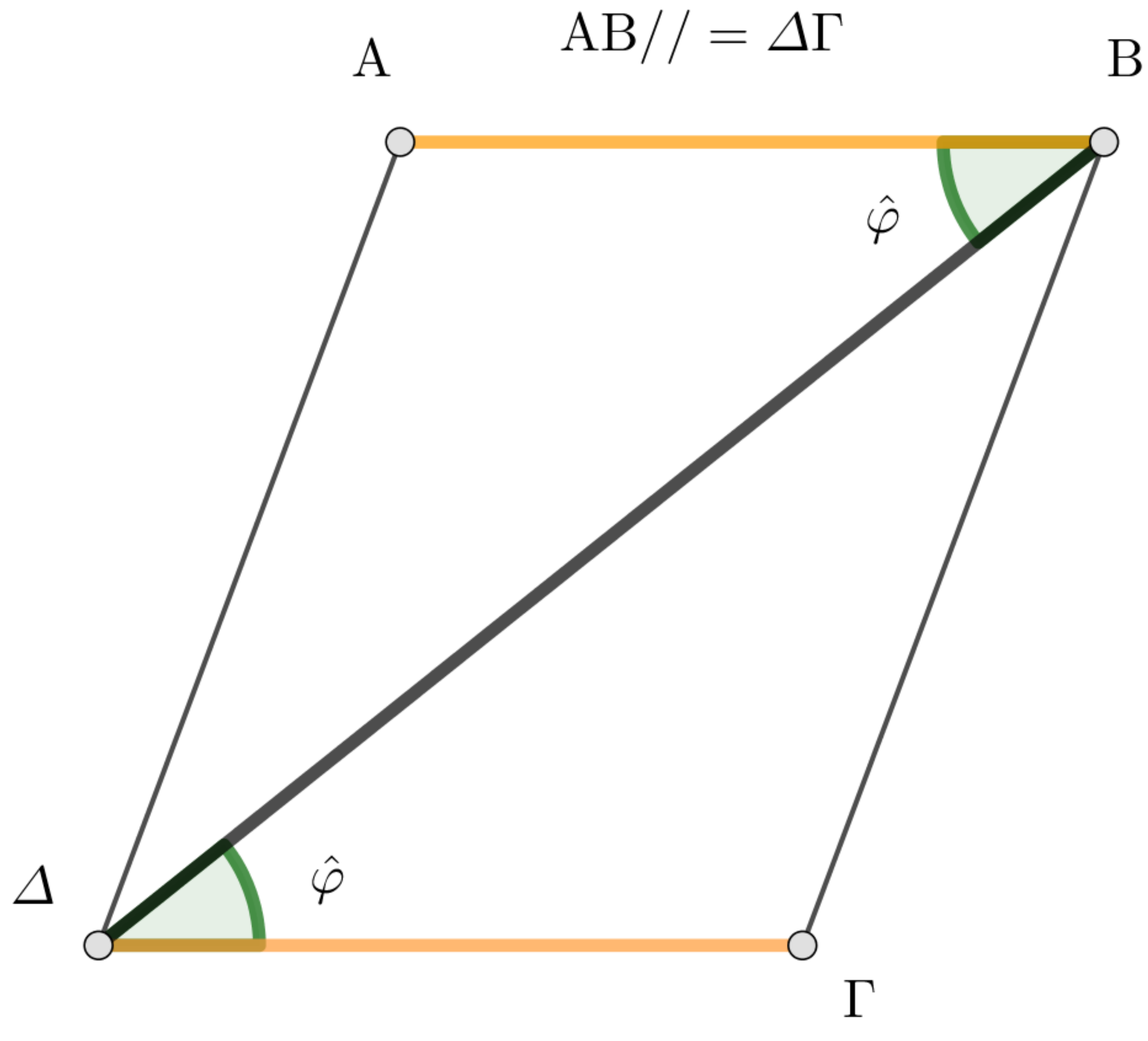
Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{\Delta\Gamma B}}$. Αυτά έχουν:

$$\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\ \mathrm{AB} = \mathrm{\Delta\Gamma}\ (\text{Υπόθεση}) \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{\Delta} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{\Delta}}\mathrm{\Gamma}\ (\text{Ως εντός εντος εναλλάξ}) \\ (\mathrm{III})\ \mathrm{B\Delta} = \mathrm{B\Delta}\ (\text{Κοινν πλευρά}) \end{Bmatrix}$$

Οπότε: $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}} = \overset{\Delta}{\mathrm{\Delta\Gamma B}}\ (\Pi\Gamma\Pi)$

Συνεπώς θα έχω: $\mathrm{A}\hat{\mathrm{\Delta}}\mathrm{B} = \mathrm{\Delta}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{\Gamma}$. Οπότε θα έχω $\mathrm{A\Delta}//\mathrm{\Gamma B}$ γιατι έχουν δυο τουλάχιστον εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

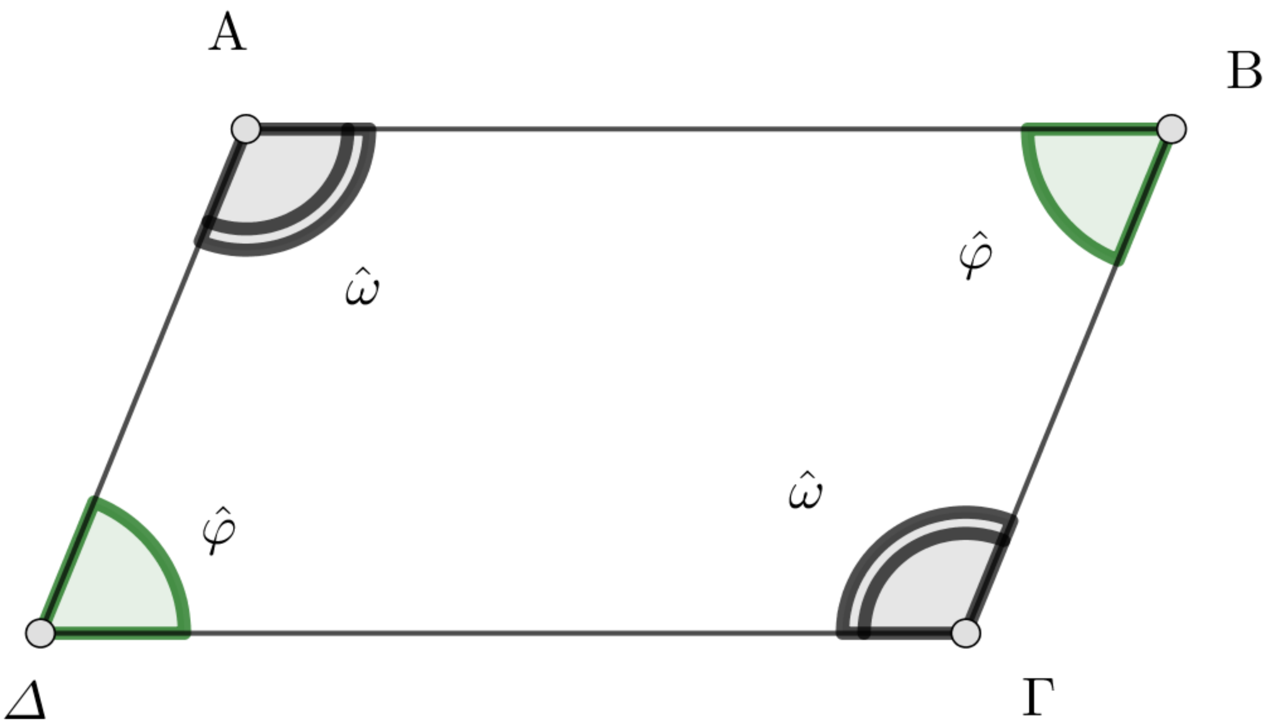
Επειδή $\mathrm{A\Delta}//\mathrm{\Gamma B}$ και $\mathrm{AB}//\mathrm{\Gamma\Delta}$ το τεράπλευρο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι παραλληλόγραμμο



5.

Αν όλες οι απέναντι γωνές ενός τετραπλεύρου είναι ίσες τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma} = \hat{\omega}, \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Delta} = \hat{\varphi}$	Το ΑΒΓΔ *είναι παραλληλόγραμμο*



Έχω: $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma} = \hat{\omega}, \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Delta} = \hat{\varphi}$

Γνωρίζω οτι <u>*το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι ίσο με* 360^0</u>.*Οπότε θα έχω*:

$$\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=360^0 \overset{\substack{\hat{\mathrm{A}}=\hat{\Gamma}=\hat{\omega} \\ \hat{\mathrm{B}}=\hat{\Delta}=\hat{\varphi}}}{\Longleftrightarrow} \hat{\omega}+\hat{\varphi}+\hat{\omega}+\hat{\varphi}=360^0 \Leftrightarrow 2\hat{\omega}+2\hat{\varphi}=360^0 \Leftrightarrow$$

$$2\left(\hat{\omega}+\hat{\varphi}\right)=360^0 \Leftrightarrow \hat{\omega}+\hat{\varphi}=\frac{360^0}{2} \Leftrightarrow \hat{\omega}+\hat{\varphi}=180^0$$

$Έχω: \hat{A}+\hat{B}=180^0$

Οπότε $ΑΔ//ΒΓ$ *γιατί έχουν δυο τουλάχιστον εντος και επι τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές*

$Έχω: \hat{A}+\hat{Δ}=180^0$

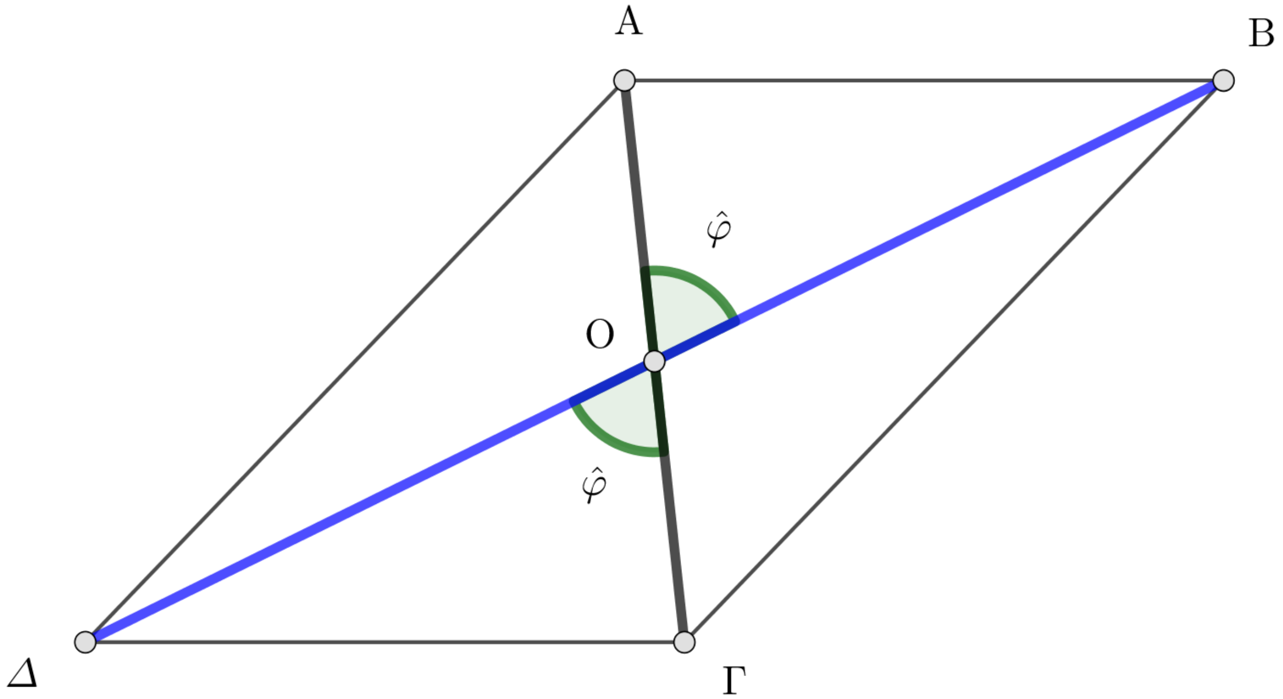
Οπότε $ΑΒ//ΔΓ$ *γιατί έχουν δυο τουλάχιστον εντος και επι τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές*

Επειδή $ΑΔ//ΒΓ$ *και* $ΑΒ//ΔΓ$ *το τετράπλευρο* ΑΒΓΔ *είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες*

6.

Αν οι διαγώνιες ενός τετραπλεύρου διχοτομούνται τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
Ο: Μέσο *του ευθυγράμμου τμήματος* ΑΓ Ο: Μέσο *του ευθυγράμμου τμήματος* ΒΔ	Το ΑΒΓΔ *είναι παραλληλόγραμμο*



Επειδή Ο *είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος* ΑΓ *θα έχω*:
$\mathrm{AO} = \mathrm{O\Gamma}(1)$

Επειδή Ο *είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος* ΒΔ *θα έχω*:
$\mathrm{BO} = \mathrm{O\Delta}(2)$

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\mathrm{A\overset{\triangle}{O}B}$ *και* $\mathrm{\Gamma\overset{\triangle}{O}\Delta}$:

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\,\mathrm{AO} = \mathrm{O\Gamma}(1)\\ (\mathrm{II})\,\mathrm{BO} = \mathrm{O\Delta}(2)\\ (\mathrm{III})\,\mathrm{A\hat{O}B} = \mathrm{\Gamma\hat{O}\Delta}\left(\Omega\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\nu\right)\end{cases}\right\}$$

Οπότε: $\mathrm{A\overset{\triangle}{O}B} = \mathrm{\Gamma\overset{\triangle}{O}\Delta}(\Pi\Gamma\Pi)$.*Συνεπώς θα έχω*:

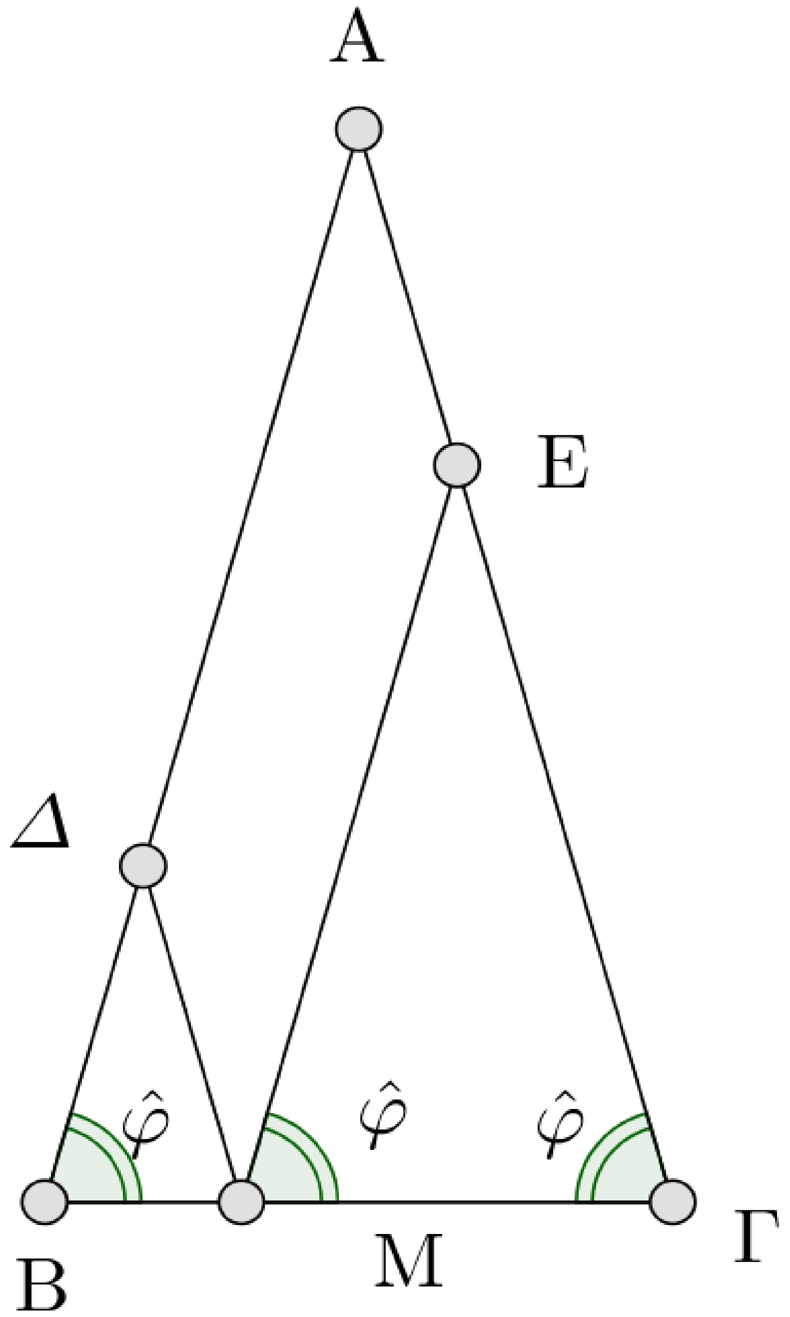
$\mathrm{AB} = \mathrm{\Gamma\Delta}(1)$ *και* $\mathrm{A\hat{B}O} = \mathrm{\Gamma\hat{\Delta}O}(2)$

Επειδή $\mathrm{A\hat{B}O} = \mathrm{\Gamma\hat{\Delta}O}$ *έχω* $\mathrm{AB}//\mathrm{\Gamma\Delta}$ *γιατί έχουν δυο τουλάχιστον εντός εναλλάξ γωνίες ίσες*.*Συνεπώς* $\mathrm{AB}//=\mathrm{\Gamma\Delta}$.Ο*πότε το τετράπλευρο* ΑΒΓΔ *είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δυο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες*.

7.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}(\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma})$ *και σημείο* Μ *της βάσης του* ΒΓ.*Φέρουμε* $\mathrm{ME}//\mathrm{AB}$ (Ε *σημείο του* ΑΓ) *και* $\mathrm{M\Delta}//\mathrm{A\Gamma}$ (Δ *σημείο του* ΑΒ).Ν*α αποδείξετε ότι*:
$\mathrm{M\Delta} + \mathrm{ME} = \mathrm{AB}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}, \mathrm{ME}//\mathrm{AB}, \mathrm{M\Delta}//\mathrm{A\Gamma}$	$\mathrm{M\Delta} + \mathrm{ME} = \mathrm{AB}$



A
E
Δ
$\hat{\varphi}$
$\hat{\varphi}$
$\hat{\varphi}$
B
M
Γ

$\Sigma\tau o\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{AB\Gamma}\left(\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}\right)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\hat{\varphi}(1)$

$\left(\Omega\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\varepsilon\varsigma\ \sigma\tau\eta\nu\ \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda o\acute{\upsilon}\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\right)$

$\mathrm{O}\iota\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\varepsilon\varsigma\ \mathrm{ME}//\mathrm{AB}\ \tau\acute{\varepsilon}\mu\nu o\upsilon\nu\ \tau\eta\nu\ \mathrm{B\Gamma}.\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\Gamma=\hat{\mathrm{B}}=\hat{\varphi}\left(\Omega\varsigma\ \varepsilon\nu\tau\acute{o}\varsigma\ \varepsilon\kappa\tau\acute{o}\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \tau\alpha\ \alpha\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \mu\acute{\varepsilon}\rho\eta\right)(2)$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (1),(2)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{cases}\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\hat{\varphi}\\ \mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\Gamma=\hat{\mathrm{B}}=\hat{\varphi}\end{cases}\right\}\Rightarrow \mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\Gamma=\hat{\Gamma}$$

$\Sigma\tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{EM\Gamma}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\Gamma=\hat{\Gamma}\ o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:$

$$\mathrm{ME}=\mathrm{E\Gamma}(3)\begin{pmatrix}\Omega\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\ \pi o\upsilon\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa o\nu\tau\alpha\iota\ \sigma\tau o\ \acute{\iota}\delta\iota o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\\ \alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi o\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\end{pmatrix}$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \mathrm{M\Delta}//\mathrm{AE}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{ME}//\mathrm{\Delta A}\ \pi\rho o\kappa\acute{\upsilon}\pi\tau\varepsilon\iota\ \acute{o}\tau\iota\ \tau o\ \tau\varepsilon\tau\rho\acute{\alpha}\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho o$

$\mathrm{M\Delta AE}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\acute{o}\gamma\rho\alpha\mu\mu o.\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:$

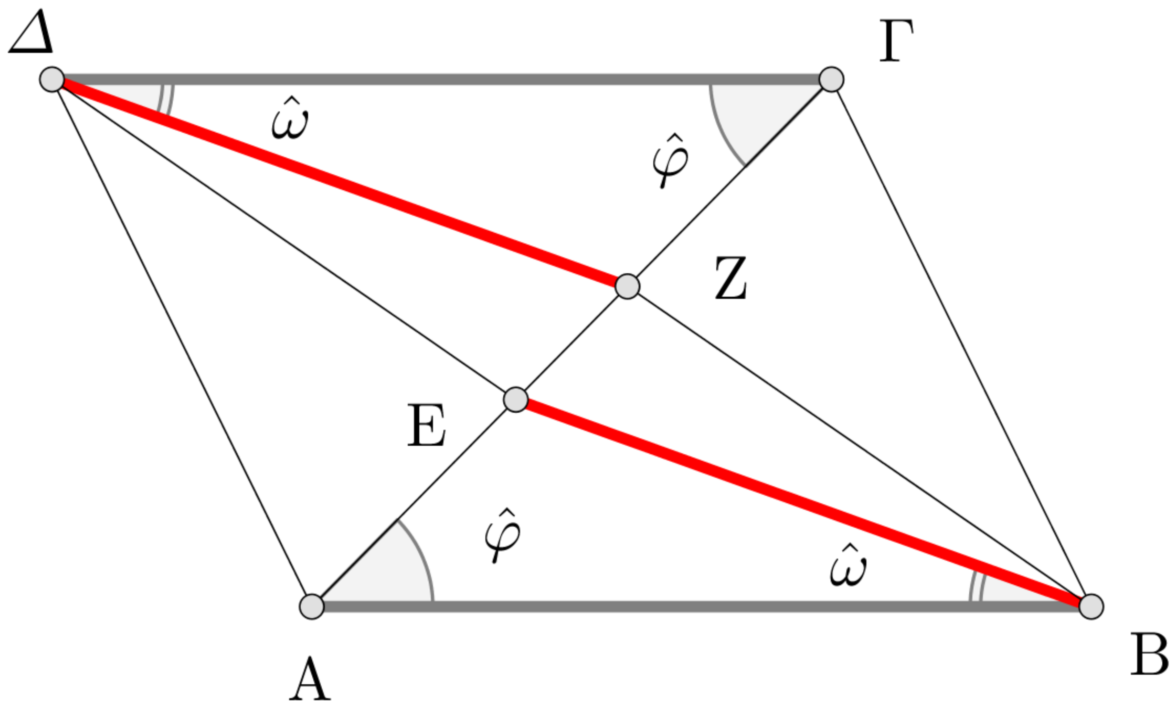
$\mathrm{M\Delta}=\mathrm{AE}(4)\left(\Omega\varsigma\ \alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\ \pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda o\gamma\rho\acute{\alpha}\mu\mu o\upsilon\right)$

$$\mathrm{M\Delta}+\mathrm{ME}\overset{\substack{\mathrm{M\Delta=AE}\\ \mathrm{ME=E\Gamma}}}{=}\mathrm{AE}+\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{AB}$$

8.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\acute{o}\gamma\rho\alpha\mu\mu o\ \mathrm{AB\Gamma\Delta}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{E}\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{A\Gamma}\ .\Phi\acute{\varepsilon}\rho o\upsilon\mu\varepsilon$ $\mathrm{\Delta Z}//\mathrm{BE}\left(\mathrm{Z}\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \tau o\upsilon\ \mathrm{A\Gamma}\right).\mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota\ \mathrm{\Delta E}//\mathrm{BZ}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AB\Gamma\Delta}:\Pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\acute{o}\gamma\rho\alpha\mu\mu o$ $\mathrm{\Delta Z}//\mathrm{BE}$	$\mathrm{\Delta E}//\mathrm{BZ}$



$\text{Επειδή } \Delta\Gamma // AB \text{ και } \Delta Z // BE \text{ θα έχω}:$

$\Gamma\hat{\Delta}Z = A\hat{B}E = \hat{\omega}(1)\left(\begin{array}{l}\text{Ως οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους}\\ \text{μία προς μία παράλληλες}\end{array}\right)$

$\text{Οι παράλληλες } \Delta\Gamma // AB \text{ τέμνουν την } A\Gamma.\text{Οπότε θα έχω}:$

$\Delta\hat{\Gamma}A = \Gamma\hat{A}B = \hat{\varphi}(2)(\text{Ως εντός εναλλάξ})$

$\text{Συγκρίνω τα τρίγωνα } \overset{\triangle}{\Delta\Gamma Z} \text{ και } \overset{\triangle}{BAE}$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\Delta\Gamma = AB(\text{Ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου})\\ (\mathrm{II})\,\Gamma\hat{\Delta}Z = A\hat{B}E(1)\\ (\mathrm{III})\,\Delta\hat{\Gamma}Z = E\hat{A}B(2)\end{array}\right\}$$

$\text{Οπότε}: \overset{\triangle}{\Delta\Gamma Z} = \overset{\triangle}{BAE}(\Gamma\Pi\Gamma)$

$\text{Συνεπώς θα έχω}: \Delta Z = BE$

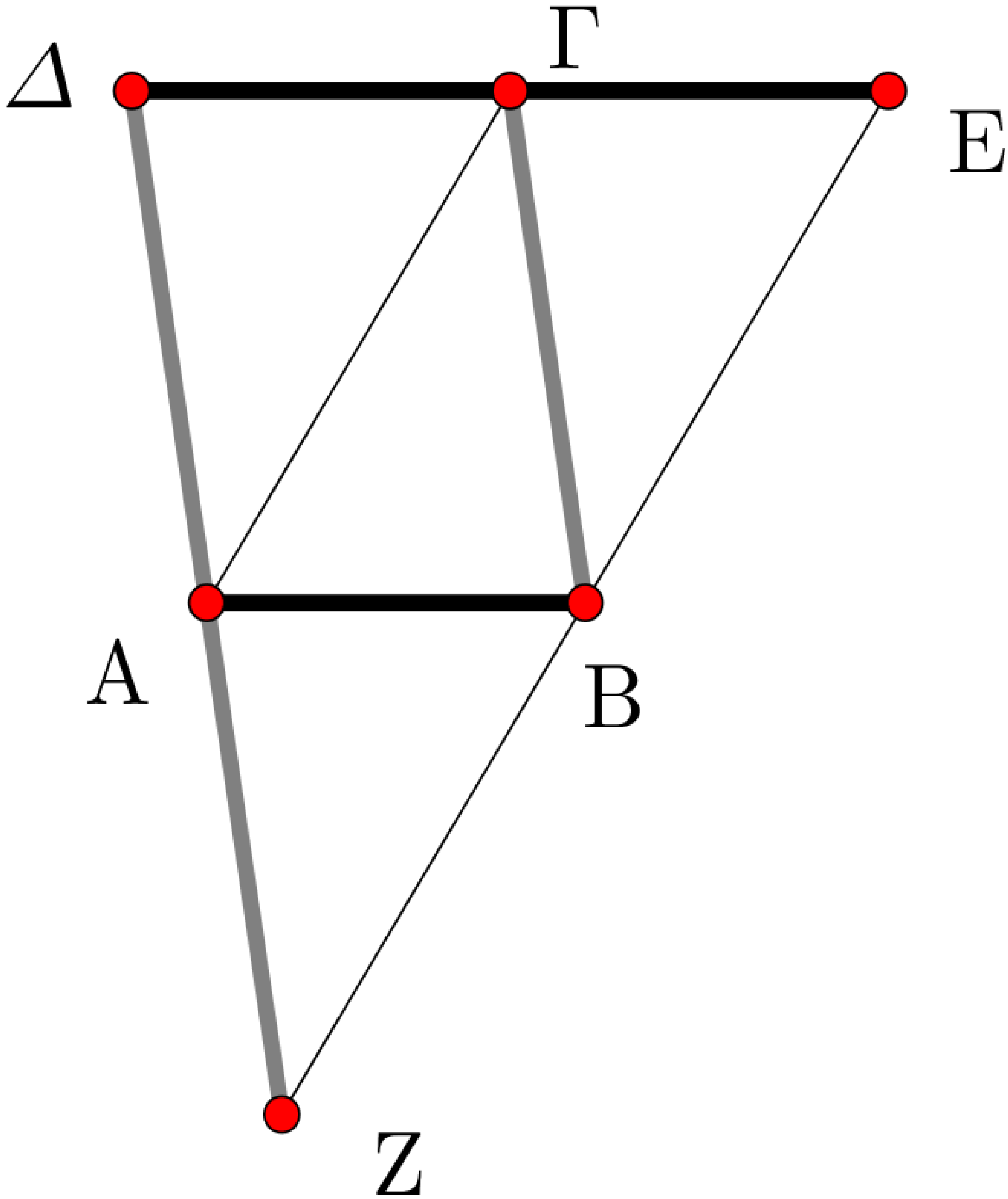
$\text{Ε}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \Delta\text{Ζ}//=\text{ΒΕ}\ \pi\rho o\kappa\acute{\upsilon}\pi\tau\varepsilon\iota\ \acute{o}\tau\iota\ \tau o\ \tau\varepsilon\tau\rho\acute{\alpha}\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho o\ \Delta\text{ΖΒΕ}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\acute{o}\gamma\rho\alpha\mu\mu o.\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \Delta\text{Ε}//\text{ΒΖ}$

$\left(\Omega\varsigma\ \alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\ \pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda o\gamma\rho\acute{\alpha}\mu\mu o\upsilon\right)$

9.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.Π*ροεκτείνουμε τη* ΔΓ *κατα τμήμα* ΓΕ = ΔΓ *και τη* ΔΑ *κατά τμήμα* ΑΖ = ΔΑ.Ν*α αποδείξετε ότι τα σημεία* Ζ,Β *και* Ε *είναι συνευθειακά.*

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
ΑΒΓΔ : Π*αραλληλόγραμμο* ΓΕ = ΔΓ, ΑΖ = ΔΑ	Τ*α σημεία* Ζ,Β,Ε *είναι συνευθειακά*



$\text{Επειδή } AB\Gamma\Delta \textit{ παραλληλόγραμμο θα έχω } AB//=\Delta\Gamma\,(1)$

$\textit{Έχω}: \Gamma E=\Delta\Gamma\,(2).\text{Απο τις σχέσεις } (1),(2) \text{ θα έχω}:$

$$\left.\begin{cases} AB//=\Delta\Gamma \\ \Gamma E=\Delta\Gamma \end{cases}\right\}\Rightarrow \Gamma E//=AB$$

Επειδή $ΓΕ//=ΑΒ$ *προκύπτει ότι το τετράπλευρο* $ΑΓΕΒ$ *είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δυο απέναντι πλευρές που είναι παράλληλες και ίσες μεταξύ τους.Συνεπώς το παραλληλόγραμμο* $ΑΓΕΒ$ *έχει όλες τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.Άρα θα έχω*:
$ΑΓ//ΒΕ(3)$

Επειδή $ΑΒΓΔ$ *παραλληλόγραμμο θα έχω* $ΒΓ//=ΑΔ(4)$

Έχω: $ΑΖ=ΔΑ(5)$.*Απο τις σχέσεις* $(4),(5)$ *θα έχω*:

$$\left.\begin{array}{l} ΓΒ//=ΑΔ \\ ΑΖ=ΔΑ \end{array}\right\} \Rightarrow ΑΖ//=ΒΓ$$

Επειδή $ΑΖ//=ΒΓ$ *προκύπτει ότι το τετράπλευρο* $ΑΓΒΖ$ *είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δυο απέναντι πλευρές που είναι παράλληλες και ίσες μεταξύ τους.Συνεπώς το παραλληλόγραμμο* $ΑΓΒΖ$ *έχει όλες τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.Άρα θα έχω*:
$ΑΓ//ΒΖ(6)$

Απο τις σχέσεις $(3),(6)$ *θαέχω*:

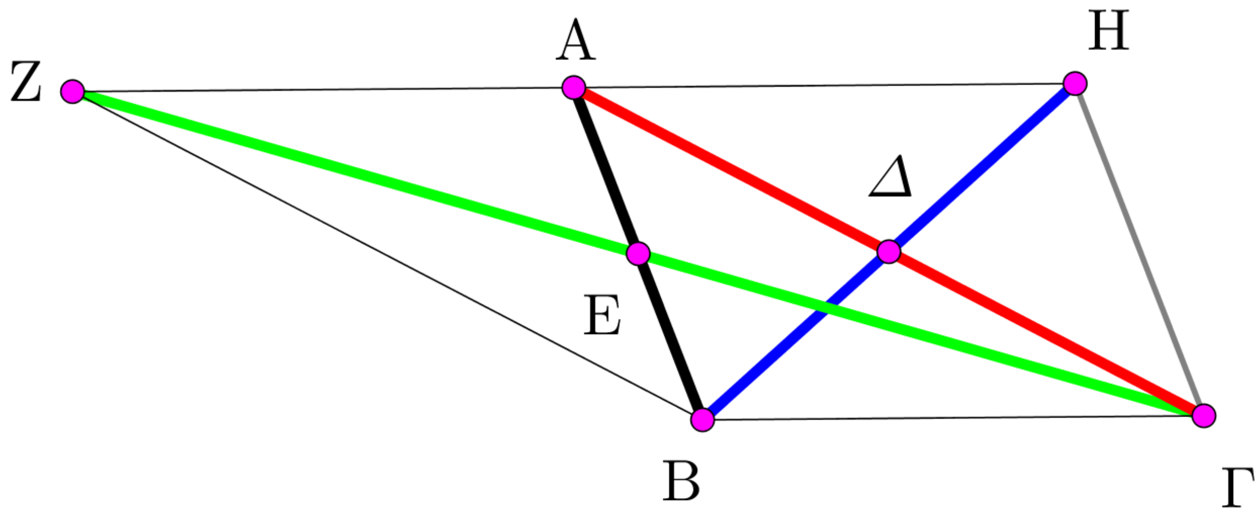
$$\left.\begin{array}{l} ΑΓ//ΒΕ \\ ΑΓ//ΒΖ \end{array}\right\} \Rightarrow ΑΓ//ΒΕ//ΒΖ$$

Έστω τα σημεία $Β,Ε,Ζ$ *δεν είναι συνευθειακά.Τότε οι ευθείες* $ΒΕ$ *και* $ΒΖ$ *είναι διακεκριμένες μεταξύ τους.Οπότε απο το σημείο* $Β$ *που βρίσκεται εκτός της ευθείας* $ΑΓ$ *άγονται δυο παράλληλες προς την* $ΑΓ$ *η* $ΒΕ$ *και η* $ΒΖ$.*Αυτό είναι άτοπο γιατί απο το αίτημα του Ευκλείδη γνωρίζω απο σημείο εκτός ευθείας άγεται μόνο μια παράλληλος σε αυτήν την ευθεία.Οπότε τα σημεία* $Β,Ε,Ζ$ *είναι συνευθειακά.*

10.

$\Delta \acute{\iota} \nu \varepsilon \tau \alpha \iota\ \tau \rho \acute{\iota} \gamma \omega \nu o\ AB\Gamma.\Sigma \tau \iota \varsigma\ \pi \rho o \varepsilon \kappa \tau \acute{\alpha} \sigma \varepsilon \iota \varsigma\ \tau \omega \nu\ \delta \iota \alpha \mu \acute{\varepsilon} \sigma \omega \nu$ $B\Delta\ \kappa\alpha\iota\ \Gamma E\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ H\ \kappa\alpha\iota\ Z\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi\alpha,$ $\tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota\alpha\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \Delta H = B\Delta\ \kappa\alpha\iota\ ZE = \Gamma E. N\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota:$ $(I)\ AH = AZ$ $(II)\ \tau\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ Z, A\ \kappa\alpha\iota\ H\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\iota\alpha\kappa\acute{\alpha}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$AB\Gamma\Delta : \Pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\acute{o}\gamma\rho\alpha\mu\mu o$ $\Delta : M\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ A\Gamma$ $E : M\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ AB$ $\Delta H = B\Delta$ $ZE = \Gamma E$	$(I)\ AH = AZ$ $(II)\ T\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ Z, A, H\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\iota\alpha\kappa\acute{\alpha}$



$(I)\ E\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ E\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ AB\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega : AE = EB$

$E\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ AE = EB\ \kappa\alpha\iota\ ZE = \Gamma E\ \pi\rho o\kappa\acute{\upsilon}\pi\tau\varepsilon\iota\ \acute{o}\tau\iota\ E\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \tau o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\omega\nu$ $\varepsilon\upsilon\theta\upsilon\rho\gamma\acute{\alpha}\mu\mu\omega\nu\ \tau\mu\eta\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu\ Z\Gamma\ \kappa\alpha\iota\ AB. O\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ o\iota\ \delta\iota\alpha\gamma\acute{\omega}\nu\iota\varepsilon\varsigma\ \tau o\upsilon$ $\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\pi\lambda\varepsilon\acute{\upsilon}\rho o\upsilon\ ZB\Gamma A\ \delta\iota\chi o\tau o\mu o\acute{\upsilon}\nu\tau\alpha\iota. \Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\omega\varsigma\ \tau\varepsilon\tau\rho\acute{\alpha}\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho o\ ZB\Gamma A$ $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\acute{o}\gamma\rho\alpha\mu\mu o. \acute{A}\rho\alpha\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$AZ // = B\Gamma\ (1)$

Επειδή Δ μέσο της $\mathrm{A\Gamma}$ θα έχω: $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{\Delta\Gamma}$

Επειδή $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{\Delta H}$ και $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{\Delta\Gamma}$ προκύπτει ότι Δ είναι το μέσο των ευθυργάμμων τμημάτων $\mathrm{A\Gamma}$ και BH. Οπότε οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $\mathrm{B\Gamma HA}$ διχοτομούνται. Συνεπως τετράπλευρο $\mathrm{B\Gamma HA}$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα θα έχω:

$\mathrm{AH} // = \mathrm{B\Gamma}\,(2)$

Απο τις σχέσεις $(1),(2)$ θα έχω:

$$\left.\begin{cases} \mathrm{AZ} // = \mathrm{B\Gamma} \\ \mathrm{AH} // = \mathrm{B\Gamma} \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{AZ} = \mathrm{AH}$$

(II) Έστω τα σημεία $\mathrm{A,H,Z}$ δεν είναι συνευθειακά. Τότε οι ευθείες AZ και AH είναι διακεκριμένες μεταξύ τους. Οπότε απο το σημείο A που βρίσκεται εκτός της ευθείας $\mathrm{B\Gamma}$ άγονται δυο παράλληλες προς την $\mathrm{B\Gamma}$ η AZ και η AH. Αυτό είναι άτοπο γιατί απο το αίτημα του Ευκλείδη γνωρίζω απο σημείο εκτός ευθείας άγεται μόνο μια παράλληλος σε αυτήν την ευθεία. Οπότε τα σημεία $\mathrm{A,H,Z}$ είναι συνευθειακά.

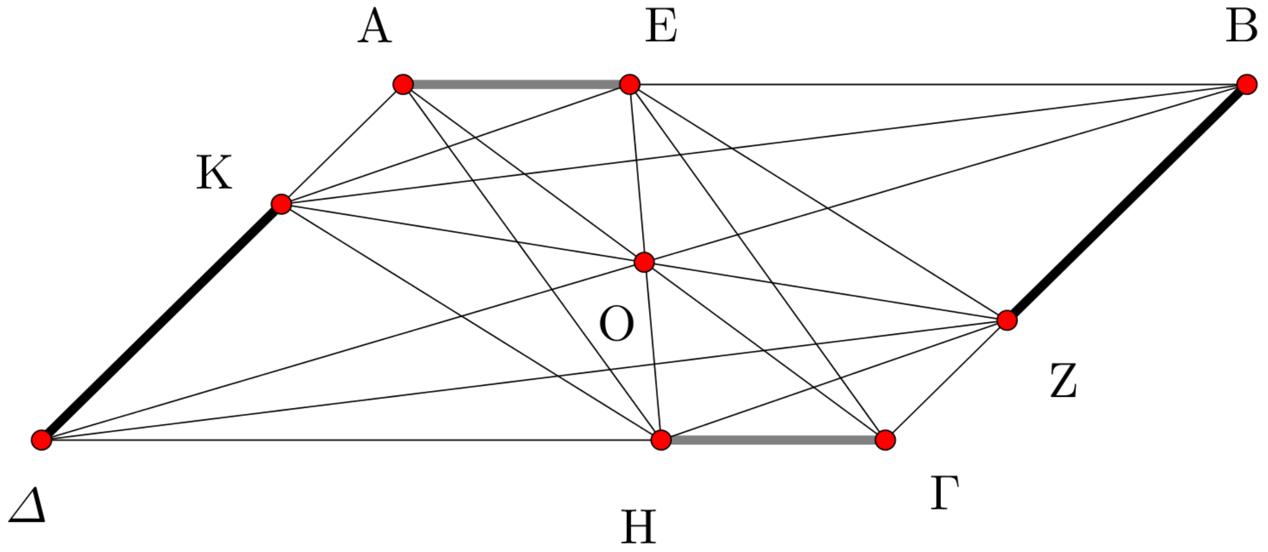
11.

Δίνεται παραλληλόγραμμο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ και τα σηεία $\mathrm{E,Z,H}$ και των πλευρών του $\mathrm{AB,B\Gamma}$ και $\mathrm{\Delta A}$ αντίστοιοχα, ώστε $\mathrm{AE} = \mathrm{\Gamma H}$ και $\mathrm{BZ} = \mathrm{\Delta K}$. Να αποδείξετε ότι:

(I) το τετράπλευρο EZHK είναι παραλληλόγραμμο

(II) οι $\mathrm{A\Gamma,B\Delta}$ και KZ συντρέχουν

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AB\Gamma\Delta}$: Παραλληλόγραμμο E: Μέσο της AB Z: Μέσο της $\mathrm{B\Gamma}$ H: Μέσο της $\mathrm{\Delta A}$ $\mathrm{AE} = \mathrm{\Gamma H}, \mathrm{BZ} = \mathrm{\Delta K}$	$(\mathrm{I})\,\mathrm{EZHK}$: Παραλληλόγραμμο (II) Τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{A\Gamma,B\Delta}$ και KZ συντρέχουν



(I) $\underline{\text{Έστω Ο το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ}}$

Επειδή ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες του διχοτομούνται.

Συνεπώς τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ έχουν κοινό μέσο

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\,\text{Το Ο το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ}\\(\mathrm{II})\,\text{Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ έχουν κοινό μέσο}\end{matrix}\right\}$$

Οπότε Ο το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΔ

Επειδή $\text{ΑΕ}//=\text{ΗΓ}$ προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δυο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες.Γνωρίζω οτι <u>οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου διχοτομούνται</u>.Επειδή ΑΕΓΗ παραλληλόγραμμο προκύπτει οτι οι διαγώνιες του διχοτομούνται.Συνεπώς τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΕΗ έχουν κοινό μέσο

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\,\text{Το Ο το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ}\\(\mathrm{II})\,\text{Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΕΗ έχουν κοινό μέσο}\end{matrix}\right\}$$

Οπότε Ο το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΗ

Επειδή $ΚΔ//=ΒΖ$ προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΚΒΖΔ είναι : παραλληλόγραμμο γιατί έχει δυο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες.Επειδή ΚΒΖΔ παραλληλόγραμμο προκύπτει οτι οι διαγώνιες του διχοτομούνται.Συνεπώς τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΕΗ έχουν κοινό μέσο

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\text{Το Ο το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΔ}\\(\mathrm{II})\,\text{Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ και ΚΖ έχουν κοινό μέσο}\end{array}\right\}$$

Οπότε Ο το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΚΖ

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\text{Το Ο το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΗ}\\(\mathrm{II})\,\text{Το Ο το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΚΖ}\end{array}\right\}$$

Οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΗ και ΚΖ έχουν μέσο. Συνεπώς τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΗ και ΚΖ διχοτομούνται.Γνωρίζω <u>ότι αν οι διαγώνιες ενός τετραπλεύρου διχοτομούνται το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο</u>.Επειδή οι διάγωνιες του ΕΖΗΚ διχοτομούνται προκύπτει ότι το ΕΖΗΚ είναι παραλληλόγραμμο.

(ΙΙ)

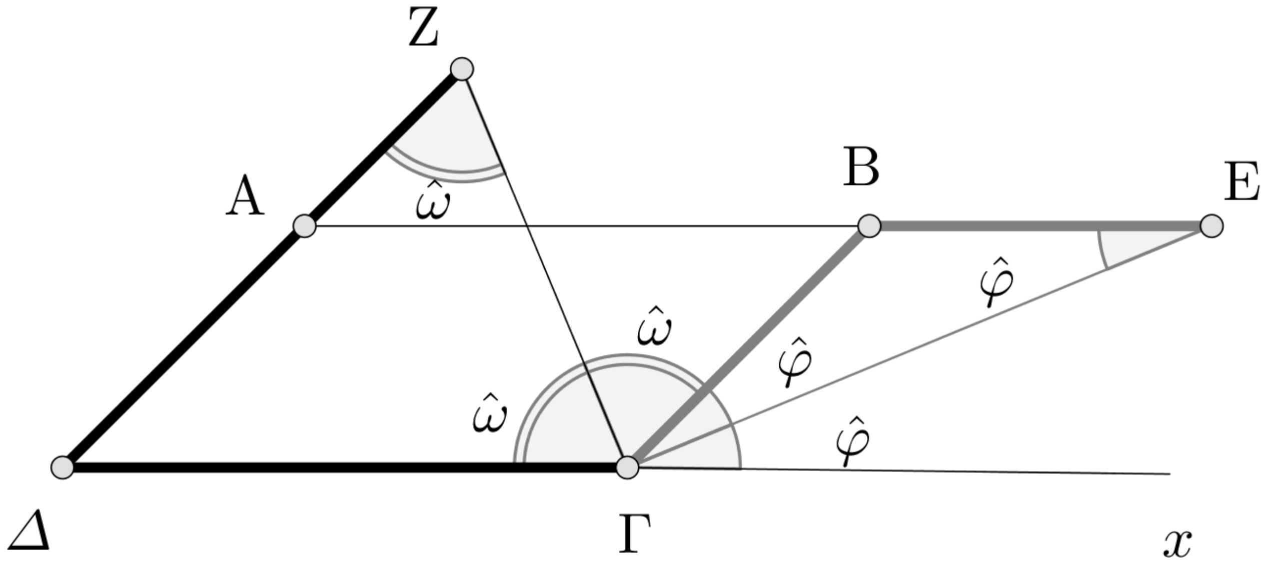
$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\text{Το Ο το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ}\\(\mathrm{II})\,\text{Το Ο το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΔ}\\(\mathrm{III})\,\text{Το Ο το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΚΖ}\end{array}\right\}$$

Οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ,ΒΔ,ΚΖ διέρχονται απο το ίδιο σημείο.Άρα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ,ΒΔ,ΚΖ συντρέχουν.

12.

Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήμα $ΒΕ = ΒΓ$ και επι της ημιευθείας ΔΑ θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε $ΔΖ = ΔΓ$.Να αποδείξετε ότι $Ζ\hat{Γ}Ε = 90^0$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AB\Gamma\Delta}: \Pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\acute{o}\gamma\rho\alpha\mu\mu o$ $\mathrm{BE} = \mathrm{B\Gamma}, \Delta\mathrm{Z} = \Delta\Gamma$	$\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{E} = 90^0$



$\Sigma\tau o\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \Delta\mathrm{Z}\Gamma\left(\Delta\mathrm{Z} = \Delta\Gamma\right)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = \hat{\omega}(1)$

$\left(\begin{array}{l}\Omega\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \pi o\upsilon\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\varepsilon\varsigma\ \sigma\tau\eta\nu\ \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda o\acute{\upsilon}\varsigma\\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\end{array}\right)$

$\mathrm{O}\iota\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\varepsilon\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \Delta\mathrm{Z}//\mathrm{B\Gamma}\ \tau\acute{\varepsilon}\mu\nu o\upsilon\nu\ \tau\eta\nu\ \mathrm{Z\Gamma}.\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \hat{\omega}(2)$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (1),(2)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = \hat{\omega}\\ \Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \hat{\omega}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \hat{\omega}(3)$$

$\Sigma\tau o\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{B\Gamma E}\left(\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{BE}\right)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \hat{\varphi}(4)$

$\left(\begin{array}{l}\Omega\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \pi o\upsilon\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\varepsilon\varsigma\ \sigma\tau\eta\nu\ \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda o\acute{\upsilon}\varsigma\\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\end{array}\right)$

$\text{Οι } \textit{παράλληλες ευθείες } \mathrm{BE}//\Delta\Gamma \textit{ τέμνουν την } \Gamma\mathrm{E}.\text{Ο}\textit{πότε θα έχω}:$

$\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \mathrm{E}\hat{\Gamma}x = \hat{\varphi}\,(5)$

$\text{Α}\textit{πο τις σχέσεις } (4),(5) \textit{ θα έχω}:$

$$\left.\begin{cases} \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \hat{\varphi} \\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \mathrm{E}\hat{\Gamma}x = \hat{\varphi} \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \mathrm{E}\hat{\Gamma}x = \hat{\varphi}\,(6)$$

$$\textit{Έχω}: \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z} + \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{B} + \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma + \mathrm{E}\hat{\Gamma}x = 180^0 \overset{\substack{\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z}=\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{B}=\hat{\omega} \\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma=\mathrm{E}\hat{\Gamma}x=\hat{\varphi}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\hat{\omega} + \hat{\omega} + \hat{\varphi} + \hat{\varphi} = 180^0 \Leftrightarrow 2\hat{\omega} + 2\hat{\varphi} = 180^0 \Leftrightarrow 2\left(\hat{\omega} + \hat{\varphi}\right) = 180^0 \Leftrightarrow$$

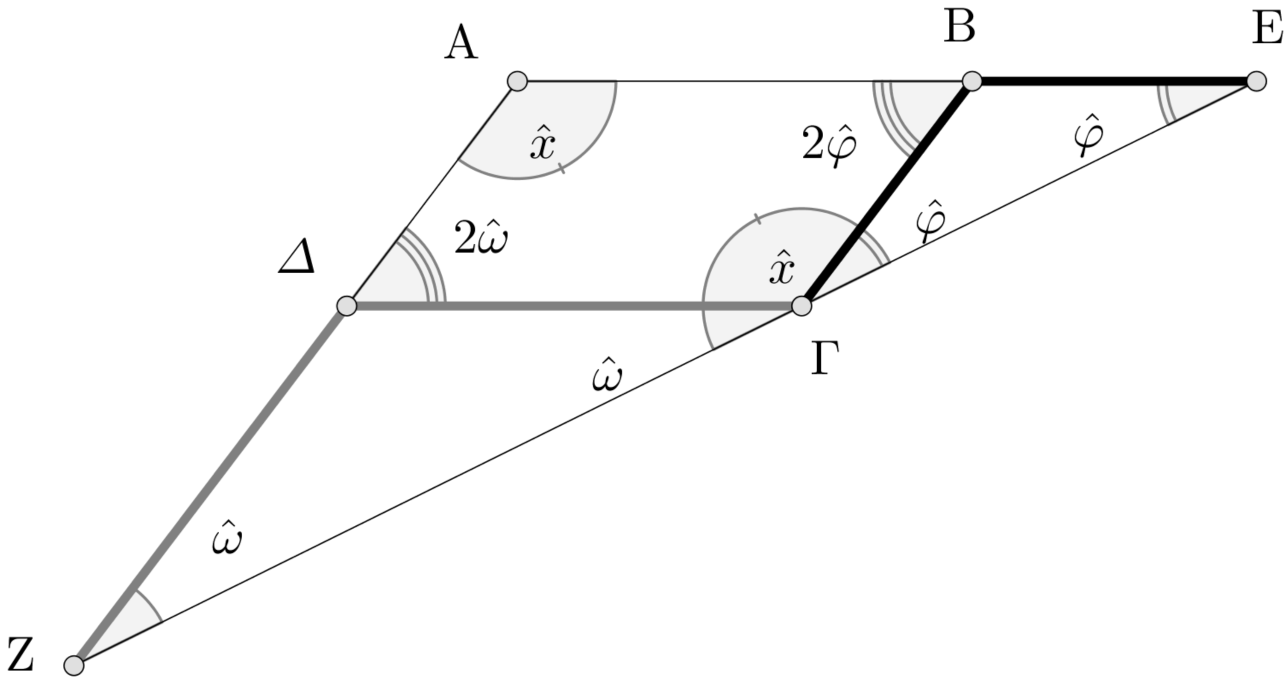
$$\hat{\omega} + \hat{\varphi} = \frac{180^0}{2} \Leftrightarrow \hat{\omega} + \hat{\varphi} = 90^0$$

$$\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{E} = \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{B} + \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma \overset{\substack{\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{B}=\hat{\omega} \\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma=\hat{\varphi}}}{=} \hat{\omega} + \hat{\varphi} = 90^0$$

13.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.Π*ροεκτείνουμε την* ΑΒ *κατα τμήμα* $\mathrm{BE} = \mathrm{B}\Gamma$ *και την* ΑΔ *κατά τμήμα* $\Delta\mathrm{Z} = \Delta\Gamma$.Ν*α αποδείξετε ότι τα σημεία* Ζ,Γ *και* Ε *είναι συνευθειακά*

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
ΑΒΓΔ : Π*αραλληλόγραμμο* $\mathrm{BE} = \mathrm{B}\Gamma, \Delta\mathrm{Z} = \Delta\Gamma$	$\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{E} = 90^0$



Στο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{\Delta\Gamma Z}\left(\mathrm{\Delta\Gamma}=\mathrm{\Delta Z}\right)$ *θα έχω* $\mathrm{\Delta}\hat{\Gamma}\mathrm{Z}=\mathrm{\Delta}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma=\hat{\omega}\,(1)$

$\left(\right.$*Ως γωνίες προσκείμενες στην βάση ισοσκελούς τριγώνου*$\left.\right)$

Γ*νωρίζω ότι* <u>*κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών γωνιών*</u>. Η *γωνία*

$\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ *είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο* ΔΑΖ.Ο*πότε θα είναι με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών γωνιών.Άρα θα έχω*:

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma=\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z}+\Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma\overset{\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z}=\Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma=\hat{\omega}}{\Longrightarrow}\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma=\hat{\omega}+\hat{\omega}\Rightarrow\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma=2\hat{\omega}\,(2)$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{B\Gamma E}\left(\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{BE}\right)$ *θα έχω* $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\hat{\varphi}\,(3)$

$\left(\right.$*Ως γωνίες προσκείμενες στην βάση ισοσκελούς τριγώνου*$\left.\right)$

Η *γωνία* $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ *είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο* ΒΓΕ.Ο*πότε θα είναι με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών γωνιών.*
Άρα θα έχω:

$$\hat{\mathrm{AB\Gamma}} = \hat{\mathrm{BE\Gamma}} + \hat{\mathrm{B\Gamma E}} \xrightarrow{\hat{\mathrm{BE\Gamma}}=\hat{\mathrm{B\Gamma E}}=\hat{\varphi}} \hat{\mathrm{AB\Gamma}} = \hat{\varphi} + \hat{\varphi} \Rightarrow \hat{\mathrm{AB\Gamma}} = 2\hat{\varphi}\,(4)$$

Γ*νωρίζω ότι* <u>*οι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου είναι ίσες.*</u>

Τ*ο τετράπλευρο* ΑΒΓΔ *είναι παραλληλόγραμμο.*Ο*πότε θα ισχύει* :

$$\hat{\Delta\mathrm{AB}} = \hat{\Delta\Gamma\mathrm{B}} = \hat{x}\,(5)\,(\Omega\varsigma\ \alpha\pi\acute{\epsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\epsilon\varsigma\ \pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda o\gamma\rho\acute{\alpha}\mu\mu o\upsilon)$$

Γ*νωρίζω ότι* <u>*το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι ίσο με* 360^0</u>.Ο*πότε στο παραλληλόγραμμο* ΑΒΓΔ *θα έχω* :

$$\hat{\mathrm{A}\Delta\Gamma} + \hat{\Delta\mathrm{AB}} + \hat{\mathrm{AB\Gamma}} + \hat{\Delta\Gamma\mathrm{B}} = 360^0 \overset{\substack{\hat{\mathrm{A}\Delta\Gamma}=2\hat{\omega}\\ \hat{\mathrm{AB\Gamma}}=2\hat{\varphi}\\ \hat{\Delta\mathrm{AB}}=\hat{\Delta\Gamma\mathrm{B}}=\hat{x}}}{\Longleftrightarrow} 2\hat{\omega} + 2\hat{\varphi} + \hat{x} + \hat{x} = 360^0 \Leftrightarrow$$

$$2\hat{\omega} + 2\hat{\varphi} + 2\hat{x} = 360^0 \Leftrightarrow 2\left(\hat{\omega} + \hat{\varphi} + \hat{x}\right) = 360^0 \Leftrightarrow \hat{\omega} + \hat{\varphi} + \hat{x} = \frac{360^0}{2} \Leftrightarrow$$

$$\hat{\omega} + \hat{\varphi} + \hat{x} = 180^0\,(6)$$

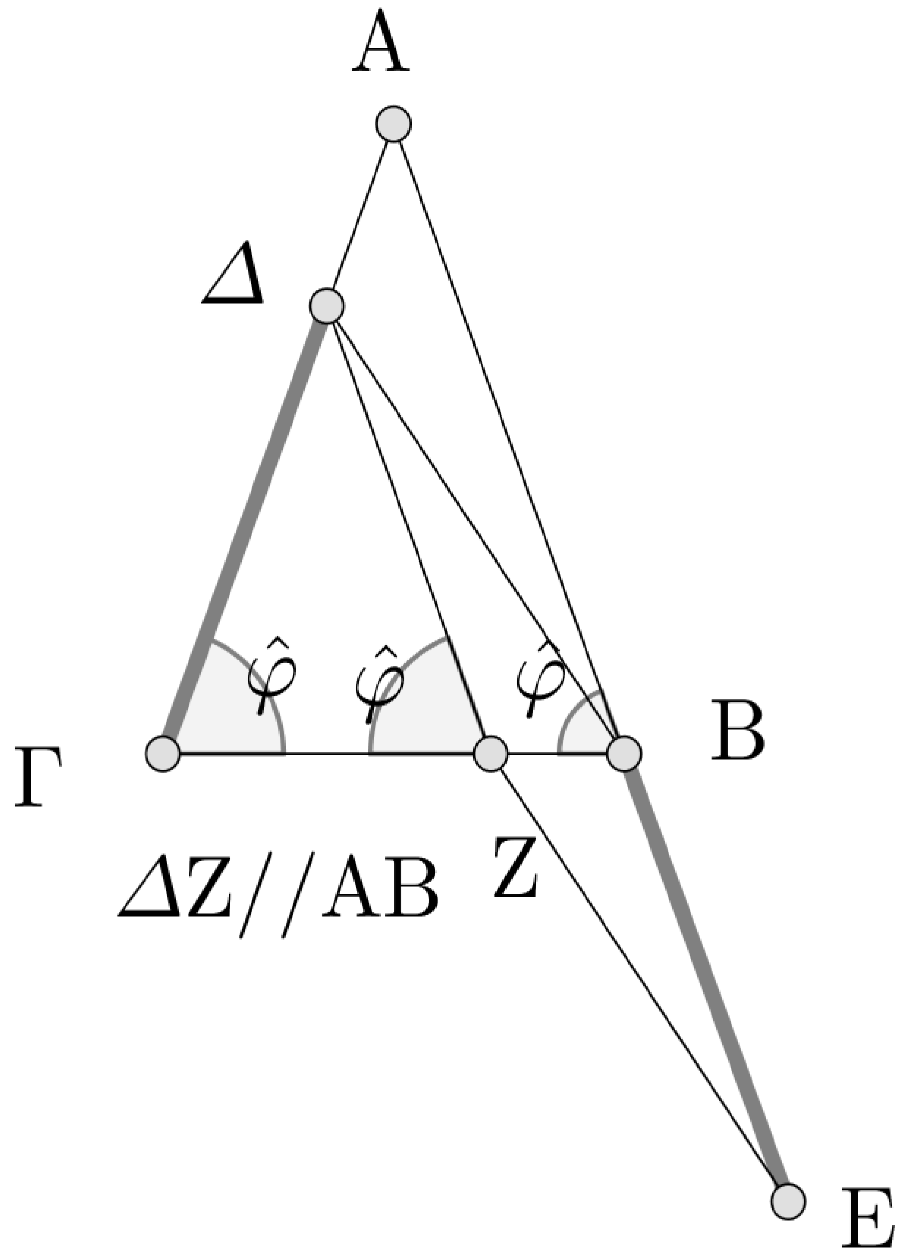
$$\acute{E}\chi\omega : \hat{\mathrm{Z\Gamma E}} = \hat{\Delta\Gamma\mathrm{Z}} + \hat{\Delta\Gamma\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{B\Gamma E}} \overset{\substack{\hat{\Delta\Gamma\mathrm{Z}}=\hat{\omega}\\ \hat{\Delta\Gamma\mathrm{B}}=\hat{x}\\ \hat{\mathrm{B\Gamma E}}=\hat{\varphi}}}{=} \hat{\omega} + \hat{x} + \hat{\varphi} = 180^0$$

Ε*πειδή η* $\hat{\mathrm{Z\Gamma E}}$ *είναι ευθεία γωνία προκύπτει ότι τα σημεία* Ζ,Γ *και* Ε *είναι συνευθειακά.*

14.

Δ*ίνεται ισοσκελές τρίγωνο* ΑΒΓ(ΑΒ = ΑΓ) *και σημείο* Δ *της* ΑΓ. Π*ροεκτείνουμε την* ΑΒ *κατα τμήμα* ΒΕ = ΓΔ.Ν*α αποδείξετε ότι η* ΒΓ *διχοτομεί τη* ΔΕ.

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
ΑΒ = ΑΓ, ΒΕ = ΓΔ, ΔΖ / / ΑΒ	Τ*α ευθύγραμμα τμήματα* ΔΕ, ΒΖ *διχοτομούνται*



$\Phi\acute{\varepsilon}\rho\nu\omega\ \Delta Z//AB$

$\Sigma\tau o$ *ισοσκελές τρίγωνο* $AB\Gamma\left(AB=A\Gamma\right)$ *θα έχω* $\hat{B}=\hat{\Gamma}=\hat{\varphi}(1)$

$\left(\Omega\varsigma\right.$ *γωνές προσκείμενες στην βάση ισοσκελούς τριγώνου*$\left.\right)$

$O\iota$ *παράλληλες* $\Delta Z//B\Gamma$ *τέμνουν την* $B\Gamma.O$*πότε θα έχω*:

$\Delta\hat{Z}\Gamma=\hat{B}=\hat{\varphi}(2)$ $\left(\Omega\varsigma\right.$ *εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη*$\left.\right)$

$\text{Απο}\ \textit{τις σχέσεις}\ (1),(2)\ \textit{θα έχω}:$

$$\left.\begin{cases}\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\hat{\varphi}\\ \Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma=\hat{\mathrm{B}}=\hat{\varphi}\end{cases}\right\}\Rightarrow \Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma=\hat{\Gamma}$$

Σ*το τρίγωνο* $\Delta\mathrm{Z}\Gamma$ *έχω* $\Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma=\hat{\Gamma}$.Ο*πότε θα έχω*:

$$\Delta\Gamma=\Delta\mathrm{Z}(3)\begin{pmatrix}\Gamma\textit{ιατί στο ίδιο τρίγωνο ή σε δυο ίσα τρίγωνα}\\ \textit{απέναντι απέναντι απο ίσες γωνίες βρίσκονται}\\ \textit{ίσες πλευρές}\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{cases}\Delta\Gamma=\Delta\mathrm{Z}\\ \Delta\Gamma=\mathrm{BE}\end{cases}\right\}\Rightarrow \Delta\mathrm{Z}=\mathrm{BE}$$

Ε*πειδή* $\Delta\mathrm{Z}//=\mathrm{BE}$ *το τετράπλευρο* ΔΒΕΖ *είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δυο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες.*

Γ*νωρίζω ότι* <u>*οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου διχοτομούνται*</u>

Ε*πειδή το τετράπλευρο* ΔΒΕΖ *είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες του διχοτομούνται.Άρα τα ευθύγραμμα τμήματα* ΔΕ, ΒΖ *διχοτομούνται.*Σ*υνεπώς η η* ΒΓ *διέρχεται απο το μέσο της* ΔΕ

Σ*υνεπώς η* ΒΓ *διχοτομεί τη* ΔΕ.