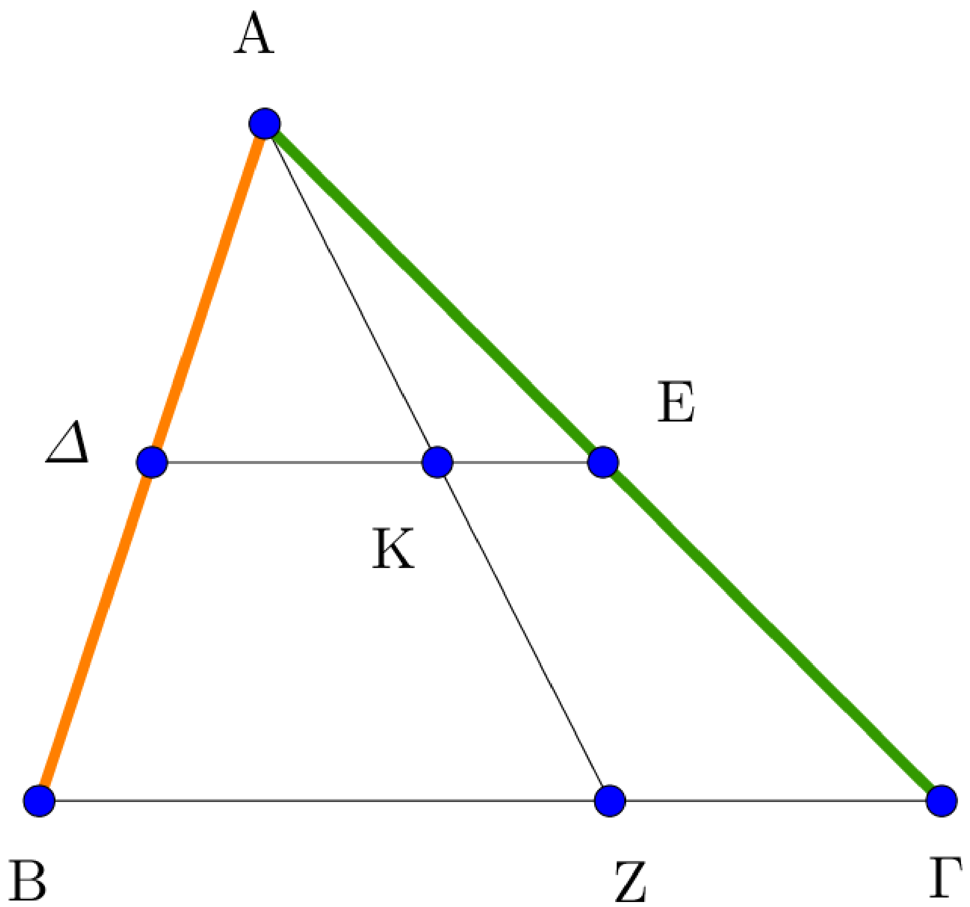
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

1.

Αν Δ,Ε *είναι τα μέσα των πλευρών* ΑΒ *και* ΑΓ *τριγώνου* ΑΒΓ *και* Ζ *τυχαίο σημείο της* ΒΓ, *να αποδείξετε ότι η* ΔΕ *διχοτομεί την* ΑΖ



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
Δ : Το *μέσο της* ΑΒ, Ε : Μ*έσο της* ΑΓ	ΑΚ = ΚΖ

$\Sigma\tau o\ \tau\rho i\gamma\omega\nu o\ \mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Gamma\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\Delta:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{AB}\\(\mathrm{II})\mathrm{E}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{A}\Gamma\end{cases}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \Delta\mathrm{E}//\mathrm{B}\Gamma$

$(\Omega\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon}\gamma\rho\alpha\mu\mu o\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\ \pi o\upsilon\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o\ \tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha\ \tau\omega\nu\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}\nu\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon)$

$\Sigma\tau o\ \tau\rho i\gamma\omega\nu o\ \mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\mathrm{Z}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\Delta:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{AB}\\(\mathrm{II})\Delta\mathrm{K}//\mathrm{BZ}\end{cases}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{K}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \tau o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{AZ}$

$$\begin{pmatrix}\Omega\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon}\gamma\rho\alpha\mu\mu o\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\ \pi o\upsilon\ \varphi\acute{\varepsilon}\rho\omega\ \alpha\pi o\ \tau o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \mu\iota\alpha\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda o\ \sigma\varepsilon\ \mu\iota\alpha\ \acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\end{pmatrix}$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \mathrm{AK}=\mathrm{KZ}$

2.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o$ ΑΒΓ $\kappa\alpha\iota\ \eta\ \delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma\ \tau o\upsilon$ ΑΔ. Αν Ε,Ζ $\kappa\alpha\iota$ Η $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha\ \tau\omega\nu$ ΒΔ,ΑΔ $\kappa\alpha\iota$ ΑΓ $\alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi\alpha,\nu\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota\ \tau o$ ΔΕΖΗ $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\acute{o}\gamma\rho\alpha\mu\mu o$

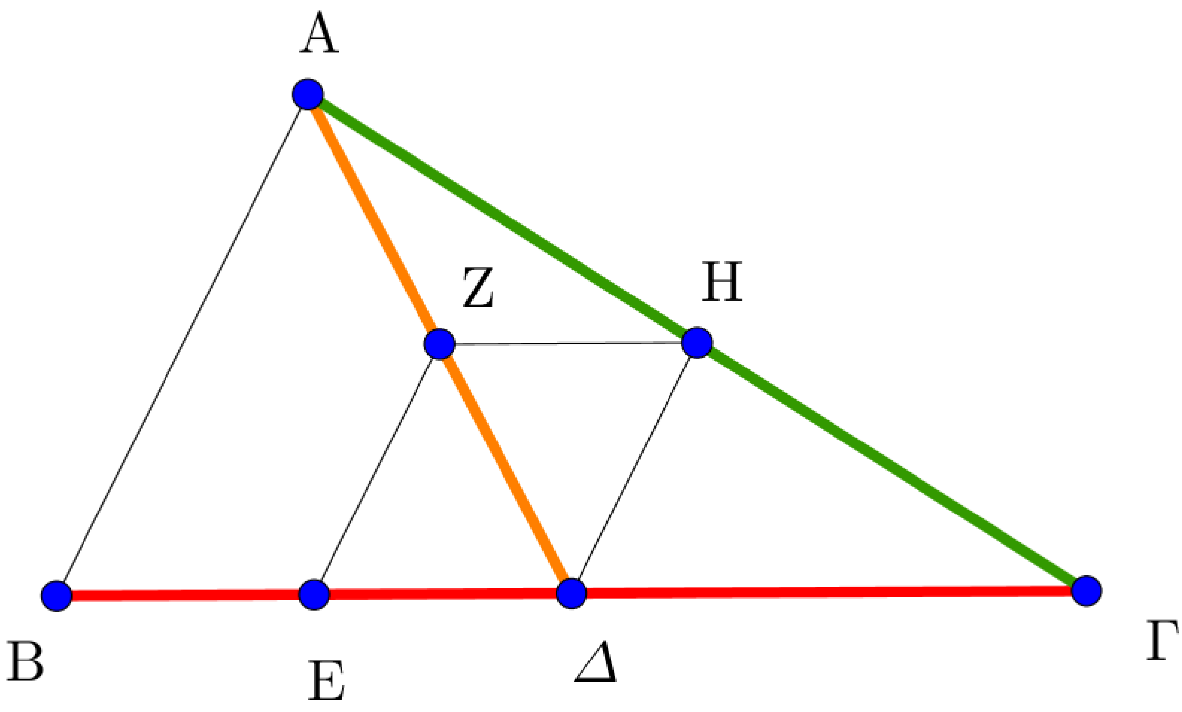
ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\Delta:\mathrm{T}o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B}\Gamma,\mathrm{E}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{BZ}$ $\mathrm{Z}:\mathrm{T}o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{A}\Delta,\mathrm{H}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{A}\Gamma$	$\Delta\mathrm{EZH}:\Pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\acute{o}\gamma\rho\alpha\mu\mu o$

$\Sigma\tau o\ \tau\rho i\gamma\omega\nu o\ \mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Delta\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\mathrm{E}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B}\Delta\\(\mathrm{II})\mathrm{Z}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{AZ}\end{cases}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{EZ}//=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}(1)$

$$\begin{pmatrix}\Omega\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon}\gamma\rho\alpha\mu\mu o\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\ \pi o\upsilon\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o\ \tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha\ \tau\omega\nu\\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}\nu\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\end{pmatrix}$$



$\Sigma\tau o\ \tau\rho i\gamma\omega\nu o\ \overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\begin{Bmatrix}(\mathrm{I})\Delta:\text{Μέσο μέσο της } \mathrm{B\Gamma} \\ (\mathrm{II})\mathrm{H}:\text{Μέσο μέσο της } \mathrm{A\Gamma}\end{Bmatrix}$$

$\text{Οπότε } \Delta\mathrm{H} // = \dfrac{\mathrm{AB}}{2} (2)$

$\left(\text{Ως ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται απο τα μέσα των πλευρών τριγώνου}\right)$

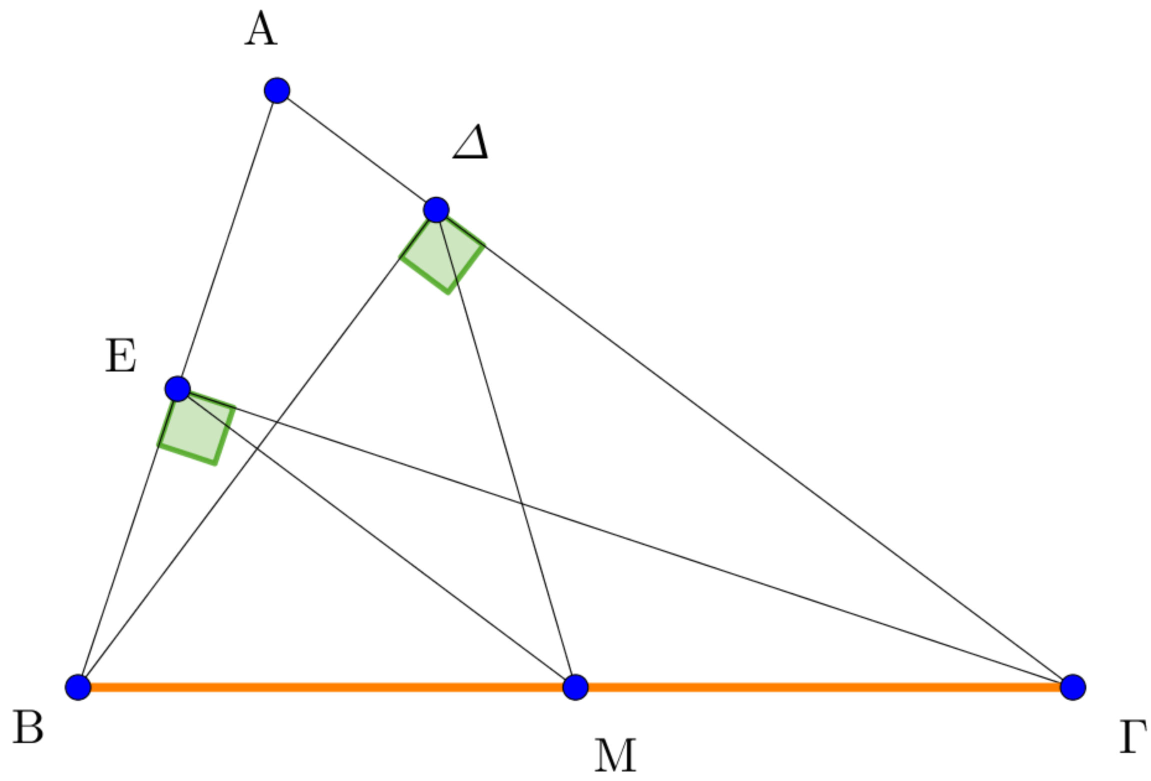
$\text{Συνεπώς απο τις σχέσεις } (1),(2) \text{ έχω } \mathrm{EZ} // = \Delta\mathrm{H}.\text{Άρα το τετράπλευρο } \Delta\mathrm{EZH} \text{ είναι παραλληλόγραμμο}$

$\left(\text{Ως τετράπλευρο που έχει δυο τουλάχιστον απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες}\right)$

3.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ.Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ να αποδείξετε ότι $\mathrm{M\Delta} = \mathrm{ME}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{B\Delta} \perp \mathrm{A\Gamma}, \mathrm{\Gamma E} \perp \mathrm{AB}, \mathrm{M}$: Μέσο της ΒΓ	$\mathrm{M\Delta} = \mathrm{ME}$



Σ*το ορθογώνιο τρίγωνο* $\overset{\Delta}{\mathrm{B E \Gamma}}\left(\hat{\mathrm{E}}=90^0\right)$, ΕΜ *είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα* ΒΓ.*Άρα θα έχω*:

$$\mathrm{EM}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}(1)$$

$\left(\begin{array}{l}\text{Ως διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί}\\ \text{στην υποτείνουσα}\end{array}\right)$

Σ*το ορθογώνιο τρίγωνο* $\overset{\Delta}{\mathrm{B \Delta \Gamma}}\left(\hat{\Delta}=90^0\right)$, ΔΜ *είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα* ΒΓ.*Άρα θα έχω*:

$$\Delta\mathrm{M}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}(1)$$

$\left(\begin{array}{l}\text{Ως διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί}\\ \text{στην υποτείνουσα}\end{array}\right)$

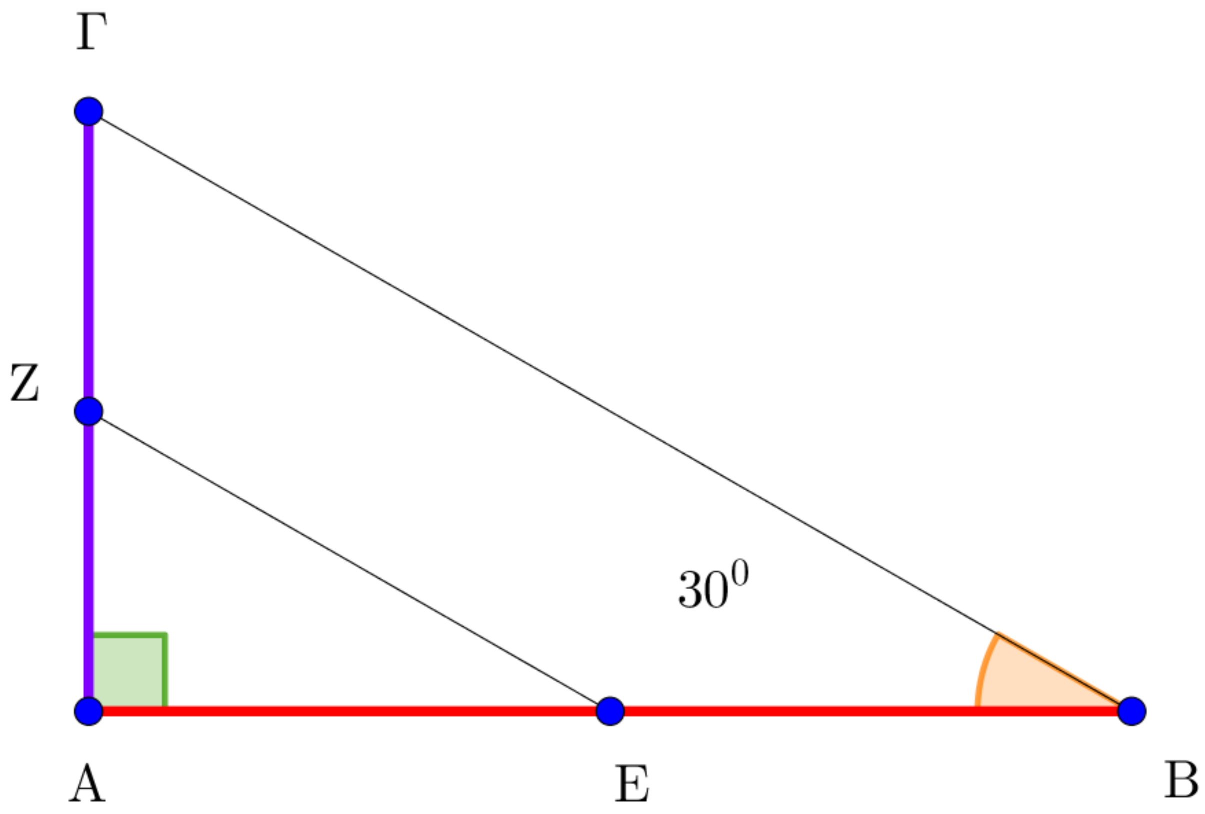
Α*πο τις σχέσεις* $(1),(2)$ *θα έχω*:

$$\mathrm{EM}=\Delta\mathrm{M}$$

4.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}\left(\hat{\mathrm{A}}=90^0\right)$ *με* $\hat{\mathrm{B}}=30^0$. *Αν* Ε, Ζ *είναι τα μέσα των* ΑΒ *και* ΑΓ *αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $\mathrm{EZ}=\mathrm{A\Gamma}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\hat{\mathrm{A}}=90^0, \hat{\mathrm{B}}=30^0$, Ε : *Μέσο της* ΑΒ, Ζ : *Μέσο της* ΑΒ	$\mathrm{EZ}=\mathrm{A\Gamma}$



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}\left(\hat{\mathrm{A}}=90^0\right)$ *με* $\hat{\mathrm{B}}=30^0$ *θα έχω*:

$$\mathrm{A\Gamma}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}\quad(1)$$

(*Ως κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου που βρίσκεται απέναντι απο γωνία* 30^0)

$\Sigma\tau o\ \tau\rho i\gamma\omega\nu o\ \overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

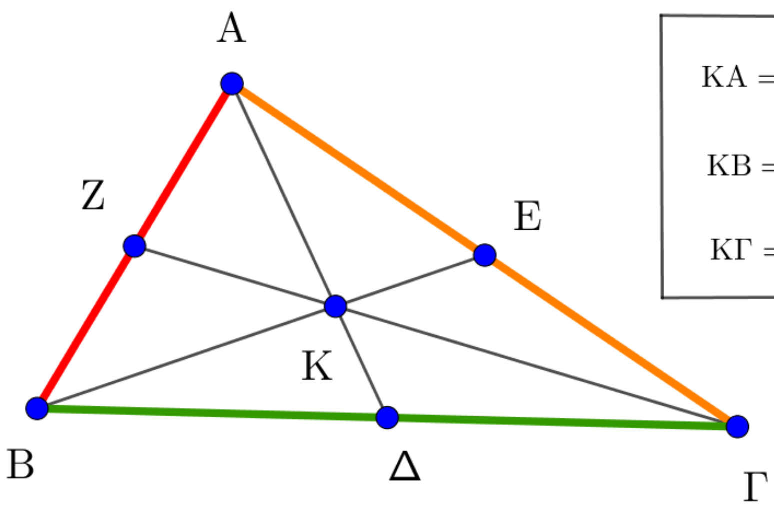
$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{E}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{AB}\\ (\mathrm{II})\,\mathrm{Z}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{A\Gamma}\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{EZ}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}(2)$

$\left(\begin{array}{l}\Omega\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon}\gamma\rho\alpha\mu\mu o\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\ \pi o\upsilon\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o\ \tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha\ \tau\omega\nu\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}\nu\\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\end{array}\right)$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (1),(2)\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{A\Gamma}=\mathrm{EZ}$

ΒΑΡΥΚΕΝΤΟ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ
Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται απο το ίδιο σημείο.Το κοινό σημείο απο το οποιό διέρχονται οι διάμεσοι του τριγώνου καλείται βαρύκεντρο
$\boxed{\text{Συνδέω το βαρύκενρο με την κορυφή ενός τριγώνου}}=\dfrac{2}{3}\boxed{\text{Η διάμεσος του τριγώνου που διέρχεται απο αυτήν την κορυφή}}$
$\boxed{\text{Συνδέω το βαρύκενρο με το μέσο μιας πλευράς}}=\dfrac{1}{3}\boxed{\text{Η διάμεσος του τριγώνου που διέρχεται απο το μέσο αυτής της πλευράς}}$



$$KA = \frac{2}{3}\,A\Delta \quad , \quad K\Delta = \frac{1}{3}\,A\Delta$$
$$KB = \frac{2}{3}\,BE \quad , \quad KE = \frac{1}{3}\,BE$$
$$K\Gamma = \frac{2}{3}\,\Gamma Z \quad , \quad KZ = \frac{1}{3}\,\Gamma Z$$

Δ : *Μέσο της* ΒΓ Ε : *Μέσο της* ΑΓ Ζ : *Μέσο της* ΑΒ
Κ : *Το βαρύκεντρο του τριγώνου* ΑΒΓ

5.

Αν *σε τρίγωνο* ΑΒΓ *είναι* $\mu_\beta = \mu_\gamma$ *να αποδείξετε οτι* $\beta = \gamma$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
Μ : *Μέσο της* ΑΓ, Ε : *Μέσο της* ΑΒ, ΒΜ = ΓΕ	ΑΓ = ΑΒ

Ε*πειδή* Μ *μέσο της* ΑΓ *θα έχω* :

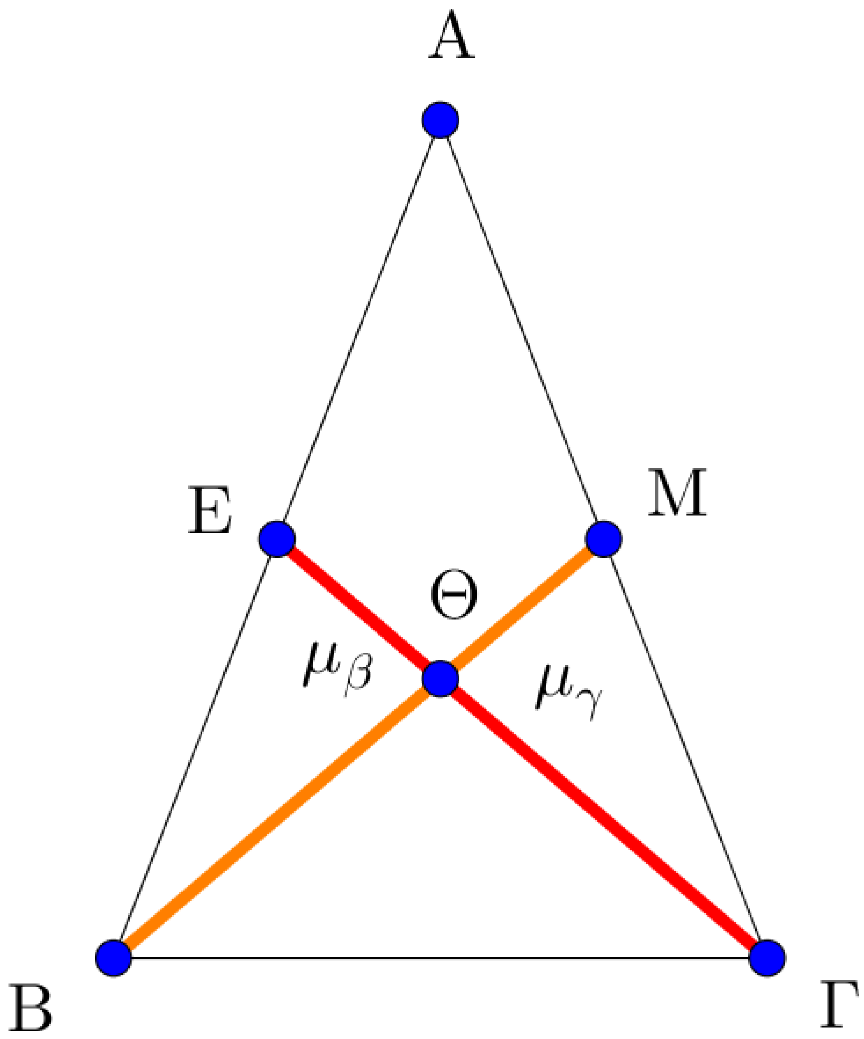
$$AM = M\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} (1)$$

Ε*πειδή* Ε *μέσο της* ΑΒ *θα έχω* :

$$AE = EB = \frac{AB}{2} (2)$$

Σ*το τρίγωνο* ΑΒΓ *οι* ΒΜ, ΓΕ *είναι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές* ΑΓ, ΑΒ.Σ*υνεπώς* Θ *είναι το βαρύκεντρο του* ΑΒΓ.Ο*πότε θα έχω* :

$$\Theta B = \frac{2}{3}BM,\ \Theta\Gamma = \frac{2}{3}\Gamma E,\ \Theta M = \frac{1}{3}BM,\ \Theta E = \frac{1}{3}\Gamma E$$



Θ : Το *βαρύκεντρο του* ΑΒΓ

$$\left.\begin{cases} \Theta B = \frac{2}{3} BM \\ \Theta\Gamma = \frac{2}{3}\Gamma E \\ BM = \Gamma E \end{cases}\right\} \Rightarrow \Theta B = \Theta\Gamma (3)$$

$$\left.\begin{cases} \Theta M = \frac{1}{3} BM \\ \Theta E = \frac{1}{3}\Gamma E \\ BM = \Gamma E \end{cases}\right\} \Rightarrow \Theta M = \Theta E (4)$$

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{E\Theta B}$ *και* $\overset{\triangle}{M\Theta\Gamma}$. *Αυτά έχουν*:

$$\left.\begin{cases} (I)\Theta B = \Theta\Gamma (3) \\ (II)\Theta E = \Theta M (4) \\ (III) E\hat{\Theta}B = M\hat{\Theta}\Gamma (\Omega\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\nu) \end{cases}\right\}$$

Συνεπώς θα έχω $\overset{\triangle}{E\Theta B} = \overset{\triangle}{M\Theta\Gamma} (\Pi\Gamma\Pi)$

Οπότε: $EB = M\Gamma \xRightarrow[EB=\frac{AB}{2}(2)]{M\Gamma=\frac{A\Gamma}{2}(1)} \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} \Rightarrow A\Gamma = AB$

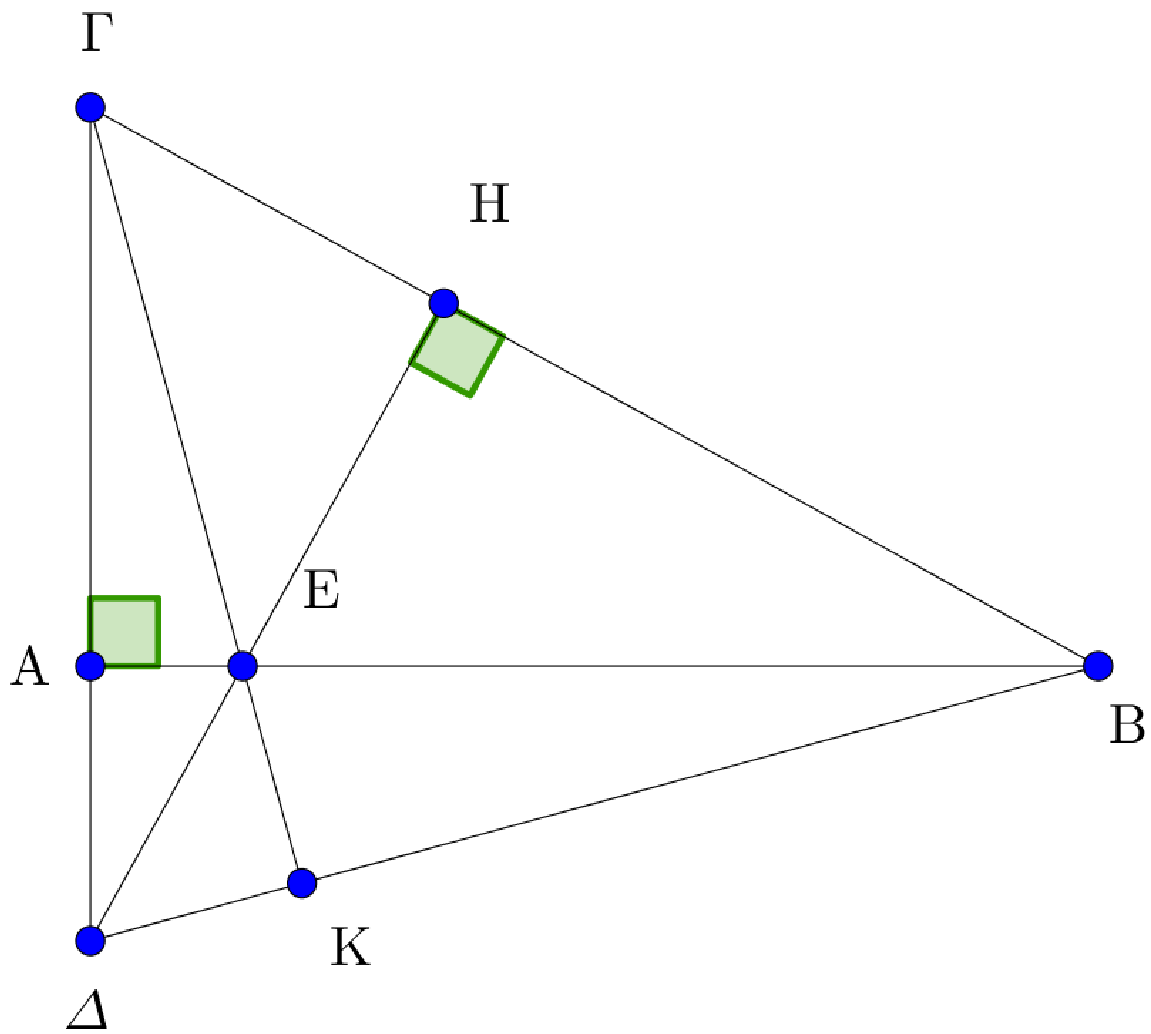
6.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma \left(\hat{A} = 90^0\right)$. *Προεκτείνουμε τη* ΓA *κατά τυχαίο τμήμα* $A\Delta$. *Απο το* Δ *φέρνουμε* $\Delta H \perp B\Gamma$, *η οποία τέμνει την* AB *στο* E. *Να αποδείξετε ότι* $\Gamma E \perp \Delta B$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\hat{A} = 90^0, \Delta H \perp B\Gamma$	$\Gamma E \perp \Delta B$

Στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ *τα* $BA, \Delta H$ *είναι ύψη του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές* $\Delta\Gamma, B\Gamma$. *Συνεπώς* E *είναι το ορθόκεντρο του* $\Delta B\Gamma$.

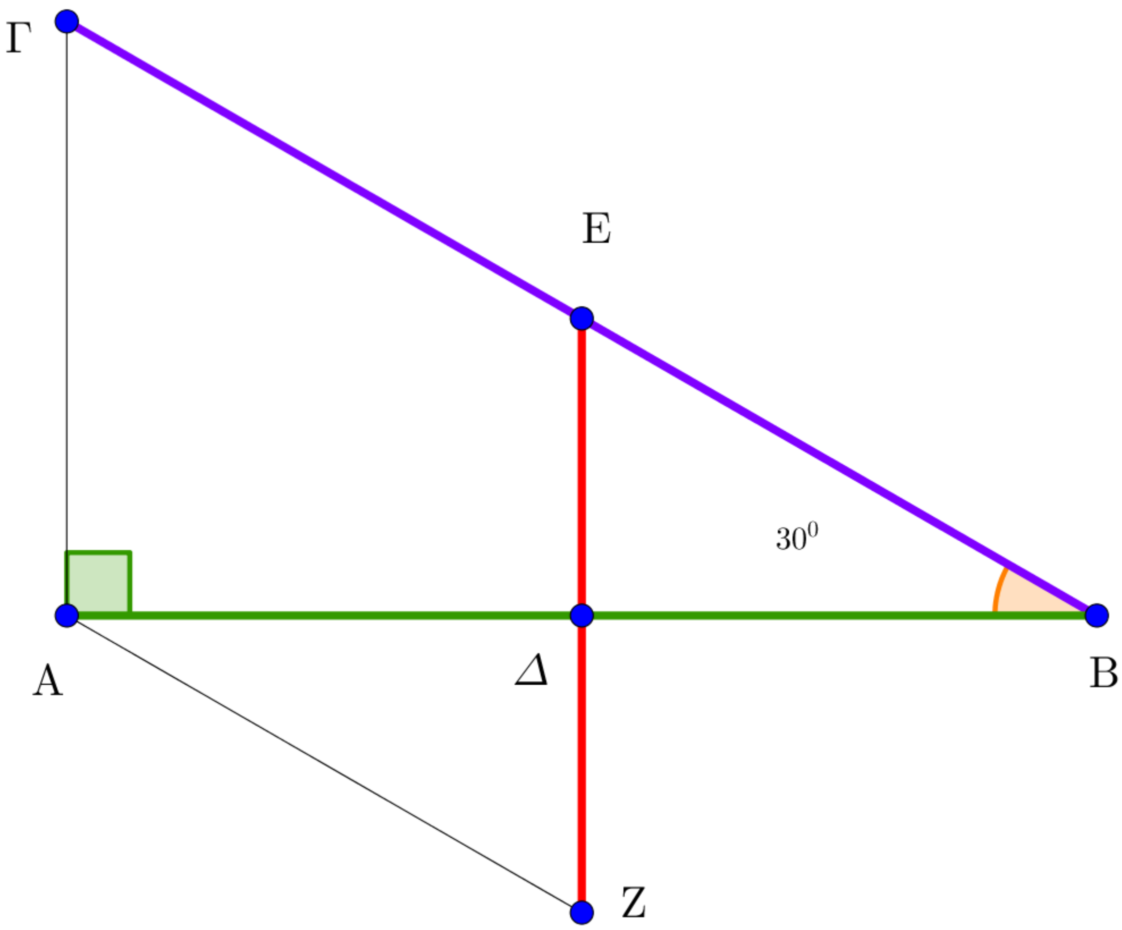
Οπότε θα έχω: $\Gamma E \perp \Delta B$



7.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ\left(\hat{Α}=90^0\right)$ *με* $\hat{Β}=30^0$ *και* Δ,Ε *τα μέσα των* ΑΒ *και* ΒΓ *αντίστοιχα.Προεκτείνουμε την* ΕΔ *κατα τμήμα* ΔΖ = ΕΔ. Ν*α αποδείξετε οτι το* ΑΓΕΖ *είναι ρόμβος*

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\hat{Α}=90^0,\hat{Β}=30^0$, Δ : Μ*έσο της* ΑΒ Ε : Μ*έσο της* ΒΓ, ΔΖ = ΕΔ	ΑΓΕΖ : Ρ*όμβος*



$\Sigma\tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\Delta: \mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{AB} \\ (\mathrm{II})\mathrm{E}: \mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B\Gamma} \end{Bmatrix}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \Delta\mathrm{E}//=\dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$

$$\begin{pmatrix} \Omega\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon}\gamma\rho\alpha\mu\mu o\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\ \pi o\upsilon\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o\ \tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha\ \tau\omega\nu \\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}\nu\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon \end{pmatrix}$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \Delta\mathrm{Z}=\mathrm{E}\Delta\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{ZE}=2\mathrm{E}\Delta \overset{\Delta\mathrm{E}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}}{=} 2\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}=\mathrm{A\Gamma}$$

Επειδή $ZE//=A\Gamma$ το τετράπλευρο ΓEZA είναι παραλληλόγραμμο

$\left(\begin{array}{l}\text{Ως τετράπλευρο που έχει δυο τουλάχιστον απέναντι πλευρές}\\ \text{παράλληλες και ίσες}\end{array}\right)$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}\left(\hat{A}=90^0\right)$ με $\hat{B}=30^0$ θα έχω:

$$A\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}(1)$$

$\left(\begin{array}{l}\text{Ως κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου που βρίσκεται}\\ \text{απέναντι απο γωνία } 30^0\end{array}\right)$

Επειδή E μέσο της $B\Gamma$ θα έχω:

$$BE=\Gamma E=\frac{B\Gamma}{2}(2)$$

Απο τις $(1),(2)$ θα έχω $A\Gamma=\Gamma E$

Επειδή το τετράπλευρο ΓEZA είναι παραλληλόγραμμο και $A\Gamma=\Gamma E$ θα είναι ρόμβος

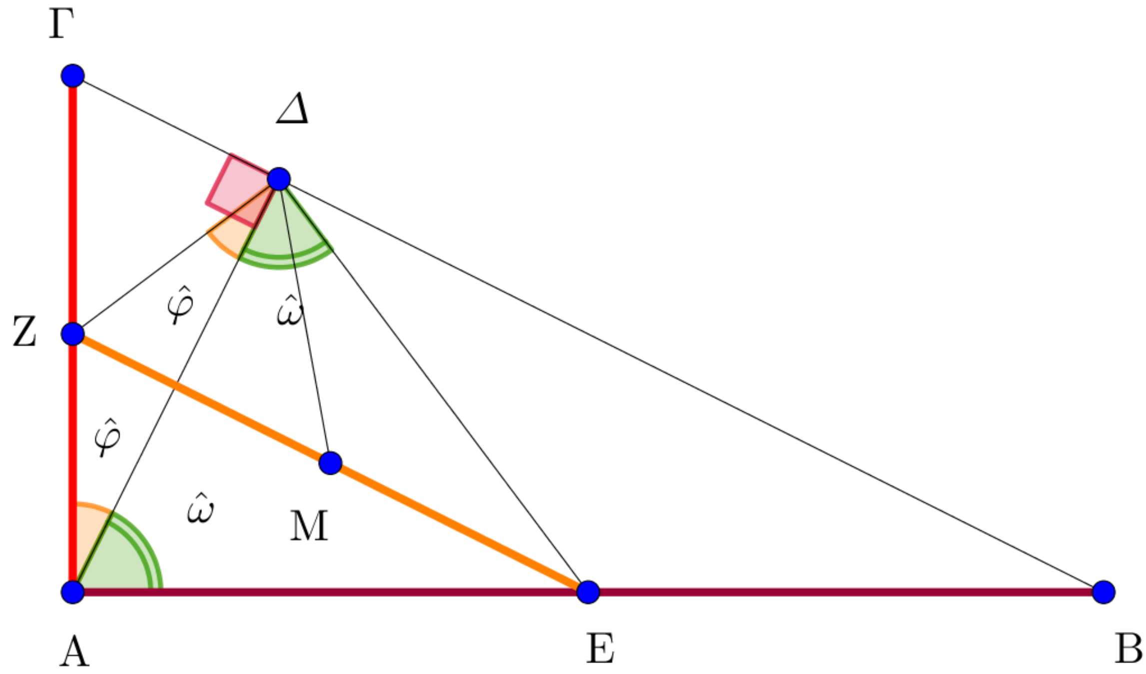
$\left(\begin{array}{l}\text{Ως παραλληλόγραμμο που έχει δυο τουλάχιστον διαδοχικές}\\ \text{πλευρές ίσες}\end{array}\right)$

8.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma\left(\hat{A}=90^0\right)$ και το ύψος του $A\Delta$

(I) Αν E,Z τα μέσα των AB και $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}Z=\hat{A}=90^0$

(II) Αν M είναι το μέσο της EZ, να αποδείξετε ότι $\Delta M=\frac{B\Gamma}{4}$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\hat{A}=90^0, A\Delta \perp B\Gamma, Z: \text{Μέσο της } A\Gamma$ $E: \text{Μέσο της } AB, M: \text{Μέσο της } EZ$	$(I)\ E\hat{\Delta}Z=90^0$ $(II)\ \Delta M=\dfrac{B\Gamma}{4}$

(I) Θέτω: $\Gamma\hat{A}\Delta=\hat{\varphi}, \Delta\hat{A}B=\hat{\omega}$

$\hat{A}=90^0 \Rightarrow \Gamma\hat{A}\Delta+\Delta\hat{A}B=90^0 \Rightarrow \hat{\varphi}+\hat{\omega}=90^0\ (1)$

Επειδή Z μέσο της ΑΓ θα έχω:

$AZ=Z\Gamma=\dfrac{A\Gamma}{2}\ (2)$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}\left(\hat{\Delta}=90^0\right)$, ΔΕ είναι η διάμεσος

που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΓ.Άρα θα έχω:

$\Delta Z=\dfrac{A\Gamma}{2}\ (3)$

(Ως διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα)

Απο τις σχέσεις $(2),(3)$ έχω $\Delta Z=ZA$

$\Sigma\tau o\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \Delta\mathrm{ZA}\left(\Delta\mathrm{Z}=\mathrm{ZA}\right)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Delta=\mathrm{Z}\hat{\Delta}\mathrm{A}=\hat{\varphi}\left(4\right)$

$\left(\Omega\varsigma\ \pi\alpha\rho\alpha\ \tau\eta\ \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda o\acute{\upsilon}\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\right)$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \mathrm{E}\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{AB}\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{AE}=\mathrm{EB}=\frac{\mathrm{AB}}{2}\left(5\right)$$

$\Sigma\tau o\ o\rho\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{A}\overset{\triangle}{\Delta}\mathrm{B}\left(\hat{\Delta}=90^0\right),\ \Delta\mathrm{E}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \eta\ \delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma$

$\pi o\upsilon\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\ \sigma\tau\eta\nu\ \upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha\ \mathrm{AB}.\ \acute{A}\rho\alpha\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\Delta\mathrm{E}=\frac{\mathrm{AB}}{2}\left(6\right)$$

$$\left(\begin{array}{l}\Omega\varsigma\ \delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma\ o\rho\theta o\gamma\omega\nu\acute{\iota}o\upsilon\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\ \pi o\upsilon\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\\ \sigma\tau\eta\nu\ \upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha\end{array}\right)$$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \left(5\right),\left(6\right)\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \Delta\mathrm{E}=\mathrm{EA}$

$\Sigma\tau o\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \Delta\mathrm{EA}\left(\Delta\mathrm{E}=\mathrm{EA}\right)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$

$$\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Delta=\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{A}=\hat{\varphi}\left(7\right)$$

$\left(\Omega\varsigma\ \pi\alpha\rho\alpha\ \tau\eta\ \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda o\acute{\upsilon}\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\right)$

$$\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z}=\mathrm{Z}\hat{\Delta}\mathrm{A}+\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{A}=\hat{\omega}+\hat{\varphi}\overset{(1)}{=}90^0$$

$\left(\mathrm{II}\right)\Sigma\tau o\ o\rho\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{Z}\overset{\triangle}{\Delta}\mathrm{E}\left(\mathrm{Z}\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^0\right),\ \Delta\mathrm{M}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \eta$

$\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma\ \pi o\upsilon\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}$

$\sigma\tau\eta\nu\ \upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha\ \mathrm{ZE}.\ \acute{A}\rho\alpha\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\Delta\mathrm{M}=\frac{\mathrm{ZE}}{2}\left(8\right)$$

$\Sigma\tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Gamma\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\mathrm{I}\right)\mathrm{E}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{AB}\\ \left(\mathrm{II}\right)\mathrm{Z}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{A}\Gamma\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{ZE}=\dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{2}\left(9\right)$

$\left(\begin{array}{l}\Omega\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon}\gamma\rho\alpha\mu\mu o\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\ \pi o\upsilon\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o\ \tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha\ \tau\omega\nu \\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}\nu\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\end{array}\right)$

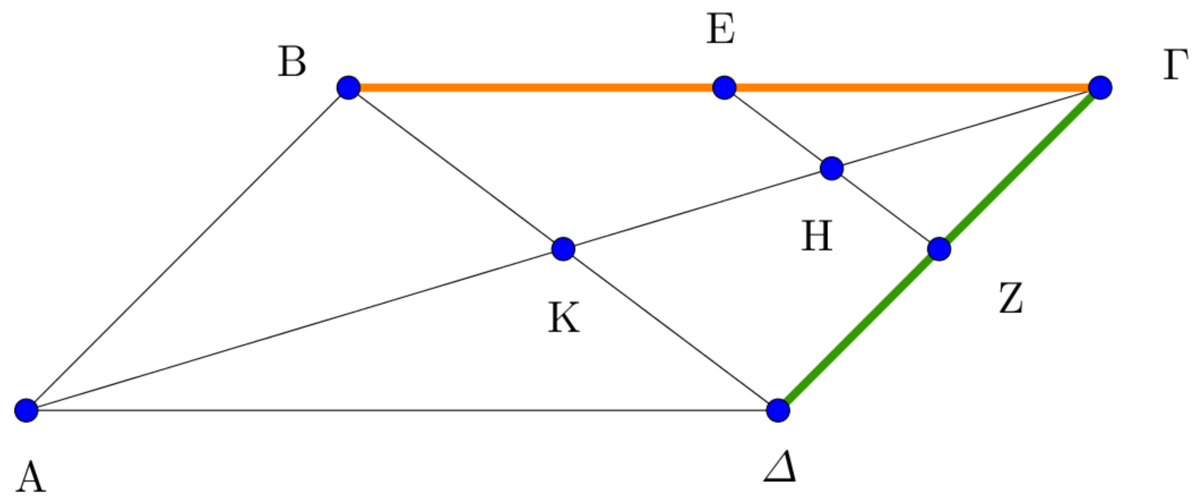
$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (8),(9)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\Delta\mathrm{M}=\frac{\mathrm{ZE}}{2}\overset{\mathrm{ZE}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}}{=}\frac{\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}}{2}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{4}$$

9.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\acute{o}\gamma\rho\alpha\mu\mu o\ \mathrm{AB\Gamma\Delta}\ \kappa\alpha\iota\ \tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha\ \tau\omega\nu\ \mathrm{E}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{Z}$ $\tau\omega\nu\ \mathrm{B\Gamma}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{\Gamma\Delta}\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi\alpha.\mathrm{A}\nu\ \eta\ \mathrm{EZ}\ \tau\acute{\varepsilon}\mu\nu\varepsilon\iota\ \tau\eta\nu\ \delta\iota\alpha\gamma\acute{\omega}\nu\iota o\ \mathrm{A\Gamma}$ $\sigma\tau o\ \mathrm{H},\nu\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota\ \mathrm{\Gamma H}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{4}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AB\Gamma\Delta}:\Pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\acute{o}\gamma\rho\alpha\mu\mu o,$ $\mathrm{E}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B\Gamma},\mathrm{Z}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{\Gamma\Delta}$	$\mathrm{\Gamma H}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{4}$



$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \mathrm{AB\Gamma\Delta}\ \pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\acute{o}\gamma\rho\alpha\mu\mu o\ o\iota\ \delta\iota\alpha\gamma\acute{\omega}\nu\iota\varepsilon\varsigma\ \tau o\upsilon\ \delta\iota\chi o\tau o\mu o\acute{\upsilon}\nu\tau\alpha\iota$

$\acute{\mathrm{A}}\rho\alpha\ \mathrm{K}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \tau o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau o\upsilon\ \varepsilon\upsilon\theta\upsilon\gamma\rho\acute{\alpha}\mu\mu o\upsilon\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma\ \mathrm{A\Gamma}.\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{\Gamma K}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$$

$\Sigma\tau o\ \tau\rho i\gamma\omega\nu o\ \overset{\triangle}{\mathrm{B\Gamma\Delta}}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\,\mathrm{E}: \mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B\Gamma} \\ (\mathrm{II})\,\mathrm{Z}: \mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{\Gamma\Delta}\end{cases}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{EZ}//\mathrm{B\Delta}$

$\left(\Omega\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon}\gamma\rho\alpha\mu\mu o\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\ \pi o\upsilon\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o\ \tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha\ \tau\omega\nu\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}\nu\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\right)$

$\Sigma\tau o\ \tau\rho i\gamma\omega\nu o\ \overset{\triangle}{\mathrm{B\Gamma K}}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\,\mathrm{E}: \mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B\Gamma} \\ (\mathrm{II})\,\mathrm{EH}//\mathrm{BK}\end{cases}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{H}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \tau o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{\Gamma K}$

$\left(\Omega\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon}\gamma\rho\alpha\mu\mu o\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\ \pi o\upsilon\ \varphi\acute{\varepsilon}\rho\omega\ \alpha\pi o\ \tau o\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \mu\iota\alpha\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda o\ \sigma\varepsilon\ \mu\iota\alpha\ \acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\right)$

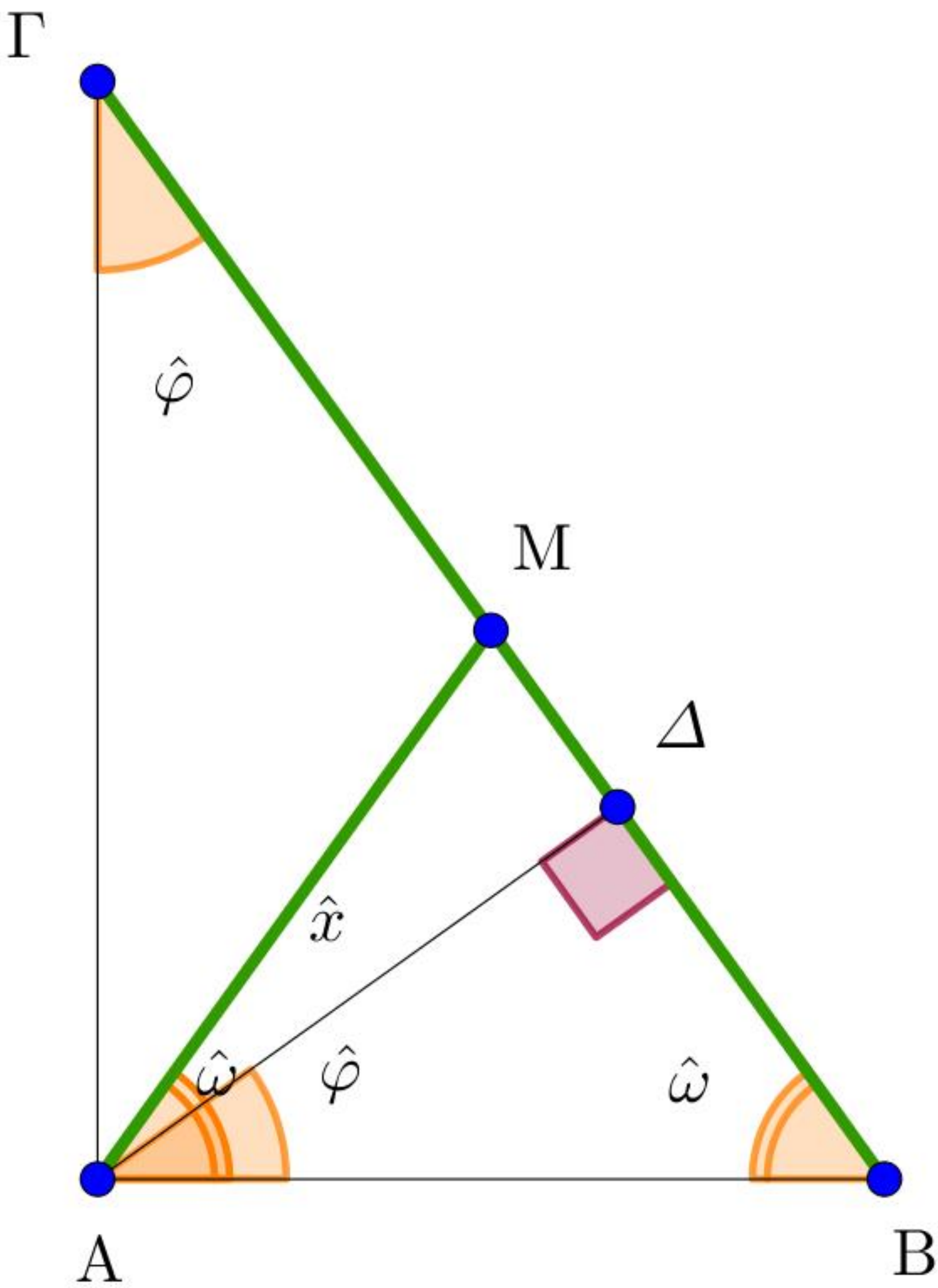
$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{\Gamma H}=\frac{\mathrm{\Gamma K}}{2}\overset{\mathrm{\Gamma K}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}}{=}\frac{\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}}{2}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{4}$$

10.

$\Sigma\varepsilon\ o\rho\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{AB\Gamma}\left(\hat{\mathrm{A}}=90^0\right)\ \mu\varepsilon\ \hat{\mathrm{B}}>\hat{\Gamma}\ \varphi\acute{\varepsilon}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \tau\eta\nu$ $\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\ \tau o\upsilon\ \mathrm{AM}\ \kappa\alpha\iota\ \tau o\ \acute{\upsilon}\psi o\varsigma\ \tau o\upsilon\ \mathrm{A\Delta}.\mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota:$ $\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Delta=\hat{\mathrm{B}}-\hat{\Gamma}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\hat{\mathrm{A}}=90^0,\mathrm{M}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B\Gamma},\mathrm{A\Delta}\perp\mathrm{B\Gamma}$	$\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Delta=\hat{\mathrm{B}}-\hat{\Gamma}$



$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega: \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \hat{x}, \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \hat{\omega}, \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \hat{\varphi}$

Ε$\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}$ Μ $\mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma$ ΒΓ $\theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$\mathrm{BM} = \mathrm{M}\Gamma = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{2} (1)$

$\Sigma\tau o\ o\rho\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}\left(\hat{\mathrm{A}}=90^0\right)$, AM *είναι η διάμεσος*

που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $\mathrm{B\Gamma}$. *Άρα θα έχω*:

$$\mathrm{AM}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}(2)$$

$\left(\begin{array}{l}\text{Ως διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην}\\ \text{υποτείνουσα}\end{array}\right)$

Απο τις σχέσεις $(2),(3)$ *έχω* $\mathrm{AM}=\mathrm{MB}$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AMB}(\mathrm{MA}=\mathrm{MB})$ *θα έχω*

$$\mathrm{M\hat{A}B}=\mathrm{M\hat{B}A}=\hat{\omega}(3)$$

(*Ως παρα τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου*)

Επειδή $\mathrm{A\Delta}\perp\mathrm{B\Gamma},\mathrm{AB}\perp\mathrm{A\Gamma}$ *θα έχω* $\mathrm{\Delta\hat{A}B}=\hat{\Gamma}=\hat{\varphi}(4)$

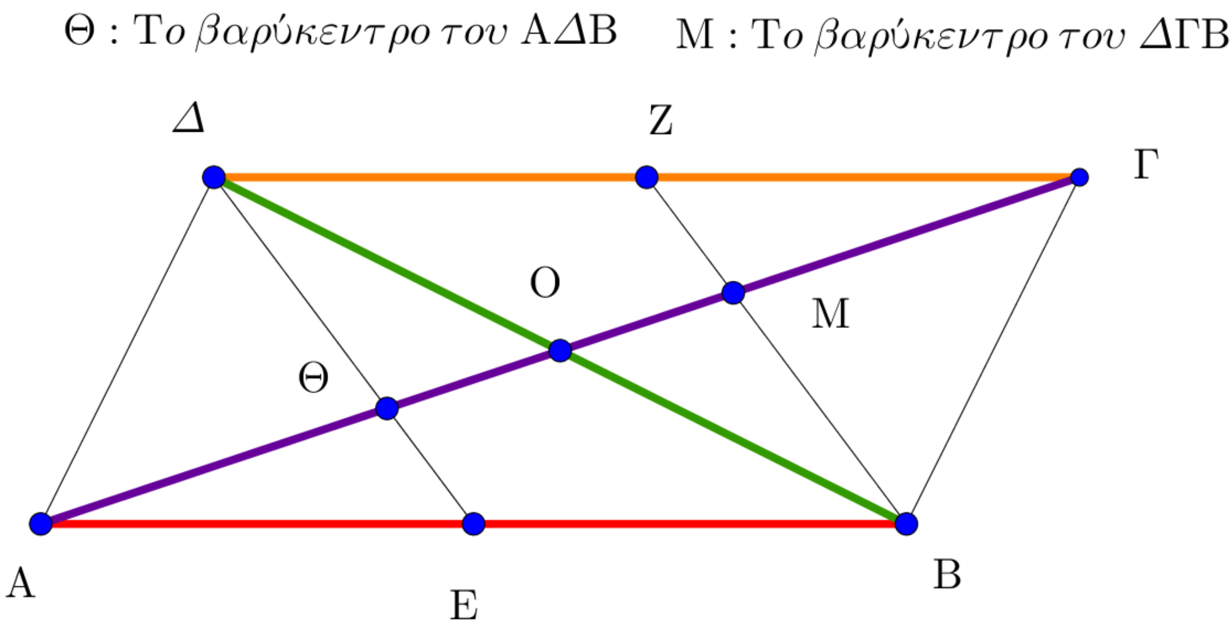
$\left(\begin{array}{l}\text{Ως οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους μια}\\ \text{προς μια κάθετες}\end{array}\right)$

$$\mathrm{M\hat{A}\Delta}=\hat{x}=\hat{\omega}-\hat{\varphi}\overset{\substack{\hat{\mathrm{B}}=\hat{\omega}\\ \hat{\Gamma}=\hat{\varphi}}}{=}\hat{\mathrm{B}}-\hat{\Gamma}$$

11.

Αν $\mathrm{E,Z}$ *τα μέσα των πλευρών* $\mathrm{AB,\Gamma\Delta}$ *παραλληλογράμμου* $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ *αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι* $\mathrm{\Delta E}$ *και* BZ *τριχοτομούν τη διαγώνιο* $\mathrm{A\Gamma}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AB\Gamma\Delta}$: Π*αραλληλόγραμμμο*, E: *μέσο της* AB Z: *μέσο της* $\mathrm{\Gamma\Delta}$	$\mathrm{\Theta A}=\mathrm{\Theta M}=\mathrm{M\Gamma}$



Επειδή ΑΒΓΔ *παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες του διχοτομούνται*
Άρα Ο *μέσο των ευθυγράμμων τμημάτων* ΑΓ, ΒΔ
Στο τρίγωνο ΔΓΒ *οι* ΓΟ, ΒΖ *είναι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές* ΔΒ, ΓΔ.*Συνεπώς* Μ *είναι το βαρύκεντρο του* ΔΓΒ.*Οπότε θα έχω*:

$$\mathrm{M\Gamma} = \frac{2}{3}\,\mathrm{\Gamma O} \overset{\substack{\mathrm{\Gamma O}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} \\ \mathrm{O}:\text{Μέσο του ΑΓ}}}{=} \frac{2}{3}\,\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{3}$$

Στο τρίγωνο ΔΑΒ *οι* ΑΟ, ΔΕ *είναι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές* ΔΒ, ΑΒ.*Συνεπώς* Θ *είναι το βαρύκεντρο του* ΔΑΒ.*Οπότε θα έχω*:

$$\Theta\mathrm{A} = \frac{2}{3}\,\mathrm{AO} \overset{\substack{\mathrm{AO}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} \\ \mathrm{O}:\text{Μέσο του ΑΓ}}}{=} \frac{2}{3}\,\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{3}$$

$$\text{Έχω}: \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A}\Theta + \Theta\mathrm{M} + \mathrm{M\Gamma} \overset{\substack{\Theta\mathrm{A}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{3} \\ \mathrm{M\Gamma}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{3}}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{A\Gamma} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{3} + \Theta\mathrm{M} + \frac{\mathrm{A\Gamma}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3\mathrm{A\Gamma}}{3} = \frac{2\mathrm{A\Gamma}}{3} + \Theta\mathrm{M} \Leftrightarrow \Theta\mathrm{M} = \frac{3\mathrm{A\Gamma}}{3} - \frac{2\mathrm{A\Gamma}}{3} \Leftrightarrow \Theta\mathrm{M} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{3}$$

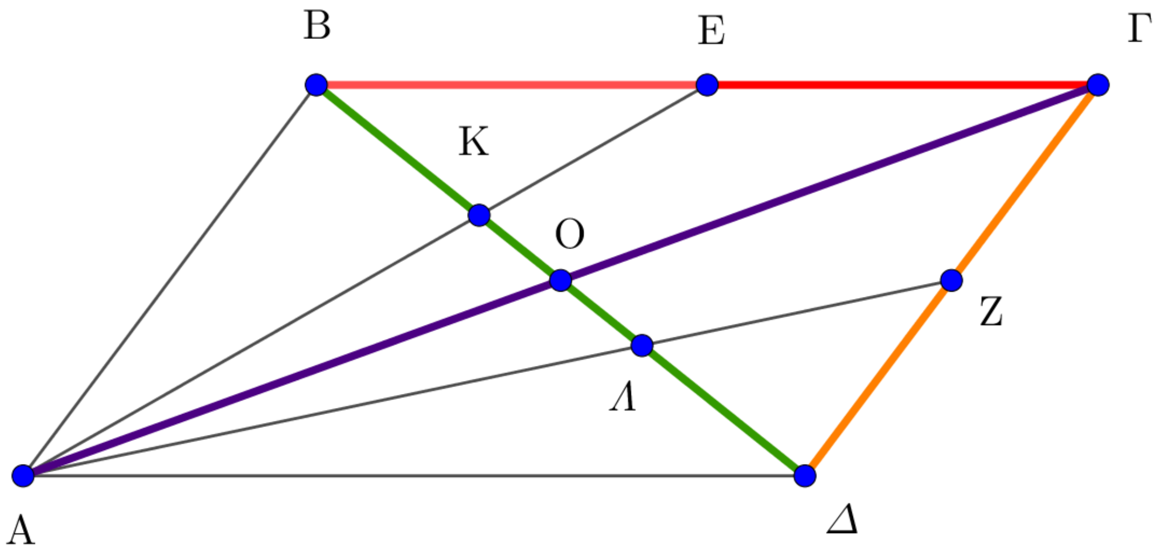
$$\text{Οπότε}: \Theta\mathrm{A} = \Theta\mathrm{M} = \mathrm{M\Gamma}$$

12.

Αν E,Z *τα μέσα των πλευρών* $\mathrm{B\Gamma},\Gamma\Delta$ *παραλληλογράμμου* $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ *αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι* AE *και* $\Delta\mathrm{Z}$ *τριχοτομούν τη διαγώνιο* $\mathrm{B\Delta}$

K : Το *βαρύκεντρο του τριγώνου* $\mathrm{AB\Gamma}$

Λ : Το *βαρύκεντρο του τριγώνου* $\mathrm{A\Gamma\Delta}$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AB\Gamma\Delta}$: *Παραλληλόγραμμο*, E : *μέσο της* $\mathrm{B\Gamma}$ Z : *μέσο της* $\Gamma\Delta$	$\mathrm{AK}=\mathrm{K\Lambda}=\Lambda\Delta$

Επειδή $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ *παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες του διχοτομούνται*

Άρα O *μέσο των ευθυγράμμων τμημάτων* $\mathrm{A\Gamma},\mathrm{B\Delta}$

Στο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ *οι* BO,AE *είναι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές* $\mathrm{A\Gamma},\mathrm{B\Gamma}$. *Συνεπώς* K *είναι το βαρύκεντρο του* $\mathrm{AB\Gamma}$. *Οπότε θα έχω*:

$$\mathrm{BK}=\frac{2}{3}\mathrm{BO}\overset{\substack{\mathrm{BO}=\frac{\mathrm{B\Delta}}{2}\\ \mathrm{O}:\textit{Μέσο του }\mathrm{B\Delta}}}{=}\frac{2}{3}\frac{\mathrm{B\Delta}}{2}=\frac{\mathrm{B\Delta}}{3}$$

$\Sigma \tau o\ \tau \rho \acute{\iota} \gamma \omega \nu o$ ΑΓΔ $o\iota$ ΔΟ, ΑΖ $\varepsilon \acute{\iota} \nu \alpha \iota\ \delta \iota \acute{\alpha} \mu \varepsilon \sigma o\iota\ \tau o \upsilon\ \tau \rho \iota \gamma \acute{\omega} \nu o \upsilon\ \pi o \upsilon$ $\alpha \nu \tau \iota \sigma \tau o \iota \chi o \acute{\upsilon} \nu\ \sigma \tau \iota \varsigma\ \pi \lambda \varepsilon \upsilon \rho \acute{\varepsilon} \varsigma$ ΑΓ, ΔΓ. $\Sigma \upsilon \nu \varepsilon \pi \acute{\omega} \varsigma$ Λ $\varepsilon \acute{\iota} \nu \alpha \iota\ \tau o$ $\beta \alpha \rho \acute{\upsilon} \kappa \varepsilon \nu \tau \rho o\ \tau o \upsilon$ ΑΓΔ. Ο$\pi \acute{o} \tau \varepsilon\ \theta \alpha\ \acute{\varepsilon} \chi \omega$:

$$\Delta\Lambda = \frac{2}{3}\Delta O \overset{\substack{\Delta O = \frac{\Delta B}{2} \\ O: \text{Μέσο του } \Delta B}}{=} \frac{2}{3}\frac{\Delta B}{2} = \frac{\Delta B}{3}$$

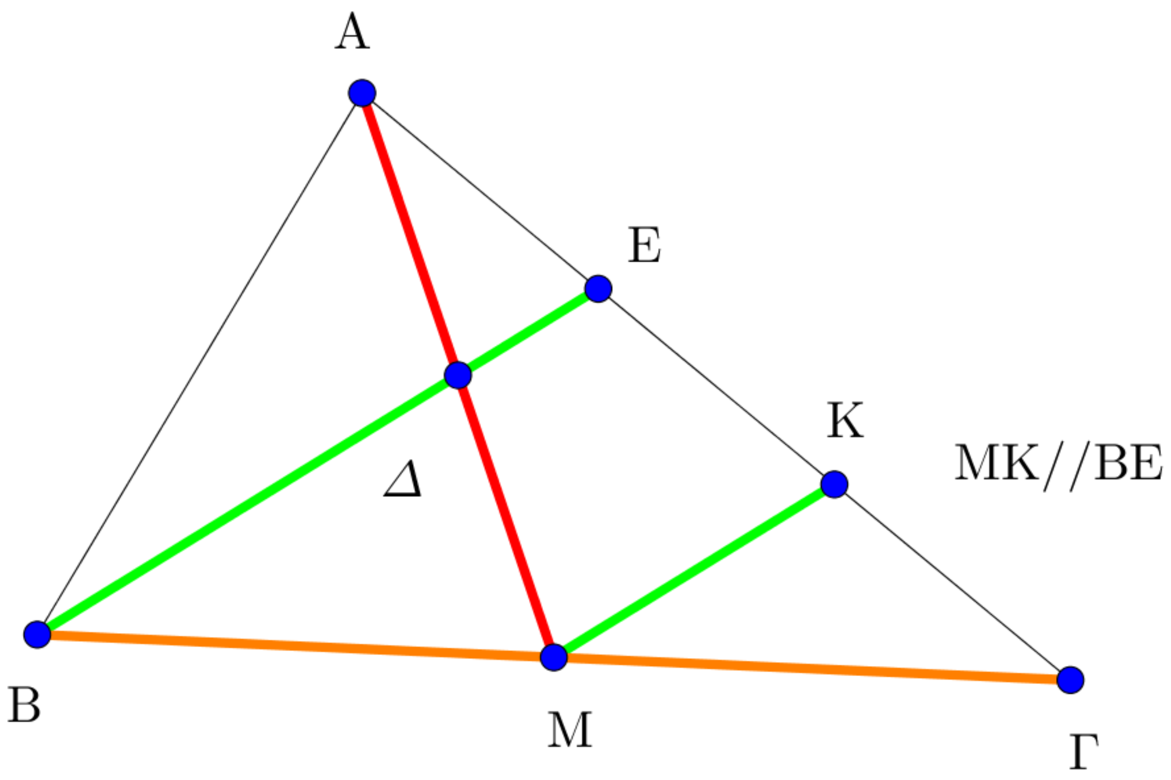
$$\text{Έχω}: \Delta B = \Delta\Lambda + \Lambda K + KB \overset{\substack{\Delta\Lambda = \frac{\Delta B}{3} \\ KB = \frac{\Delta B}{3}}}{\Longleftrightarrow} \Delta B = \frac{\Delta B}{3} + \Lambda K + \frac{\Delta B}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3\Delta B}{3} = \frac{2\Delta B}{3} + \Lambda K \Leftrightarrow \Lambda K = \frac{3\Delta B}{3} - \frac{2\Delta B}{3} \Leftrightarrow \Lambda K = \frac{\Delta B}{3}$$

$\text{Οπότε}: AK = K\Lambda = \Lambda\Delta$

13.

$\Sigma \varepsilon\ \tau \rho \acute{\iota} \gamma \omega \nu o$ ΑΒΓ, Δ $\varepsilon \acute{\iota} \nu \alpha \iota\ \mu \acute{\varepsilon} \sigma o\ \tau \eta \varsigma\ \delta \iota \alpha \mu \acute{\varepsilon} \sigma o \upsilon$ ΑΜ. Α$\nu\ \eta$ ΒΔ $\tau \acute{\varepsilon} \mu \nu \varepsilon \iota\ \tau \eta \nu\ \pi \lambda \varepsilon \upsilon \rho \acute{\alpha}$ ΑΓ $\sigma \tau o$ Ε, $\nu \alpha\ \alpha \pi o \delta \varepsilon \acute{\iota} \xi \varepsilon \tau \varepsilon\ \acute{o} \tau \iota$: $AE = \frac{E\Gamma}{2}$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{M}: \textit{μέσο της } \mathrm{B\Gamma}, \Delta: \textit{μέσο της } \mathrm{AM}, \mathrm{MK}//\mathrm{BE}$	$\mathrm{AE} = \dfrac{\mathrm{E\Gamma}}{2}$

$\textit{Φέρνω } \mathrm{MK}//\mathrm{BE}. \textit{Στο τρίγωνο } \overset{\triangle}{\mathrm{AMK}} \textit{ έχω}:$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\Delta: \mathrm{M}\textit{έσο μέσο της } \mathrm{AM} \\ (\mathrm{II})\mathrm{MK}//\Delta\mathrm{E}\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\textit{πότε } \mathrm{E} \textit{ είναι το μέσο της } \mathrm{AK}$

$$\left(\begin{array}{l}\textit{Ως ευθύγραμμο τμήμα που φέρω απο το μέσο μιας πλευράς} \\ \textit{τριγώνου παράλληλο σε μια άλλη πλευρά}\end{array}\right)$$

$\Sigma\textit{υνεπώς θα έχω}: \mathrm{AE} = \mathrm{EK} = x(1)$

$\Sigma\textit{το τρίγωνο } \overset{\triangle}{\mathrm{BE\Gamma}} \textit{ έχω}:$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{M}: \mathrm{M}\textit{έσο μέσο της } \mathrm{B\Gamma} \\ (\mathrm{II})\mathrm{MK}//\mathrm{BE}\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\textit{πότε } \mathrm{K} \textit{ είναι το μέσο της } \mathrm{E\Gamma}$

$$\left(\begin{array}{l}\textit{Ως ευθύγραμμο τμήμα που φέρω απο το μέσο μιας πλευράς} \\ \textit{τριγώνου παράλληλο σε μια άλλη πλευρά}\end{array}\right)$$

$\Sigma\textit{υνεπώς θα έχω}: \mathrm{EK} = \mathrm{K\Gamma} = x(2)$

$\mathrm{A}\textit{πο } (1),(2) \textit{ θα έχω}:$

$\mathrm{AE} = \mathrm{EK} = \mathrm{K\Gamma} = x$

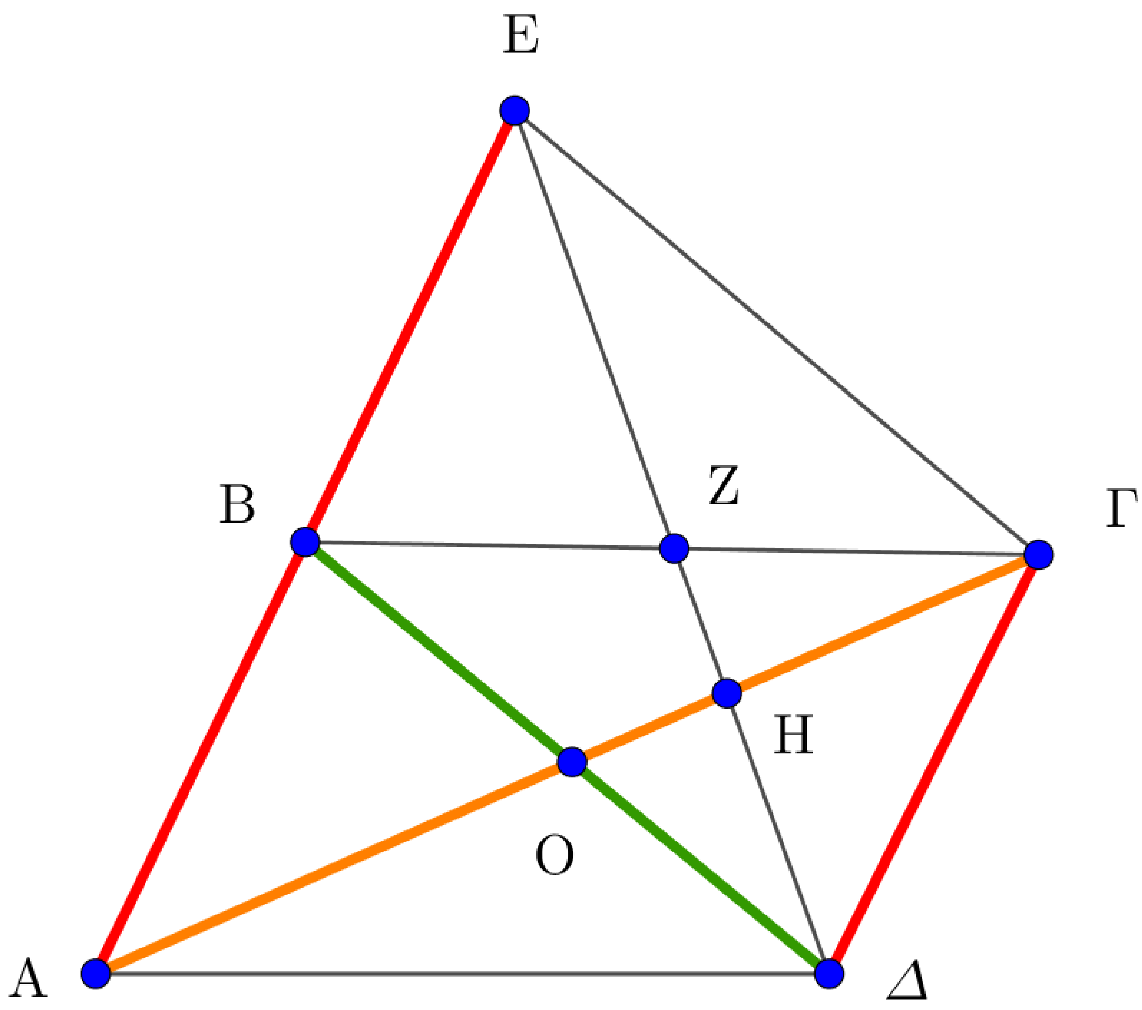
$$\textit{Έχω}: \mathrm{E\Gamma} = \mathrm{EK} + \mathrm{K\Gamma} = x + x = 2x \Rightarrow \mathrm{E\Gamma} = 2x \xrightarrow{\mathrm{AE}=x} \mathrm{E\Gamma} = 2\mathrm{AE} \Rightarrow$$

$$\mathrm{AE} = \frac{\mathrm{E\Gamma}}{2}$$

14.

$\Sigma\textit{ε παραλληλόγραμμο } \mathrm{AB\Gamma\Delta} \textit{ προεκτείνουμε την } \mathrm{AB} \textit{ κατα}$
$\textit{τμήμα } \mathrm{BE} = \mathrm{AB}. \mathrm{A}\textit{ν η } \Delta\mathrm{E} \textit{ τέμνει την } \mathrm{A\Gamma} \textit{ στο } \mathrm{H} \textit{ και τη } \mathrm{B\Gamma}$
$\textit{στο } \mathrm{Z}, \textit{να αποδείξετε ότι}:$

$$(\mathrm{I})\mathrm{BZ} = \mathrm{Z\Gamma} \quad (\mathrm{II})\mathrm{\Gamma H} = \frac{\mathrm{AH}}{2}$$



$\text{Η : Το } \beta\alpha\rho\acute{\upsilon}\kappa\varepsilon\nu\tau\rho o\ \tau o\upsilon\ \text{ΒΓΔ}$

(I)Επειδή ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του θα έναι ίσες και παράλληλες.Οπότε θα έχω : $\Delta\Gamma // = AB$

Επειδή $BE = AB$ και $\Delta\Gamma // = AB$ θα έχω $\Delta\Gamma // = BE$.Συνεπώς το τετράπλευρο ΒΕΓΔ είναι παραλληλόγραμμο

(Ως τετράπλευρο που έχει τουλάχιστον δυο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες)

Οπότε οι διαγώνιες του παραλληλόγραμμου ΒΕΓΔ διχοτομούνται. Άρα Ζ μέσο της ΒΓ.Οπότε θα ισχύει $BZ = Z\Gamma$

(II) Το *τετράπλευρο* ΑΒΓΔ *είναι παραλληλόγραμμο.Συνεπώς οι διαγώνιες του διχοτομούνται.Άρα* Ο *μέσο των* ΑΓ,ΒΔ

Στο τρίγωνο ΒΓΔ *οι* ΓΟ,ΔΖ *είναι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές* ΒΔ,ΒΓ.*Συνεπώς* Η *είναι το βαρύκεντρο του* ΒΓΔ.Ο*πότε θα έχω*:

$$\Gamma\mathrm{H}=\frac{2}{3}\Gamma\mathrm{O},\mathrm{HO}=\frac{2}{3}\Gamma\mathrm{O}$$

$$\Gamma\mathrm{H}=\frac{2}{3}\Gamma\mathrm{O}\overset{\substack{\Gamma\mathrm{O}=\frac{\mathrm{A}\Gamma}{2}\\ \mathrm{O}:\text{Μέσο του }\mathrm{A}\Gamma}}{=}\frac{2}{3}\frac{\mathrm{A}\Gamma}{2}=\frac{\mathrm{A}\Gamma}{3}\Rightarrow\Gamma\mathrm{H}=\frac{\mathrm{A}\Gamma}{3}$$

$$\mathrm{HO}=\frac{1}{3}\Gamma\mathrm{O}\overset{\substack{\Gamma\mathrm{O}=\frac{\mathrm{A}\Gamma}{2}\\ \mathrm{O}:\text{Μέσο του }\mathrm{A}\Gamma}}{=}\frac{1}{3}\frac{\mathrm{A}\Gamma}{2}=\frac{\mathrm{A}\Gamma}{6}\Rightarrow\mathrm{HO}=\frac{\mathrm{A}\Gamma}{6}$$

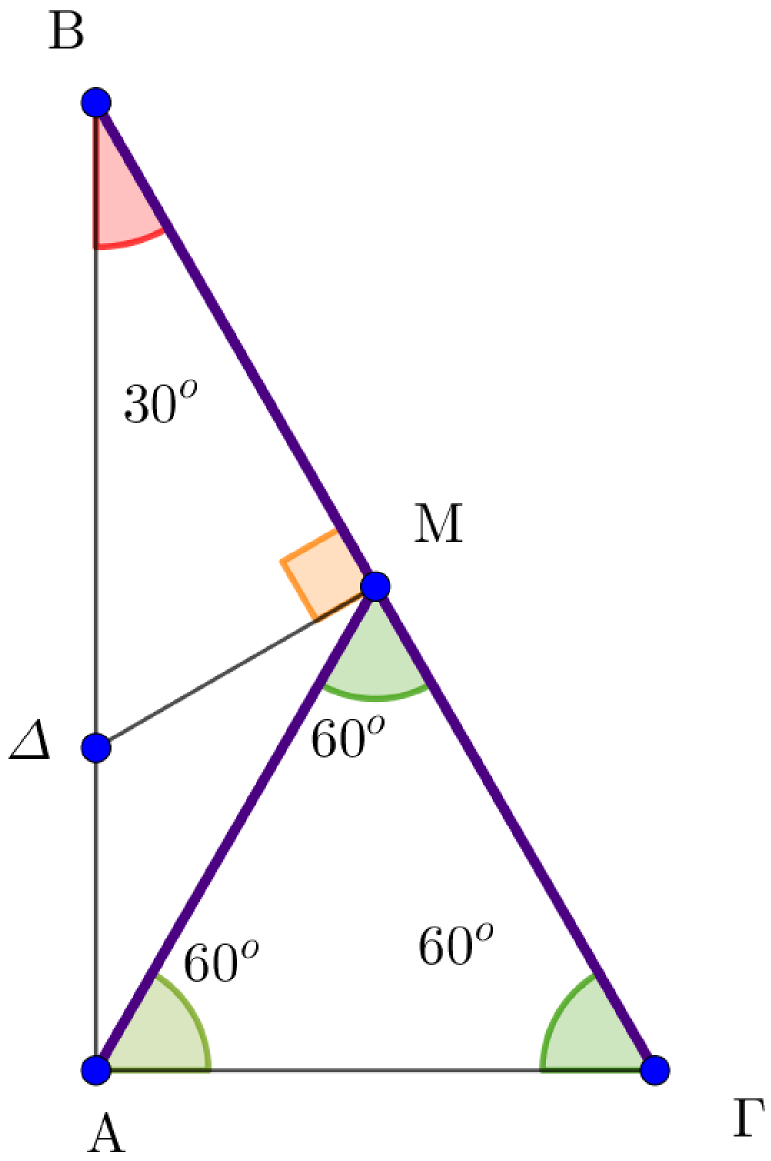
$$\mathrm{AH}=\mathrm{AO}+\mathrm{OH}\overset{\substack{\mathrm{AO}=\frac{\mathrm{A}\Gamma}{2}\\ \mathrm{O}:\text{Μέσο του }\mathrm{A}\Gamma\\ \mathrm{OH}=\frac{\mathrm{A}\Gamma}{6}}}{=}\frac{\mathrm{A}\Gamma}{2}+\frac{\mathrm{A}\Gamma}{6}=\frac{3\mathrm{A}\Gamma}{6}+\frac{\mathrm{A}\Gamma}{6}=\frac{4\mathrm{A}\Gamma}{6}=\frac{2\mathrm{A}\Gamma}{3}$$

$$=2\frac{\mathrm{A}\Gamma}{3}\overset{\Gamma\mathrm{H}=\frac{\mathrm{A}\Gamma}{3}}{=}2\Gamma\mathrm{H}$$

Ο*πότε*: $\mathrm{AH}=2\Gamma\mathrm{H}\Rightarrow\Gamma\mathrm{H}=\frac{\mathrm{AH}}{2}$

15.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB}\Gamma\left(\hat{\mathrm{A}}=90^0\right)$ *με* $\hat{\mathrm{B}}=30^0$ *η κάθετος στο μέσο* Μ *της υποτείνουσας* ΒΓ *τέμνει την πλευρά* ΑΒ *στο* Δ.
Ν*α αποδείξετε ότι*:
$(\mathrm{I})\,\mathrm{M}\Delta=\mathrm{A}\Delta\quad(\mathrm{II})\,\mathrm{M}\Delta=\frac{\mathrm{AB}}{3}$



$\Sigma\tau o$ $o\rho\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota o$ $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o$ $\mathrm{AB\Gamma}\left(\hat{\mathrm{A}}=90^0\right)\acute{\varepsilon}\chi\omega:\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=90^0$

$\Leftrightarrow\hat{\Gamma}=90^0-30^0\Leftrightarrow\hat{\Gamma}=60^0$ $\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}$ M $\mu\acute{\varepsilon}\sigma o$ $\tau\eta\varsigma$ $\mathrm{B\Gamma}$

$\theta\alpha$ $\acute{\varepsilon}\chi\omega:\mathrm{BM}=\mathrm{M\Gamma}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}(1)$ $\Sigma\tau o$ $o\rho\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota o$ $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o$

$\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma\left(\hat{\mathrm{A}}=90^0\right)$, AM $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ η $\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma$ $\pi o\upsilon$

$\alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\sigma\tau\eta\nu$ $\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha$ $\mathrm{B\Gamma}$. $\acute{\mathrm{A}}\rho\alpha$ $\theta\alpha$ $\acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\mathrm{AM}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}(2)$ ($\Omega\varsigma$ $\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma$ $o\rho\theta o\gamma\omega\nu\acute{\iota}o\upsilon$
$\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon$ $\pi o\upsilon$ $\alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}$ $\sigma\tau\eta\nu$ $\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha$)
$\mathrm{A}\pi o$ $\tau\iota\varsigma$ $\sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma$ $(1),(2)$ $\acute{\varepsilon}\chi\omega$ $\mathrm{AM}=\mathrm{M\Gamma}(3)$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AM\Gamma}\left(\mathrm{AM}=\mathrm{M\Gamma}\right)$ *έχω* $\hat{\Gamma}=60^0$.
Συνεπώς το τρίγωνο $\mathrm{AM\Gamma}$ *είναι ισόπλευρο ως ισοσκελές που έχει μια τουλάχιστον γωνία ίση* 60^0.

Οπότε $\mathrm{M\hat{A}\Gamma}=\mathrm{A\hat{M}\Gamma}=60^0$

Έχω: $\mathrm{\Delta\hat{A}M}=\mathrm{B\hat{A}\Gamma}-\mathrm{M\hat{A}\Gamma}=90^0-60^0=30^0$

$\mathrm{\Delta\hat{M}A}=\mathrm{\Delta\hat{M}\Gamma}-\mathrm{A\hat{M}\Gamma}=90^0-60^0=30^0$

Οπότε $\mathrm{\Delta\hat{A}M}=\mathrm{\Delta\hat{M}A}$. *Στο τρίγωνο* $\mathrm{\Delta AM}$ *έχω* $\mathrm{\Delta\hat{A}M}=\mathrm{\Delta\hat{M}A}$
συνεπώς θα ισχύει $\mathrm{M\Delta}=\mathrm{A\Delta}=x$
(*Ως πλευρές που βρίσκονται στο ίδιο τρίγωνο απέναντι απο ίσες γωνίες*)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{B\overset{\Delta}{M}\Delta}\left(\mathrm{\Delta M}\perp\mathrm{MB}\right)$ *με* $\hat{\mathrm{B}}=30^0$

θα έχω $\mathrm{\Delta M}=\dfrac{\mathrm{\Delta B}}{2}$
(*Ως κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου που βρίσκεται απέναντι απο γωνία* 30^0)
Οπότε θα έχω:

$$\mathrm{\Delta M}=\frac{\mathrm{\Delta B}}{2}\overset{\mathrm{\Delta M}=x}{\Longrightarrow}x=\frac{\mathrm{\Delta B}}{2}\Rightarrow\mathrm{\Delta B}=2x$$

$$\mathrm{AB}=\mathrm{A\Delta}+\mathrm{\Delta B}\overset{\mathrm{\Delta B}=2x,\mathrm{A\Delta}=x}{\Longrightarrow}2x+x=\mathrm{AB}\Rightarrow3x=\mathrm{AB}\Rightarrow$$

$$x=\frac{\mathrm{AB}}{3}\overset{\mathrm{M\Delta}=x}{\Longrightarrow}\mathrm{M\Delta}=\frac{\mathrm{AB}}{3}$$