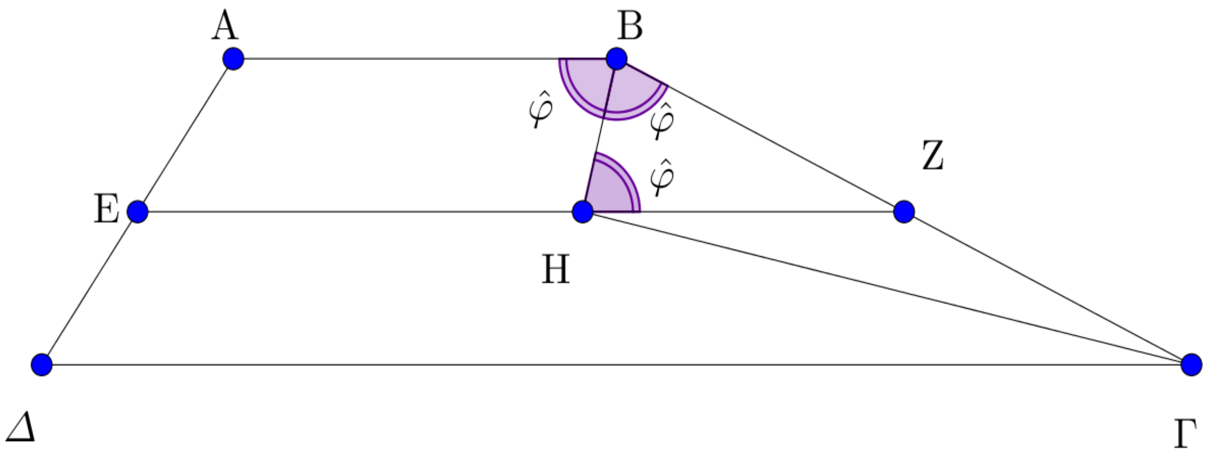
ΤΡΑΠΕΖΙΟ

1.

$\Sigma\varepsilon\ \tau\rho\alpha\pi\acute{\varepsilon}\zeta\iota o\ \mathrm{AB\Gamma\Delta}\left(\mathrm{AB}//\mathrm{\Gamma\Delta}\right)\ \eta\ \delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\varsigma\ \mathrm{B}\ \tau\acute{\varepsilon}\mu\nu\varepsilon\iota\ \tau\eta\nu$ $\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\ \tau o\upsilon\ \mathrm{EZ}\ \sigma\tau o\ \mathrm{H}.\ \mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\iota\chi\tau\varepsilon\acute{\iota}\ \acute{o}\tau\iota\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}\Gamma = 90^0$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AB}//\Gamma\Delta$ $\mathrm{E}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{A}\Delta$ $\mathrm{Z}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B}\Gamma$ $\mathrm{BH}:\Delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$	$\mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}\Gamma = 90^0$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \mathrm{BH}\ \delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{H} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{H} = \hat{\varphi}(1)$

$\Gamma\nu\omega\rho\acute{\iota}\zeta\omega\ \acute{o}\tau\iota$ <u>$\eta\ \delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma\ \tau o\upsilon\ \tau\rho\alpha\pi\varepsilon\zeta\acute{\iota}o\upsilon\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\eta\ \mu\varepsilon\ \tau\iota\varsigma\ \beta\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \tau o\upsilon\ \tau\rho\alpha\pi\varepsilon\zeta\acute{\iota}o\upsilon$</u>. $\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \mathrm{EZ}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma\ \tau o\upsilon\ \tau\rho\alpha\pi\varepsilon\zeta\acute{\iota}o\upsilon$ $\mathrm{AB\Gamma\Delta}\left(\mathrm{AB}//\Gamma\Delta\right)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{EZ}//\mathrm{AB}.\ \mathrm{O}\iota\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\varepsilon\varsigma\ \mathrm{EZ}//\mathrm{AB}\ \tau\acute{\varepsilon}\mu\nu o\upsilon\nu$ $\tau\eta\nu\ \mathrm{BH}.\ \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{H} = \hat{\varphi}(2)(\Omega\varsigma\ \varepsilon\nu\tau\acute{o}\varsigma\ \varepsilon\nu\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi)$

$Απο\ τις\ σχέσεις\ (1),(2)\ θα\ έχω:$

$$\left.\begin{cases} Z\hat{B}H = \hat{\varphi} \\ B\hat{H}Z = \hat{\varphi} \end{cases}\right\} \Rightarrow Z\hat{B}H = B\hat{H}Z$$

$Στο\ τρίγωνο$ BHZ $έχω$ $Z\hat{B}H = B\hat{H}Z$. $Συνεπώς\ θα\ ισχύει$ $HZ = BZ\ (3)$

$\left(\begin{array}{l} Γιατί\ σε\ ένα\ τρίγωνο\ απέναντι\ απο\ ίσες\ γωνίες\ βρίσκονται \\ ίσες\ πλευρές \end{array}\right)$

$Επειδή$ Z $μέσο\ της$ $BΓ$ $θα\ έχω$ $BZ = ZΓ = \frac{BΓ}{2}\ (4)$

$Απο\ τις\ σχέσεις\ (3),(4)\ θα\ έχω:$

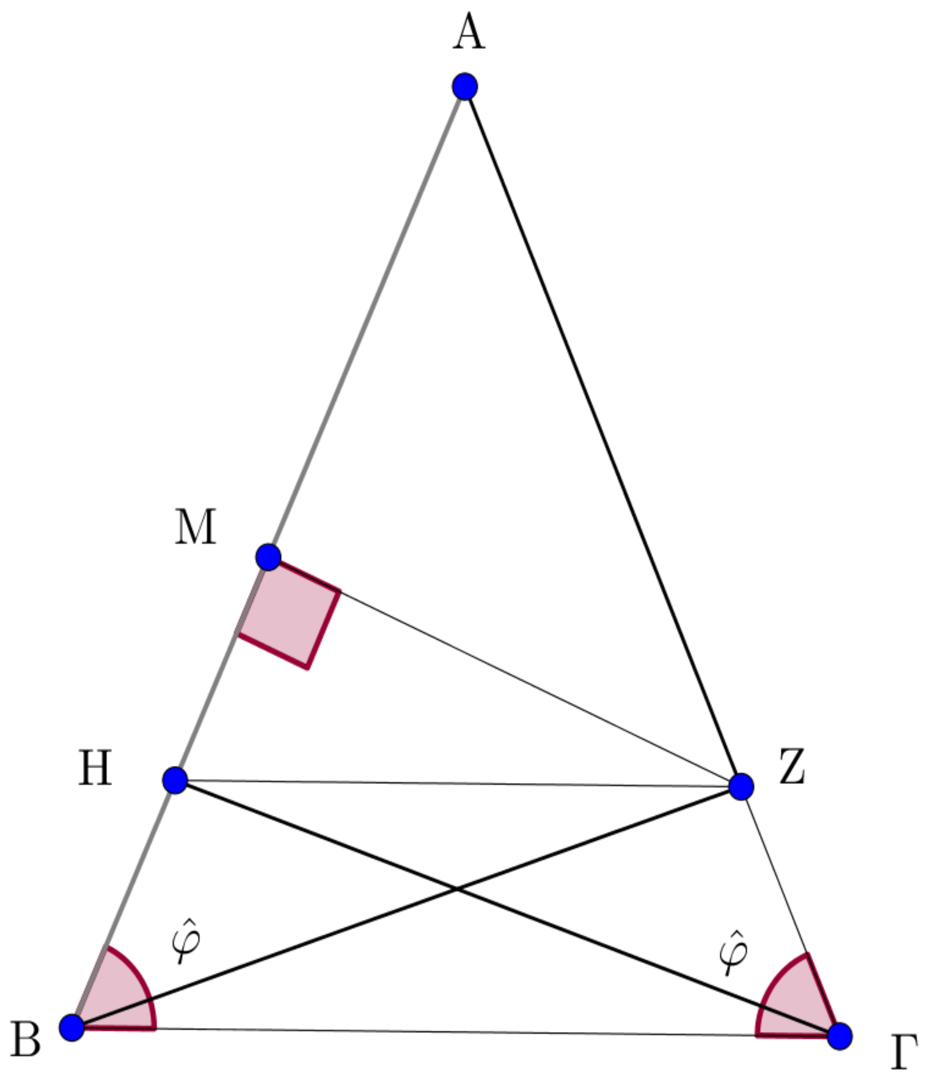
$$\left.\begin{cases} HZ = BZ \\ BZ = \frac{BΓ}{2} \end{cases}\right\} \Rightarrow HZ = \frac{BΓ}{2}$$

Γνωρίζω ότι <u>*αν η διάμεσος που αντιστοιχεί σε μια πλευρά τριγώνου είναι ίση με το μισό αυτής της πλευράς τότε η γωνια του τριγώνου που βρίσκεται απέναντι απο αυτήν την πλευρά είναι ορθή*</u>

Στο τρίγωνο $BHΓ$ *η* HZ *είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά* $BΓ$ *και είναι ίση με το μισό της* $BΓ$. *Συνεπώς η γωνία που βρίσκεται απέναντι απο την* $BΓ$ *είναι ορθή. Οπότε θα έχω* $B\hat{H}Γ = 90^0$

2.

Σε ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ\ (AB = BΓ)$ M *είναι το μέσο της* AB. *Αν η μεσοκάθετος της* AB *τέμνει την* $AΓ$ *στο* Z *και η παράλληλη απο το* Z *προς τη* $BΓ$ *τέμνει την* AB *στο* H, *τότε να αποδείξετε ότι* $ΓH = AZ$.



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
Μ : *Μέσο της* ΑΒ ΜΖ ⊥ ΑΒ ΗΖ / /ΒΓ ΑΒ = ΑΓ	ΓΗ = ΑΖ

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) *θα έχω*:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \hat{\varphi}\,(1)\left(\begin{array}{l}\textit{Ως γωνίες προσκείμενες στη βάση} \\ \textit{ισοσκελούς τριγώνου}\end{array}\right)$$

Επειδή ΖΗ / /ΒΓ *και* ΒΗ , ΓΖ *τεμνόμενες ευθείες προκύπτει ότι το* ΗΖΓΒ *είναι τραπέζιο με βάση τις πλευρές* ΖΗ, ΒΓ

$Επειδή\ ΗΖΓΒ(ΖΗ//ΒΓ)$ *τραπέζιο και* $\hat{ΗΒΓ}=\hat{ΖΓΒ}$ *προκύπτει ότι το* ΗΖΓΒ *είναι ισοσκελές τραπέζιο γιατι <u>έχει δυο τουλάχιστον παρα τη βάση γωνίες ίσες</u>. Γνωρίζω <u>ότι το ισοσκελές τραπέζιο έχει ίσες διαγωνίους</u>. Επειδή* $ΗΖΓΒ(ΖΗ//ΒΓ)$ *ισοσκελές τραπέζιο θα έχω:*

$ΓΗ=ΖΒ(1)$

Επειδή ΜΖ *μεσοκάθετος της* ΑΒ *θα έχω:*

$ΑΖ=ΖΒ(2)$

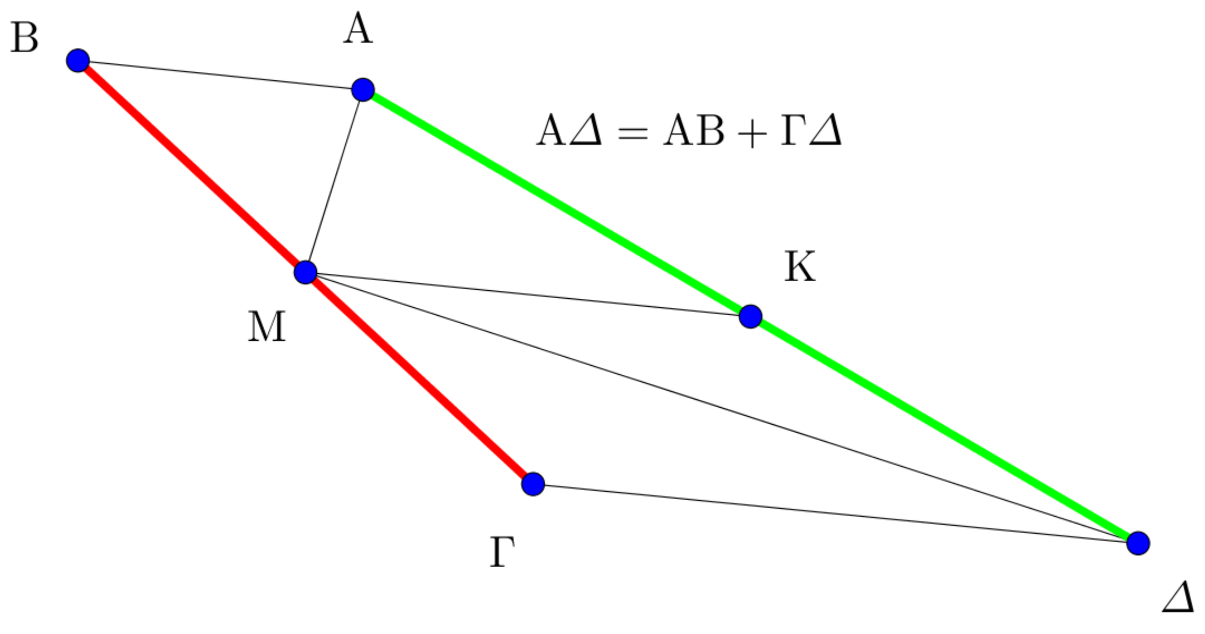
$\left(\begin{array}{l}\textit{Γιατι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει απο τα ακρά}\\ \textit{του ευθυγράμμου τμήματος}\end{array}\right)$

Απο τις σχέσεις $(1),(2)$ *θα έχω:*

$$\left.\begin{array}{l}ΓΗ=ΖΒ\\ ΑΖ=ΖΒ\end{array}\right\}\Rightarrow ΓΗ=ΑΖ$$

3.

Σε ισοσκελές ΑΒΓΔ *η μια απο τις παράλληλες πλευρές του* ΑΔ *είναι ίση με το ημιάθροισμα των ημιάθροισμα των βάσεων. Αν* Μ *είναι το μέσο της* ΒΓ, *να αποδείξετε ότι* $\hat{ΑΜΔ}=90^0$.



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$AB//\Gamma\Delta$ $M: \text{Μέσο της } B\Gamma$ $A\Delta = AB + \Gamma\Delta$	$A\hat{M}\Delta = 90^0$

Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta\left(AB//\Gamma\Delta\right)$ *έχω* M, K *μέσα των* $B\Gamma, A\Delta$ *αντίστοιχα. Συνεπώς το ευθύγραμμο τμήμα* MK *είναι διάμεσος τραπεζίου του* $AB\Gamma\Delta\left(AB//\Gamma\Delta\right)$ *ως ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του. Γνωρίζω ότι η διάμεσος του τραπεζίου είναι ίση με το ημιάθροισμα των βάσεων.*

Οπότε στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta\left(AB//\Gamma\Delta\right)$ *θα έχω:*

$$MK = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \overset{AB+\Gamma\Delta=A\Delta}{\Longrightarrow} MK = \frac{A\Delta}{2}$$

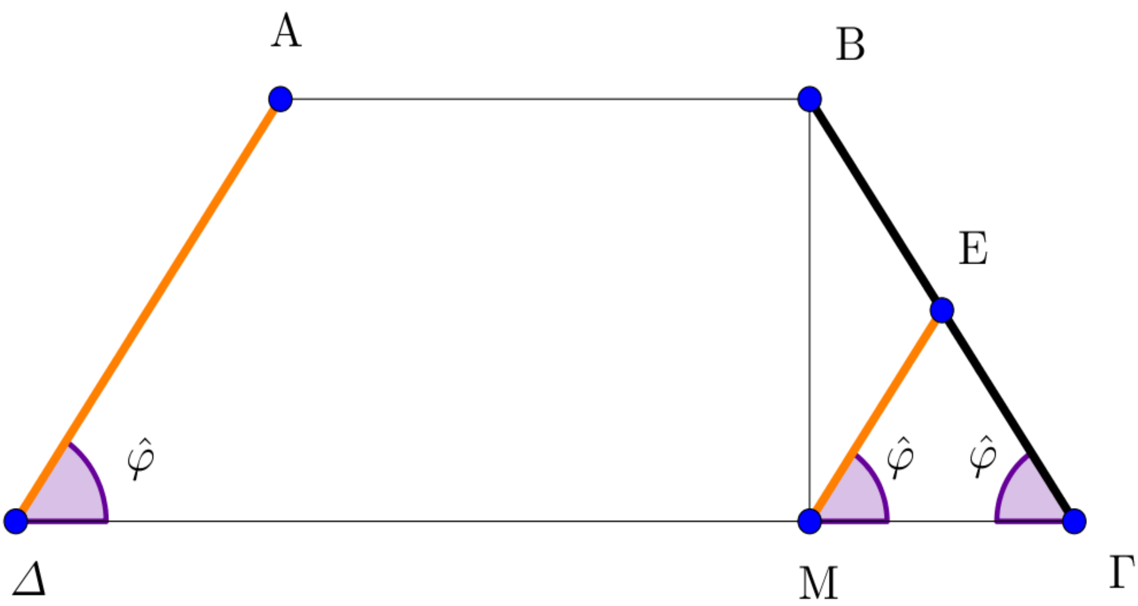
Γνωρίζω ότι αν η διάμεσος που αντιστοιχεί σε μια πλευρά τριγώνου είναι ίση με το μισό αυτής της πλευράς τότε η γωνια του τριγώνου που βρίσκεται απέναντι απο αυτήν την πλευρά είναι ορθή

Στο τρίγωνο $AM\Delta$ *η* MK *είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά* $A\Delta$ *και είναι ίση με το μισό της* $A\Delta$*. Συνεπώς η γωνία που βρίσκεται απέναντι απο την* $A\Delta$ *είναι ορθή. Οπότε θα έχω* $A\hat{M}\Delta = 90^0$

4.

Απο το μέσο E *της πλευράς* $B\Gamma$ *ισοσκελούς τραπεζίου* $AB\Gamma\Delta$ $\left(AB//\Gamma\Delta\right)$ *φέρουμε παράλληλη προς την* $A\Delta$ *που τέμνει την* $\Delta\Gamma$ *στο* M*. Να αποδείξετε ότι* $BM \perp \Delta\Gamma$*.*

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$AB//\Gamma\Delta$ $A\Delta = B\Gamma$ $E: \text{Μέσο της } B\Gamma$ $EM//A\Delta$	$BM \perp \Delta\Gamma$



$\text{Επειδή το } \mathrm{AB\Gamma\Delta}\left(\mathrm{AB}//\Gamma\Delta\right) \text{ είναι ισοσκελές τραπέζιο θα έχω}:$

$\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{M} = \hat{\varphi}\,(1)$

$\left(\text{Ως γωνές προσκείμενες στην βάση ισοσκελούς τραπεζίου}\right)$

$\text{Οι παράλληλες } \mathrm{A}\Delta//\mathrm{ME} \text{ τέμνουν την } \Delta\Gamma.\text{ Οπότε θα έχω}:$

$\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\varphi}\,(2)$

$\text{Απο τις σχέσεις } (1),(2) \text{ θα έχω}:$

$$\left\{\begin{matrix} \mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{M} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\varphi} \\ \mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\varphi} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{M} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$$

$\text{Στο τρίγωνο } \mathrm{EM\Gamma} \text{ έχω } \mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{M} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\Gamma.\text{ Οπότε θα ισχύει}:$

$\mathrm{ME} = \mathrm{E\Gamma}\,(3)$

$$\left(\begin{matrix} \text{Γιατι στο ίδιο τρίγωνο απέναντι απο ίσες γωνίες βρίσκονται} \\ \text{ίσες πλευρές} \end{matrix}\right)$$

$\text{Επειδή } \mathrm{E} \text{ μέσο της } \mathrm{B\Gamma} \text{ θα έχω}:$

$\mathrm{BE} = \mathrm{E\Gamma} = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}\,(4)$

$\text{Απο τις σχέσεις } (3),(4) \text{ θα έχω:}$

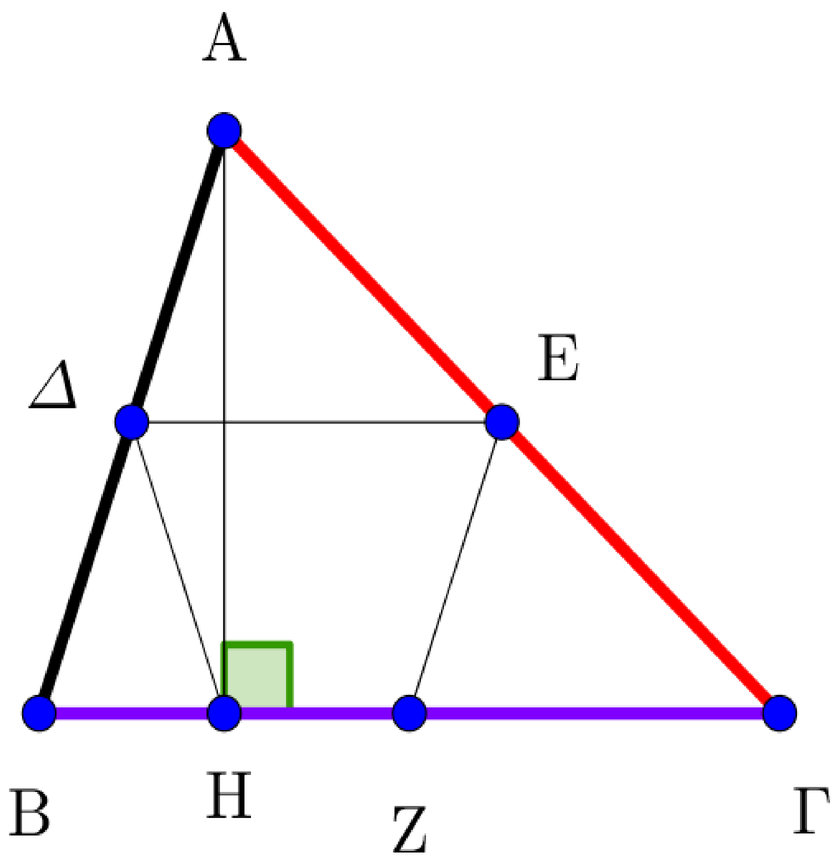
$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{ME}=\mathrm{E\Gamma} \\ \mathrm{E\Gamma}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{ME}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$$

Γνωρίζω ότι <u>αν η διάμεσος που αντιστοιχεί σε μια πλευρά τριγώνου είναι ίση με το μισό αυτής της πλευράς τότε η γωνια του τριγώνου που βρίσκεται απέναντι απο αυτήν την πλευρά είναι ορθή</u>

Στο τρίγωνο ΒΜΓ *η* ΜΕ *είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά* ΒΓ *και είναι ίση με το μισό της* ΒΓ. *Συνεπώς η γωνία που βρίσκεται απέναντι απο την* ΒΓ *είναι ορθή. Οπότε θα έχω* $\mathrm{BM} \perp \Delta\Gamma$

5.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ *και το ύψος του* ΑΗ. *Αν* Δ, Ε, Ζ *είναι τα μέσα των* ΑΒ, ΑΓ *και* ΒΓ *αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το* ΔΕΖΗ *είναι ισοσκελές τραπέζιο.*



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AH} \perp \mathrm{B\Gamma}$ Δ : Μέσο της ΑΒ Ε : Μέσο της ΑΓ Ζ : Μέσο της ΒΓ	ΔΕΖΗ : Ισοσκελές τραπέζιο.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχω:

$$\left\{\begin{matrix} (\mathrm{I})\,\Delta : \text{Μέσο της ΑΒ} \\ (\mathrm{II})\,\mathrm{E} : \text{Μέσο της ΑΓ} \end{matrix}\right\}$$

Οπότε θα ισχύει $\Delta\mathrm{E} // = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}\,(1)$

(Ως ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται απο τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχω:

$$\left\{\begin{matrix} (\mathrm{I})\,\mathrm{Z} : \text{Μέσο της ΒΓ} \\ (\mathrm{II})\,\mathrm{E} : \text{Μέσο της ΑΓ} \end{matrix}\right\}$$

Οπότε θα ισχύει $\mathrm{ZE} // = \dfrac{\mathrm{AB}}{2}\,(2)$

(Ως ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται απο τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου)

Γνωρίζω απο το αίτημα του Ευκλείδη <u>απο σημείο εκτός της ευθείας μπορώ να φέρω μόνο μια παράλληλη σε αυτήν</u>

Έστω ΔΗ//ΕΖ. Τότε θα έχω απο την σχέση (2) θα έχω ΔΒ//ΕΖ

Οπότε ΔΗ//ΕΖ, ΔΒ//ΕΖ. Συνεπώς απο το σημείο Δ που δεν ανήκει στην ευθεία ΕΖ μπορώ να φέρω δυο παράλληλες προς την ΕΖ τις ΔΗ, ΔΒ. Αυτό είναι άτοπο απο το αίτημα του Ευκλείδη. Συνεπώς $\Delta\mathrm{H} \not\parallel \mathrm{EZ}$.

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\ \Delta\mathrm{E}//\mathrm{HZ}\\(\mathrm{II})\ \Delta\mathrm{H}\not\parallel\mathrm{EZ}\end{matrix}\right\}$$

Συνεπώς το τετράπλευρο ΔΕΖΗ *είναι τραπέζιο γιατι έχει μόνο δυο απέναντι πλευρές παράλληλες*

Γνωρίζω ότι σε <u>κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας</u>

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΒ $\left(\hat{\mathrm{H}}=90^0\right)$ *η* ΗΔ *είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα* ΑΒ. *Άρα θα έχω:*

$$\mathrm{AH}=\frac{\mathrm{AB}}{2}\ (3)$$

$\left(\text{Ως διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα}\right)$

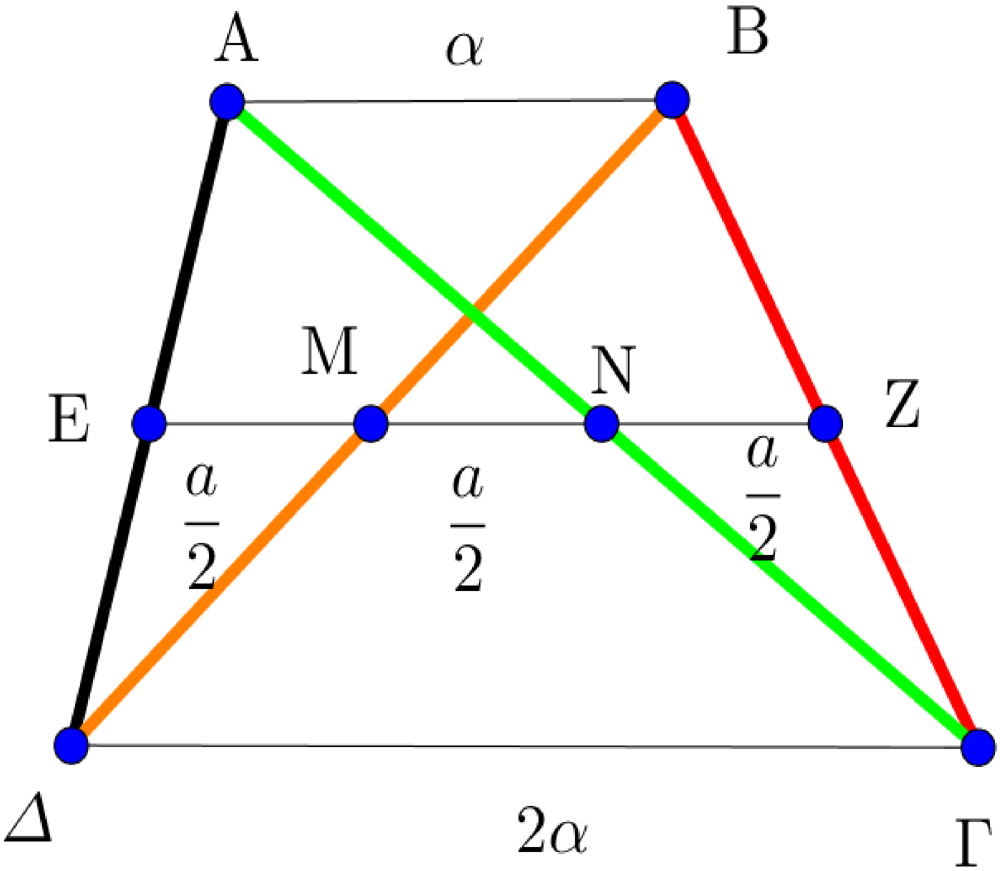
Απο τις σχέσεις $(2),(3)$ *θα έχω:*

$$\left\{\begin{matrix}\mathrm{ZE}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}\\ \mathrm{AH}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \mathrm{ZE}=\mathrm{AH}$$

Επειδή ΔΕΖΗ (ΔΕ//ΗΖ) *τραπέζιο με* ΖΕ = ΑΗ *θα είναι ισοσκελες τραπέζιο γιατί έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες.*

6.

Αν σε ένα τραπέζιο η μια βάση είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξετε οτι οι διαγώνιοι χωρίζουν την διάμεσο σε τρία ίσα τμήματα.



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$AB//\Delta\Gamma$ $AB=\alpha, \Delta\Gamma = 2\alpha$ E : *Μέσο της* $A\Delta$ Z : *Μέσο της* $B\Gamma$	$EM = MN = NZ$

Θέτω : $AB=\alpha$, $\Delta\Gamma = 2\alpha$

Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta(AB//\Delta\Gamma)$ *εχω* E, Z *μέσα των* $A\Delta, B\Gamma$ *αντίστοιχα.*

Οπότε το ευθύγραμμο τμήμα EZ *είναι η* <u>*διάμεσος του τραπεζίου γιατί ορίζεται απο τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών*</u>

Γνωρίζω ότι η <u>*διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του τραπεζίου.*</u> *Συνεπώς στο τραπέζιο* $AB\Gamma\Delta(AB//\Delta\Gamma)$ *η* EZ *είναι η διάμεσος οπότε θα έχω* $EZ//AB//\Delta\Gamma$

$\Sigma\tau o\ \tau\rho i\gamma\omega\nu o$ $\mathrm{A\Delta B}$ $\acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\,\mathrm{EM}//\mathrm{AB} \\ (\mathrm{II})\,\mathrm{E}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{A\Delta}\end{matrix}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon$ M $\mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma$ $\mathrm{B\Delta}$

Γιατι <u>*αν απο το μέσο μιας πλευράς τριγώνου φέρω την παράλληλη σε μια πλευρά του αυτή διέρχεται απο το μέσο της τρίτης πλευράς.*</u>

$\Sigma\tau o\ \tau\rho i\gamma\omega\nu o$ $\mathrm{A\Delta B}$ $\acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\,\mathrm{E}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{A\Delta} \\ (\mathrm{II})\,\mathrm{M}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B\Delta}\end{matrix}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \mathrm{EM}=\frac{\mathrm{AB}}{2}\overset{\mathrm{AB}=\alpha}{\Longrightarrow}\mathrm{EM}=\frac{\alpha}{2}\,(1)$

$$\left(\begin{matrix}\Omega\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon}\gamma\rho\alpha\mu\mu o\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\ \pi o\upsilon\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o\ \tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha\ \tau\omega\nu\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}\nu \\ \varepsilon\nu\acute{o}\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\end{matrix}\right)$$

$\Sigma\tau o\ \tau\rho i\gamma\omega\nu o$ $\mathrm{AB\Gamma}$ $\acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\,\mathrm{ZN}//\mathrm{AB} \\ (\mathrm{II})\,\mathrm{Z}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B\Gamma}\end{matrix}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon$ N $\mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma$ $\mathrm{A\Gamma}$

Γιατι <u>*αν απο το μέσο μιας πλευράς τριγώνου φέρω την παράλληλη σε μια πλευρά του αυτή διέρχεται απο το μέσο της τρίτης πλευράς.*</u>

$\Sigma\tau o\ \tau\rho i\gamma\omega\nu o$ $\mathrm{AB\Gamma}$ $\acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\,\mathrm{Z}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B\Gamma} \\ (\mathrm{II})\,\mathrm{N}:\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{A\Gamma}\end{matrix}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \mathrm{ZN}=\frac{\mathrm{AB}}{2}\overset{\mathrm{AB}=\alpha}{\Longrightarrow}\mathrm{ZN}=\frac{\alpha}{2}\,(2)$

$$\left(\begin{matrix}\Omega\varsigma\ \varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon}\gamma\rho\alpha\mu\mu o\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\ \pi o\upsilon\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o\ \tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha\ \tau\omega\nu\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}\nu \\ \varepsilon\nu\acute{o}\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\end{matrix}\right)$$

$\Gamma\nu\omega\rho i\zeta\omega$ $o\tau\iota$ <u>τo $\varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon}\gamma\rho\alpha\mu\mu o$ $\tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha$ $\pi o\upsilon$ $o\rho i\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota$ $\alpha\pi o$ $\tau\alpha$ $\mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha$ $\tau\omega\nu$ $\delta\iota\alpha\gamma\omega\nu i\omega\nu$ $\varepsilon\nu o\varsigma$ $\tau\rho\alpha\pi\varepsilon\zeta i o\upsilon$ $\varepsilon i\nu\alpha\iota$ $i\sigma o$ $\mu\varepsilon$ $\tau\eta\nu$ $\eta\mu\iota\delta\iota\alpha\varphi o\rho\acute{\alpha}$ $\tau\omega\nu$ $\beta\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\omega\nu$</u>. $\Sigma\tau o$ $\tau\rho\alpha\pi\acute{\varepsilon}\zeta\iota o$ $\mathrm{AB\Gamma\Delta}\left(\mathrm{AB}//\Delta\Gamma\right)$ $\varepsilon\chi\omega$ $\mathrm{M,N}$ $\mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha$ $\tau\omega\nu$ $\mathrm{B\Delta,A\Gamma}$ $\alpha\nu\tau i\sigma\tau o\iota\chi\alpha$. $\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon$ $\theta\alpha$ $\acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$\mathrm{MN}=\frac{\Delta\Gamma-\mathrm{AB}}{2}\overset{\substack{\Delta\Gamma=2\alpha\\ \mathrm{AB}=\alpha}}{\Longrightarrow}\mathrm{MN}=\frac{2\alpha-\alpha}{2}\Rightarrow\mathrm{MN}=\frac{\alpha}{2}\ (3)$$

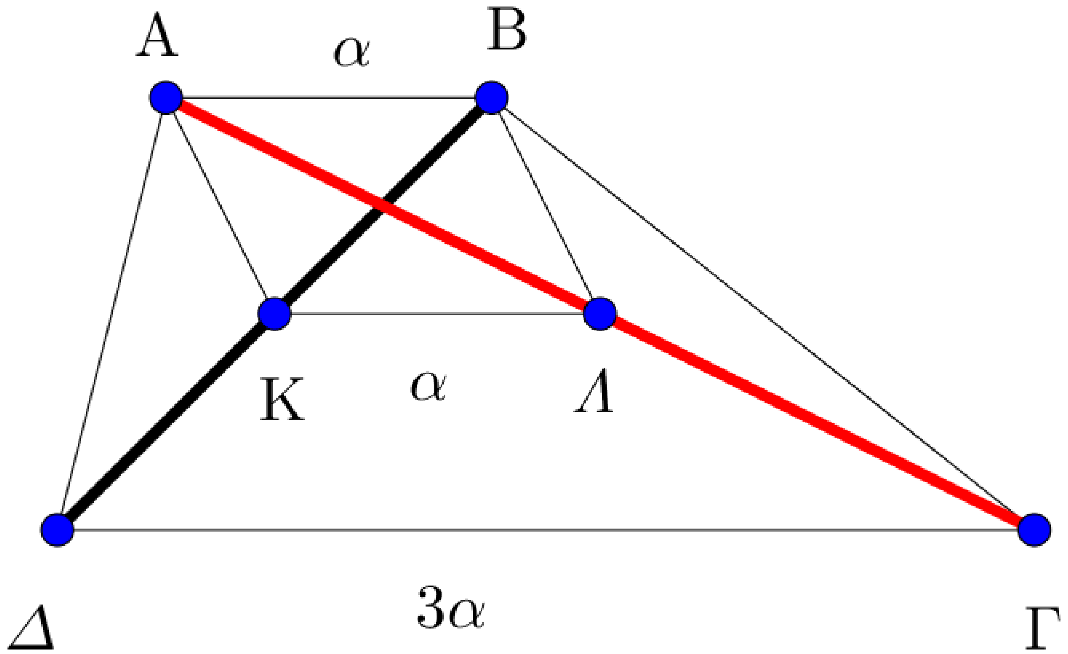
$\mathrm{A}\pi o$ $\tau\iota\varsigma$ $\sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma$ $(1),(2),(3)$ $\acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$\left.\begin{cases}\mathrm{EM}=\dfrac{\alpha}{2}\\ \mathrm{ZN}=\dfrac{\alpha}{2}\\ \mathrm{MN}=\dfrac{\alpha}{2}\end{cases}\right\}\Rightarrow\mathrm{EM}=\mathrm{ZN}=\mathrm{MN}$$

7.

$\Delta i\nu\varepsilon\tau\alpha\iota$ $\tau\rho\alpha\pi\acute{\varepsilon}\zeta\iota o$ $\mathrm{AB\Gamma\Delta}\left(\mathrm{AB}//\Gamma\Delta\right)$ $\mu\varepsilon$ $\Gamma\Delta=3\mathrm{AB}$ $\kappa\alpha\iota$ K,Λ $\mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha$ $\tau\omega\nu$ $\delta\iota\alpha\gamma\omega\nu i\omega\nu$ $\tau o\upsilon$ $\Delta\mathrm{B}$ $\kappa\alpha\iota$ $\mathrm{A}\Gamma$ $\alpha\nu\tau i\sigma\tau o\iota\chi\alpha$. $\mathrm{N}\alpha$ $\alpha\pi o\delta\varepsilon i\xi\varepsilon\tau\varepsilon$ $\acute{o}\tau\iota$ τo $\mathrm{AK\Lambda B}$ $\varepsilon i\nu\alpha\iota$ $\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\acute{o}\gamma\rho\alpha\mu\mu o$. $\Pi\acute{o}\tau\varepsilon$ $\alpha\upsilon\tau\acute{o}$ $\varepsilon i\nu\alpha\iota$ $o\rho\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota o$;

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AB}//\Delta\Gamma$ $\mathrm{AB}=\alpha,\Delta\Gamma=3\alpha$ K: $\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o$ $\tau\eta\varsigma$ $\mathrm{B\Delta}$ Λ: $\mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o$ $\tau\eta\varsigma$ $\mathrm{A\Gamma}$	$\mathrm{AK\Lambda B}$: $\Pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\acute{o}\gamma\rho\alpha\mu\mu o$



$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega: \mathrm{AB} = \alpha, \Delta\Gamma = 3\alpha$

Γ*νωρίζω οτι* <u>*το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται απο τα μέσα των διαγωνίων ενος τραπεζίου είναι παράλληλο προς τις βάσεις του τραπεζίου και είναι ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεων*</u>.

Σ*το τραπέζιο* $\mathrm{AB\Gamma\Delta}(\mathrm{AB}//\Delta\Gamma)$ *εχω* K, Λ *μέσα των* $\mathrm{B\Delta}, \mathrm{A\Gamma}$ *αντίστοιχα.* O*πότε θα έχω*:

$$\mathrm{K\Lambda} = \frac{\Delta\Gamma - \mathrm{AB}}{2}, \mathrm{K\Lambda}//\Delta\Gamma//\mathrm{AB}$$

$$\mathrm{K\Lambda} = \frac{\Delta\Gamma - \mathrm{AB}}{2} \overset{\substack{\Delta\Gamma=3\alpha \\ \mathrm{AB}=\alpha}}{\Longrightarrow} \mathrm{K\Lambda} = \frac{3\alpha - \alpha}{2} \Rightarrow \mathrm{K\Lambda} = \frac{2\alpha}{2} \Rightarrow \mathrm{K\Lambda} = \alpha \overset{\mathrm{AB}=\alpha}{\Longrightarrow}$$

$$\mathrm{K\Lambda} = \mathrm{AB}$$

E*πειδή* $\mathrm{K\Lambda} // = \mathrm{AB}$ *το* $\mathrm{AK\Lambda B}$ *είναι παραλληλόγραμμο γιατι έχει δυο τουλάχιστον απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες.*

E*πειδή* K *μέσο της* $\mathrm{B\Delta}$ *θα έχω*:

$$\mathrm{BK} = \frac{\mathrm{B\Delta}}{2} \quad (1)$$

$\text{Επειδή Λ μέσο της ΑΓ θα έχω}:$

$$\mathrm{A\Lambda} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} \quad (2)$$

Γνωρίζω οτι ένα παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο αν και μόνο αν έχει ίσες διαγωνίους. Οπότε το ΑΚΛΒ είναι ορθογώνιο αν και μόνο αν ισχύει:

$$\mathrm{BK} = \mathrm{A\Lambda} \overset{\substack{\mathrm{BK}=\frac{\mathrm{B\Delta}}{2} \\ \mathrm{A\Lambda}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}}}{\Longleftrightarrow} \frac{\mathrm{B\Delta}}{2} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{B\Delta} = \mathrm{A\Gamma}$$

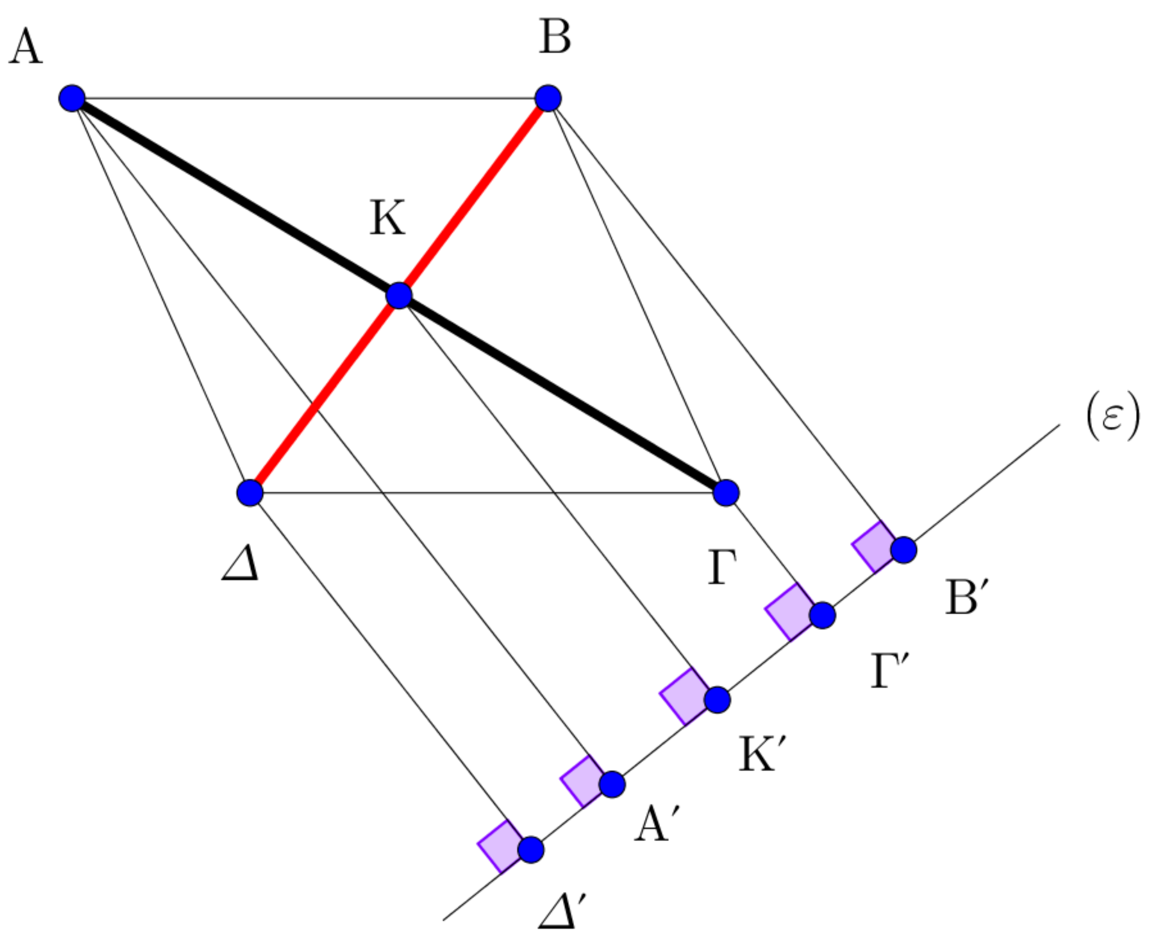
Οπότε το ΑΚΛΒ είναι ορθογώνιο αν και μόνο αν οι διαγώνιες του τραπεζίου είναι ίσες. Γνωρίζω ότι ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές αν και μόνο οι διαγώνιες του είναι ίσες. Οπότε το τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ / /ΓΔ) είναι ισοσκελές αν και μόνο αν ισχύει $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{A\Gamma}$.

Συνεπώς το ΑΚΛΒ είναι ορθογώνιο αν και μόνο αν το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

8.

Αν $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \Gamma', \Delta', \mathrm{K}'$ είναι οι προβολές των κορυφών και του κέντρου Κ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα σε ευθεία (ε) που αφήνει όλες τις κορυφές του προς το ίδιο μέρος της, να αποδείξετε ότι:
$\mathrm{AA}' + \mathrm{BB}' + \Gamma\Gamma' + \Delta\Delta' = 4\mathrm{KK}'$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
ΑΒΓΔ : Παρ / μμο Κ : Το κεντρο του παρ / μμου ΑΒΓΔ $\mathrm{AA}' \perp (\varepsilon), \mathrm{BB}' \perp (\varepsilon), \Gamma\Gamma' \perp (\varepsilon)$ $\Delta\Delta' \perp (\varepsilon), \mathrm{KK}' \perp (\varepsilon)$	$\mathrm{AA}' + \mathrm{BB}' + \Gamma\Gamma' + \Delta\Delta' = 4\mathrm{KK}'$



Επειδή $AA' \perp (\varepsilon), BB' \perp (\varepsilon), \Gamma\Gamma' \perp (\varepsilon) \Delta\Delta' \perp (\varepsilon), KK' \perp (\varepsilon)$ *θα έχω*:
$AA' // BB' // \Gamma\Gamma' // \Delta\Delta' // KK'$

(*Ως ευθείες του ίδιου επιπέδου που είναι κάθετες στην ίδια ευθεία*)

Επειδή ΑΒΓΔ *παρ / μμο προκύπτει οτι οι διαγώνιες του διχοτομουνται.* Οπότε το <u>*σημείο τομής των διαγωνίων είναι το μέσο της κάθε διαγωνίου.*</u> *Συνεπώς* Κ *είναι το μέσο των ευθυγράμμων τμημάτων* ΑΓ *και* ΒΔ.

Γ*νωρίζω ότι* <u>*αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα πάνω σε μια ευθεία τότε θα ορίζουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που θα τέμνουν*</u>

$Έχω:\begin{cases}(\mathrm{I})\ \mathrm{KA}=\mathrm{K\Gamma} \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{AA'}//\mathrm{KK'}//\mathrm{\Gamma\Gamma'}\end{cases}$

Επειδή οι παράλληλες $\mathrm{AA'}//\mathrm{KK'}//\mathrm{\Gamma\Gamma'}$ ορίζουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα πάνω στην $\mathrm{A\Gamma}$ θα ορίζουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που θα τέμνουν. Συνεπώς θα ορίζουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα πάνω στην $\mathrm{A'\Gamma'}$. Οπότε $\mathrm{K'A'}=\mathrm{K'\Gamma'}$

Στο τραπέζιο $\mathrm{A\Gamma\Gamma'A'}\left(\mathrm{AA'}//\mathrm{\Gamma\Gamma'}\right)$ έχω $\mathrm{K},\mathrm{K'}$ μέσα των $\mathrm{A\Gamma},\mathrm{A'\Gamma'}$ αντίστοιχα. Συνεπώς το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{KK'}$ είναι διάμεσος τραπεζίου του $\mathrm{A\Gamma\Gamma'A'}\left(\mathrm{AA'}//\mathrm{\Gamma\Gamma'}\right)$ ως <u>ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του</u>.

Γνωρίζω ότι <u>η διάμεσος του τραπεζίου είναι ίση με το ημιάθροισμα των βάσεων</u>. Οπότε στο τραπέζιο $\mathrm{A\Gamma\Gamma'A'}\left(\mathrm{AA'}//\mathrm{\Gamma\Gamma'}\right)$ θα έχω:

$$\mathrm{KK'}=\frac{\mathrm{AA'}+\mathrm{\Gamma\Gamma'}}{2}\Rightarrow \mathrm{AA'}+\mathrm{\Gamma\Gamma'}=2\mathrm{KK'}\ (1)$$

Γνωρίζω ότι <u>αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα πάνω σε μια ευθεία τότε θα ορίζουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που θα τέμνουν</u>

$Έχω:\begin{cases}(\mathrm{I})\ \mathrm{KB}=\mathrm{K\Delta} \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{BB'}//\mathrm{KK'}//\mathrm{\Delta\Delta'}\end{cases}$

Επειδή οι παράλληλες $\mathrm{BB'}//\mathrm{KK'}//\mathrm{\Delta\Delta'}$ ορίζουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα πάνω στην $\mathrm{B\Delta}$ θα ορίζουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που θα τέμνουν. Συνεπώς θα ορίζουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα πάνω στην $\mathrm{B'\Delta'}$. Οπότε $\mathrm{K'B'}=\mathrm{K'\Delta'}$

$\Sigma\tau o\ \tau\rho\alpha\pi\acute{\varepsilon}\zeta\iota o$ $\mathrm{B\Delta\Delta'B'}\left(\mathrm{BB'}//\mathrm{\Delta\Delta'}\right)$ $\acute{\varepsilon}\chi\omega$ $\mathrm{K,K'}$ $\mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha\ \tau\omega\nu$ $\mathrm{B\Delta,B'\Delta'}$ $\alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi\alpha.$ $\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \tau o\ \varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon}\gamma\rho\alpha\mu\mu o\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha$ $\mathrm{KK'}$ $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma$ $\tau\rho\alpha\pi\varepsilon\zeta\acute{\iota}o\upsilon\ \tau o\upsilon$ $\mathrm{B\Delta\Delta'B'}\left(\mathrm{BB'}//\mathrm{\Delta\Delta'}\right)$ $\omega\varsigma$ $\underline{\varepsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon}\gamma\rho\alpha\mu\mu o\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\ \pi o\upsilon}$ $\underline{\sigma\upsilon\nu\delta\acute{\varepsilon}\varepsilon\iota\ \tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha\ \tau\omega\nu\ \mu\eta\ \pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\acute{\eta}\lambda\omega\nu\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}\nu\ \tau o\upsilon}.$ $\Gamma\nu\omega\rho\acute{\iota}\zeta\omega\ \acute{o}\tau\iota$ $\underline{\eta\ \delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma\ \tau o\upsilon}$ $\underline{\tau\rho\alpha\pi\varepsilon\zeta\acute{\iota}o\upsilon\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ \tau o\ \eta\mu\iota\acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \tau\omega\nu\ \beta\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\omega\nu}.$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \sigma\tau o$

$\tau\rho\alpha\pi\acute{\varepsilon}\zeta\iota o$ $\mathrm{B\Delta\Delta'B'}\left(\mathrm{BB'}//\mathrm{\Delta\Delta'}\right)$ $\theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{KK'}=\frac{\mathrm{BB'}+\mathrm{\Delta\Delta'}}{2}\Rightarrow \mathrm{BB'}+\mathrm{\Delta\Delta'}=2\mathrm{KK'}\left(2\right)$$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma$ $\left(1\right),\left(2\right)$ $\theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\underline{\left.\begin{cases}\mathrm{AA'}+\Gamma\Gamma'=2\mathrm{KK'}\\ \mathrm{BB'}+\mathrm{\Delta\Delta'}=2\mathrm{KK'}\end{cases}\right\}}\left(+\right)$$

$$\mathrm{AA'}+\Gamma\Gamma'+\mathrm{BB'}+\mathrm{\Delta\Delta'}=2\mathrm{KK'}+2\mathrm{KK'}\Rightarrow$$

$$\mathrm{AA'}+\mathrm{BB'}+\Gamma\Gamma'+\mathrm{\Delta\Delta'}=4\mathrm{KK'}$$