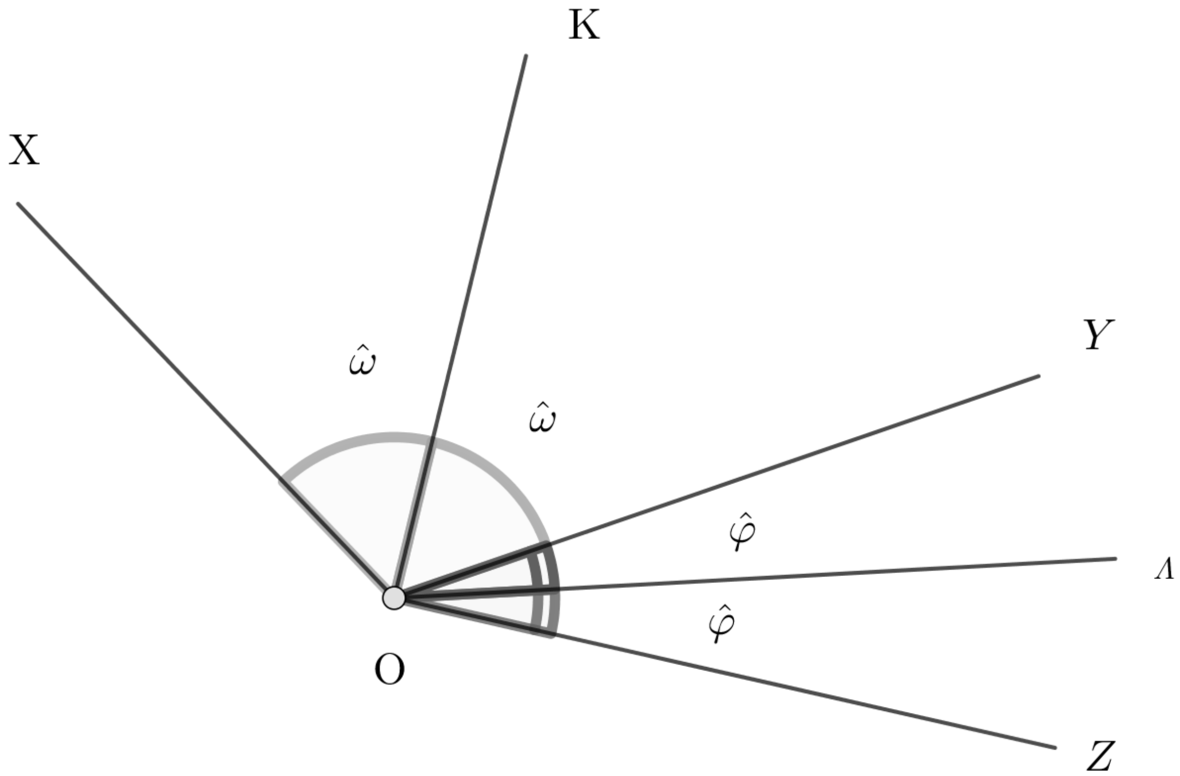
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΠΛΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

1.

Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δυό εφεξής γωνιών σχηματίζουν γωνία ίση με το ημιάθροισμα των γωνιών αυτών.



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{OK}:\Delta\iota\chi o\tau \acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ X\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Y}$ $\mathrm{O\Lambda}:\Delta\iota\chi o\tau \acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ Y\hat{\mathrm{O}}Z$	$\mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Lambda = \dfrac{X\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Y}+\mathrm{Y}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Z}}{2}$

Επειδή ΟΚ *διχοτόμος της* $X\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Y}$ *θα έχω*:

$$X\hat{\mathrm{O}}\mathrm{K} = \mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Y} = \hat{\omega}\ (1)$$

Επειδή ΟΛ *διχοτόμος της* $\mathrm{Y}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Z}$ *θα έχω*:

$$Y\hat{\mathrm{O}}\Lambda = \Lambda\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Z} = \hat{\varphi}\ (2)$$

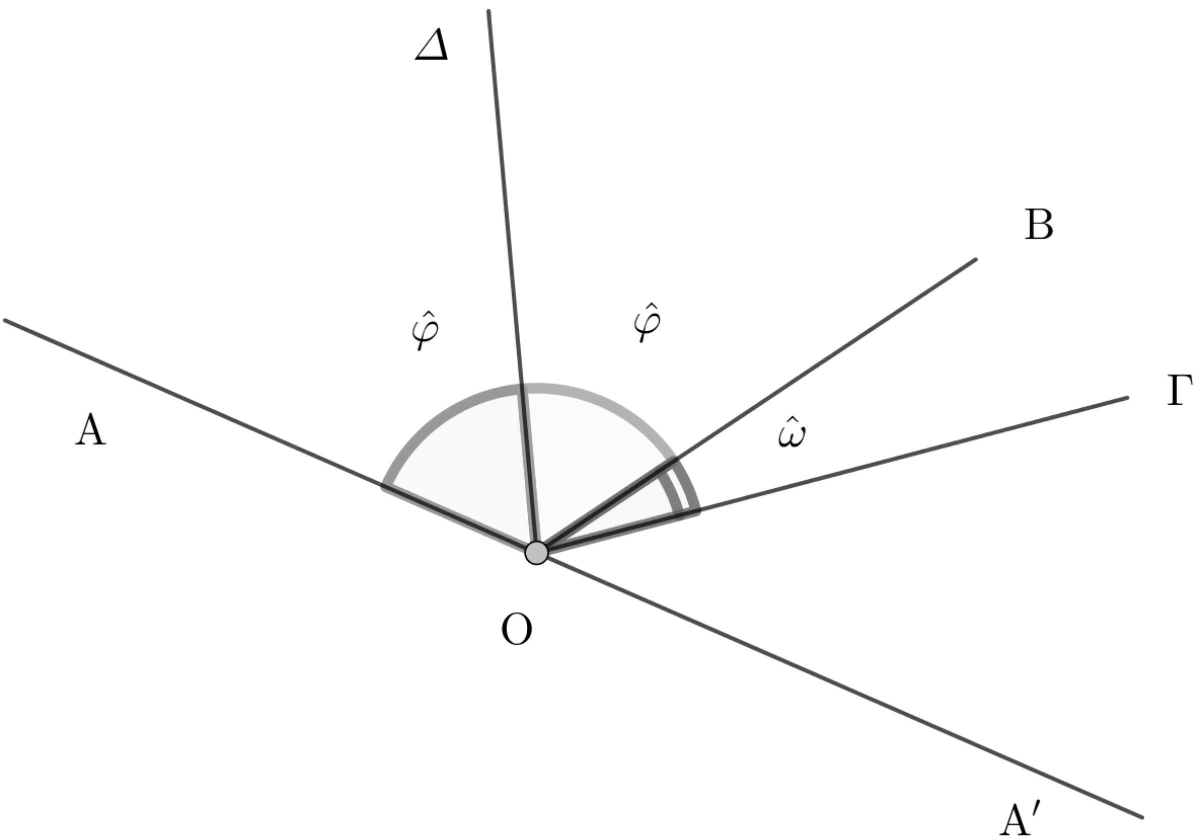
$$\mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Lambda = \mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}Y + Y\hat{\mathrm{O}}\Lambda \overset{\substack{\mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Y}=\hat{\omega} \\ \mathrm{Y}\hat{\mathrm{O}}\Lambda=\hat{\varphi}}}{=} \hat{\omega} + \hat{\varphi} \quad (3)$$

$$\frac{X\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Y} + \mathrm{Y}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Z}}{2} \overset{\substack{\mathrm{X}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Y}=2\hat{\omega} \\ \mathrm{Y}\hat{\mathrm{O}}\Lambda=2\hat{\varphi}}}{=} \frac{2\hat{\omega} + 2\hat{\varphi}}{2} = \frac{\cancel{2}\left(\hat{\omega} + \hat{\varphi}\right)}{\cancel{2}} = \hat{\omega} + \hat{\varphi} \overset{(3)}{=} \mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Lambda$$

2.

Θεωρούμε κυρτή γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$, *τη διχοτόμο της* ΟΔ *και τυχαία ημιευθεία* ΟΓ *εσωτερική της γωνίας* $\mathrm{A}'\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$, *όπου* ΟΑ′ *η αντικείμενη ημιευθεία της* ΟΑ. Ν*α αποδείξετε ότι*:

$$\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta = \frac{\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A} + \Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}}{2}$$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{O\Delta}: \Delta\iota\chi\sigma\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$	$\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta = \dfrac{\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A} + \Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}}{2}$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \mathrm{O\Delta}\ \delta\iota\chi\sigma\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B} = \hat{\varphi}\,(1)$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega: \mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = \hat{\omega}\,(2)$

$$\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta = \Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B} + \mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Delta \overset{\substack{\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}=\hat{\omega}\\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Delta=\hat{\varphi}}}{=} \hat{\omega} + \hat{\varphi}\,(3)$$

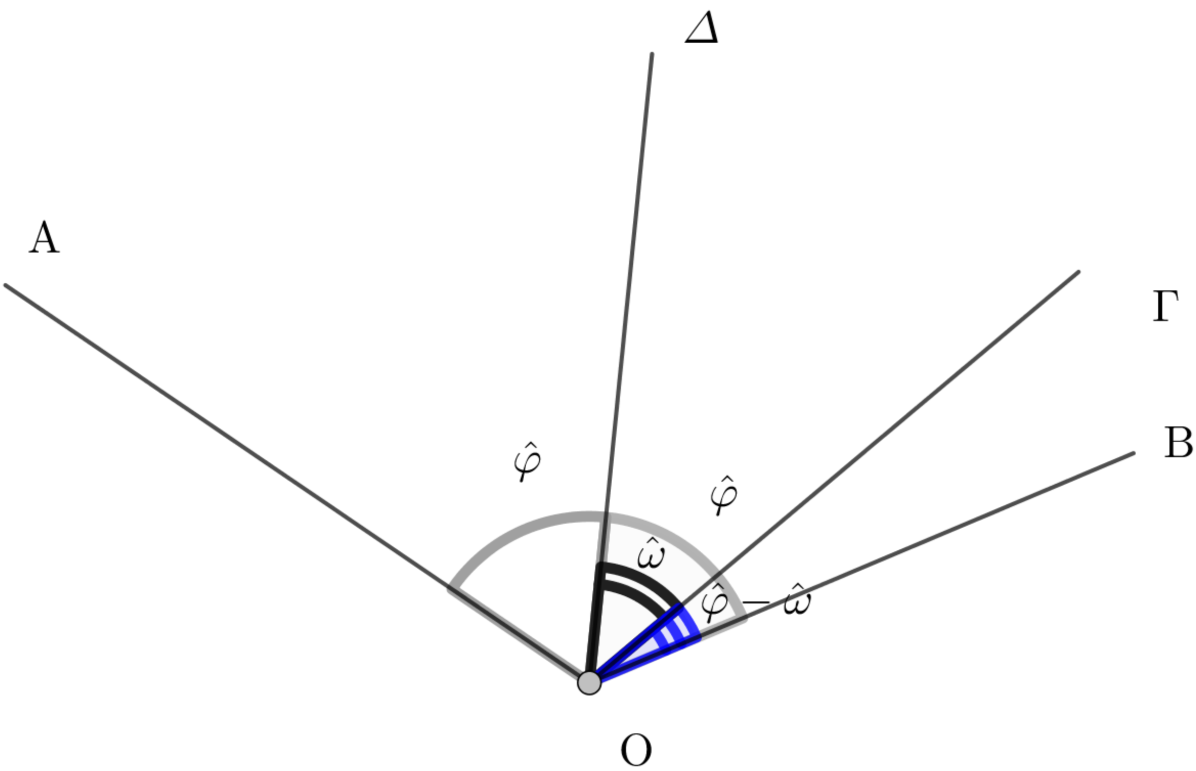
$$\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A} = \Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B} + \mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A} \overset{\substack{\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}=\hat{\omega}\\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A}=2\hat{\varphi}}}{=} \hat{\omega} + 2\hat{\varphi}\,(4)$$

$$\frac{\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A} + \Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}}{2} \overset{\substack{\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A}=\hat{\omega}+2\hat{\varphi}\\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=\hat{\omega}}}{=} \frac{\hat{\omega} + 2\hat{\varphi} + \hat{\omega}}{2} = \frac{2\hat{\varphi} + 2\hat{\omega}}{2} = \frac{\cancel{2}\left(\hat{\varphi} + \hat{\omega}\right)}{\cancel{2}} = \hat{\varphi} + \hat{\omega} \overset{(3)}{=} \Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta$$

3.

$\Theta\varepsilon\omega\rho o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\ \kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}, \tau\eta\ \delta\iota\chi\sigma\tau\acute{o}\mu o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{O\Delta}\ \kappa\alpha\iota\ \tau\upsilon\chi\alpha\acute{\iota}\alpha\ \eta\mu\iota\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha$ $\mathrm{O\Gamma}\ \varepsilon\sigma\omega\tau\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\eta\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\varsigma\ \Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}. \mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota:$ $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta = \dfrac{\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A} - \Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}}{2}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{O\Delta}: \Delta\iota\chi\sigma\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$	$\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta = \dfrac{\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A} - \Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}}{2}$



$\text{Επειδή ΟΔ διχοτόμος της } \mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B} \text{ θα έχω}:$

$\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B} = \hat{\varphi}\,(1)$

$\text{Θέτω}: \Delta\hat{\mathrm{O}}\Gamma = \hat{\omega}\,(2)$

$\text{Τότε θα έχω}:$

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Delta - \Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta \overset{\substack{\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Delta=\hat{\varphi} \\ \Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta=\hat{\omega}}}{=} \hat{\varphi}-\hat{\omega}\,(3)$$

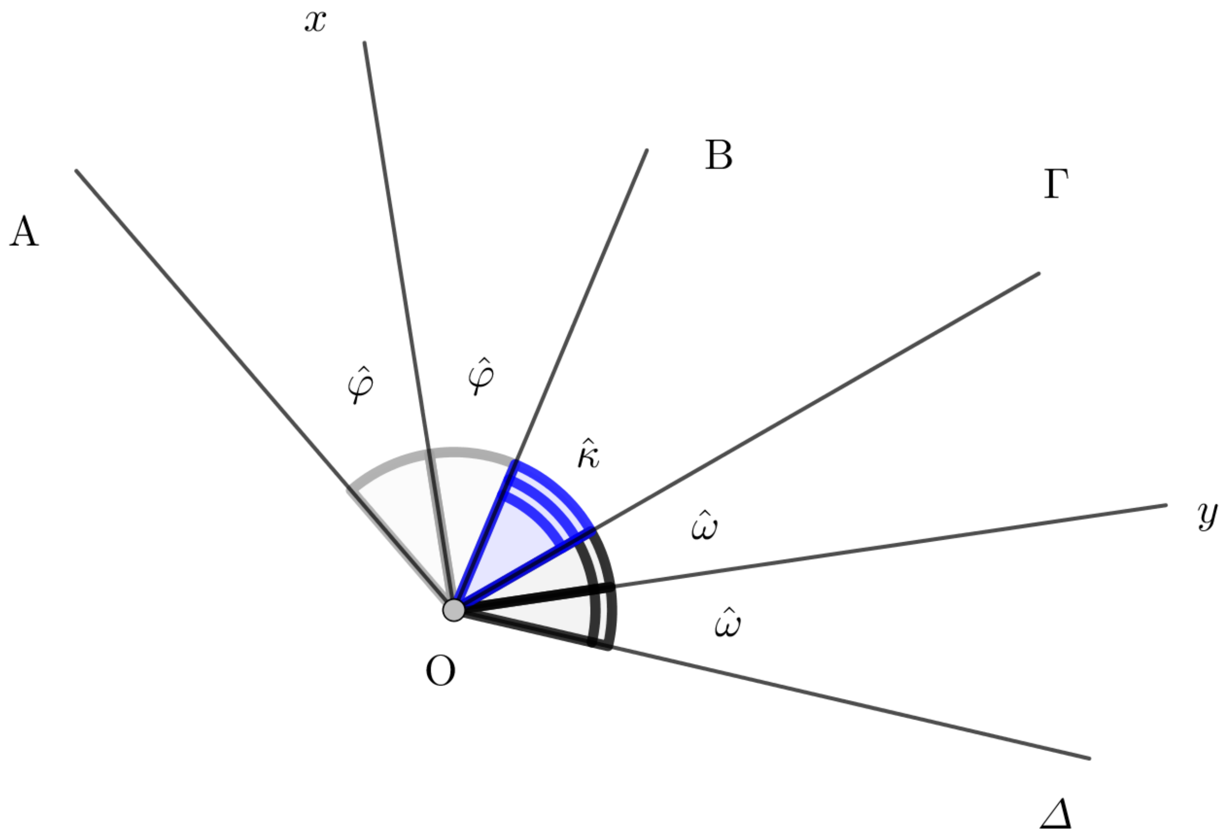
$$\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A} = \Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta + \Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A} \overset{\substack{\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta=\hat{\omega} \\ \Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A}=\hat{\varphi}}}{=} \hat{\omega}+\hat{\varphi}\,(4)$$

$$\frac{\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A}-\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}}{2} \overset{\substack{\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A}=\hat{\omega}+\hat{\varphi} \\ \Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}=\hat{\varphi}-\hat{\omega}}}{=} \frac{\hat{\omega}+\hat{\varphi}-\left(\hat{\varphi}-\hat{\omega}\right)}{2} = \frac{\hat{\omega}+\hat{\varphi}-\hat{\varphi}+\hat{\omega}}{2} = \frac{2\hat{\omega}}{2} = \hat{\omega} \overset{(2)}{=} \Delta\hat{\mathrm{O}}\Gamma$$

4.

Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $\hat{AOB}, \hat{BOΓ}, \hat{ΓOΔ}$ *με άθροισμα μικρότερο απο δυο ορθές. Αν* Ox, Oy *είναι οι διχοτόμοι των γωνιών* $\hat{AOB}, \hat{ΓOΔ}$ *αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

$$x\hat{O}y = \frac{\hat{AOΔ} + \hat{BOΓ}}{2}$$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
Ox : *Διχοτόμος της* $\hat{AOB}$ Oy : *Διχοτόμος της* $\hat{ΓOΔ}$	$x\hat{O}y = \frac{\hat{AOΔ} + \hat{BOΓ}}{2}$

$\text{Επειδή Ox } \textit{διχοτόμος της } \hat{\text{AOB}} \textit{ θα έχω}:$

$\hat{\text{AOx}} = x\hat{\text{OB}} = \hat{\varphi}\ (1)$

$\text{Επειδή Oy } \textit{διχοτόμος της } \hat{\text{ΓOΔ}} \textit{ θα έχω}:$

$\hat{\text{ΓOy}} = y\hat{\text{OΔ}} = \hat{\omega}\ (2)$

$\text{Θέτω}: \text{B}\hat{\text{O}}\Gamma = \hat{\kappa}\ (3)$

$$x\hat{O}y = x\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}y \overset{\substack{x\hat{O}B=\hat{\varphi}\\ B\hat{O}\Gamma=\hat{\kappa}\\ \Gamma\hat{O}y=\hat{\omega}}}{=} \hat{\varphi} + \hat{\kappa} + \hat{\omega}\ (4)$$

$$A\hat{O}\Delta = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta \overset{\substack{A\hat{O}B=2\hat{\varphi}\\ B\hat{O}\Gamma=\hat{\kappa}\\ \Gamma\hat{O}\Delta=2\hat{\omega}}}{=} 2\hat{\varphi} + \hat{\kappa} + 2\hat{\omega}\ (5)$$

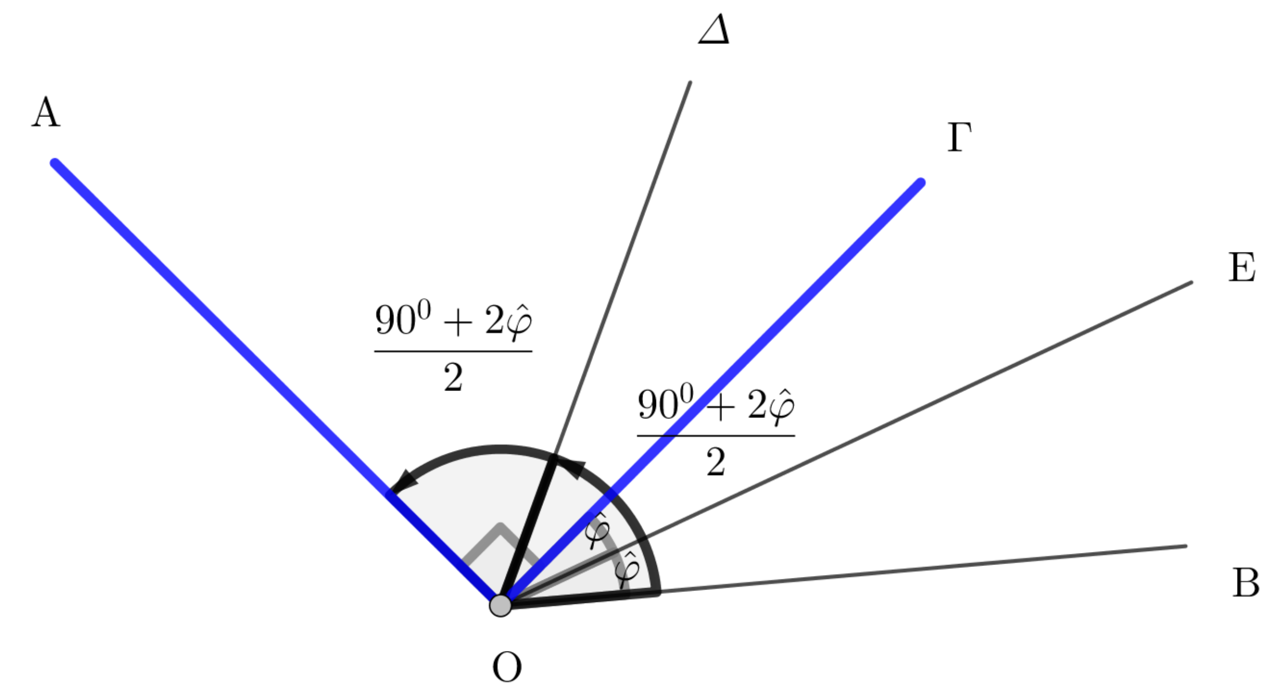
$$\frac{A\hat{O}\Delta + B\hat{O}\Gamma}{2} \overset{\substack{A\hat{O}\Delta=2\hat{\varphi}+\hat{\kappa}+2\hat{\omega}\\ B\hat{O}\Gamma=\hat{\kappa}}}{=} \frac{2\hat{\varphi} + \hat{\kappa} + 2\hat{\omega} + \hat{\kappa}}{2} = \frac{2\hat{\varphi} + 2\hat{\kappa} + 2\hat{\omega}}{2} = \frac{2\left(\hat{\varphi} + \hat{\kappa} + \hat{\omega}\right)}{2} =$$

$$\hat{\varphi} + \hat{\kappa} + \hat{\omega} \overset{(4)}{=} x\hat{O}y$$

5.

Θεωρούμε την αμβλεία γωνία $\hat{\text{AOB}}$ *και στο εσωτερικό της την ημιευθεία* $\text{OΓ} \perp \text{OA}$. *Αν* $\text{OΔ}, \text{OE}$ *οι διχοτόμοι των γωνιών* $\hat{\text{AOB}}$ *και* $\hat{\text{BOΓ}}$ *αντίστοιχα να αποδείξετε ότι*: $\hat{\text{ΔOE}} = 45^0$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\hat{\text{AOΓ}} = 90^0$ OΔ: *Διχοτόμος της* $\hat{\text{AOB}}$ OE: *Διχοτόμος της* $\hat{\text{BOΓ}}$	$\hat{\text{ΔOE}} = 45^0$



Επειδή ΟΕ διχοτόμος της $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma$ θα έχω:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{E}=\mathrm{E}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=\hat{\varphi}\,(1)$$

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\Gamma+\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}\overset{\substack{\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=90^0\\ \Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}=2\hat{\varphi}}}{=}90^0+2\hat{\varphi}\,(2)$$

Επειδή ΟΔ διχοτόμος της $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ θα έχω:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\Delta=\Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}=\frac{\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}}{2}=\frac{90^0+2\hat{\varphi}}{2}\,(3)$$

$$\Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{E}=\Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}-\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{E}\overset{\substack{\Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}=\frac{90^0+2\hat{\varphi}}{2}\\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{E}=\hat{\varphi}}}{=}\frac{90^0+2\hat{\varphi}}{2}-\hat{\varphi}=\frac{90^0+2\hat{\varphi}-2\hat{\varphi}}{2}=\frac{90^0}{2}=45^0$$