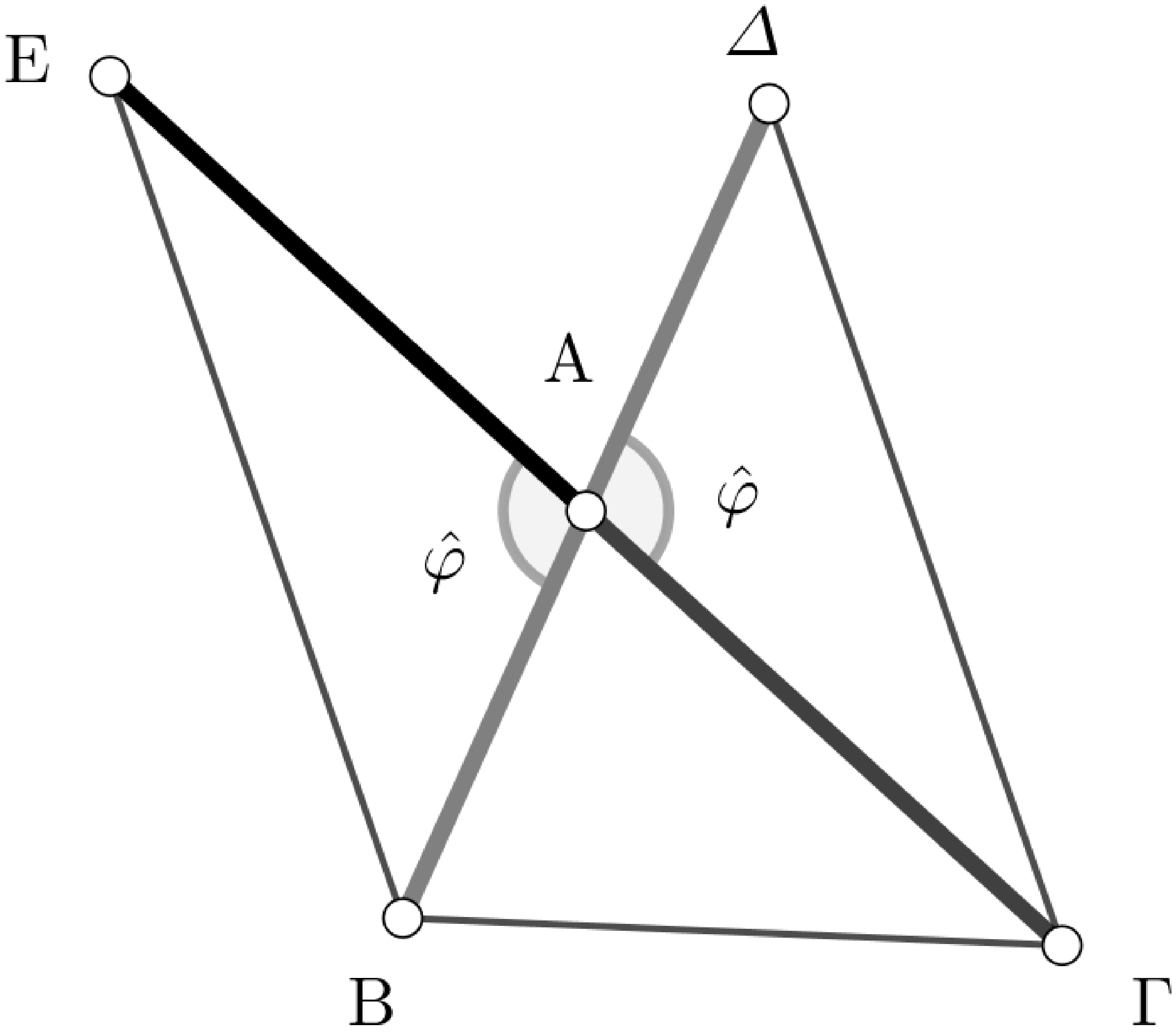
<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ 1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ</u>

1.

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ, ΓΑ *ενός τεριγώνου* ΑΒΓ *θωερούμε τμήματα* $ΑΔ = ΑΒ$ *και* $ΑΕ = ΑΓ$ *αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι*:
$ΒΕ = ΓΔ$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$ΑΔ = ΑΒ$, $ΑΕ = ΑΓ$	$ΒΕ = ΓΔ$

$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \overset{\vartriangle}{\mathrm{EAB}}\ \kappa\alpha\iota\ \overset{\Delta}{\Delta\mathrm{A}\Gamma}.\ \mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

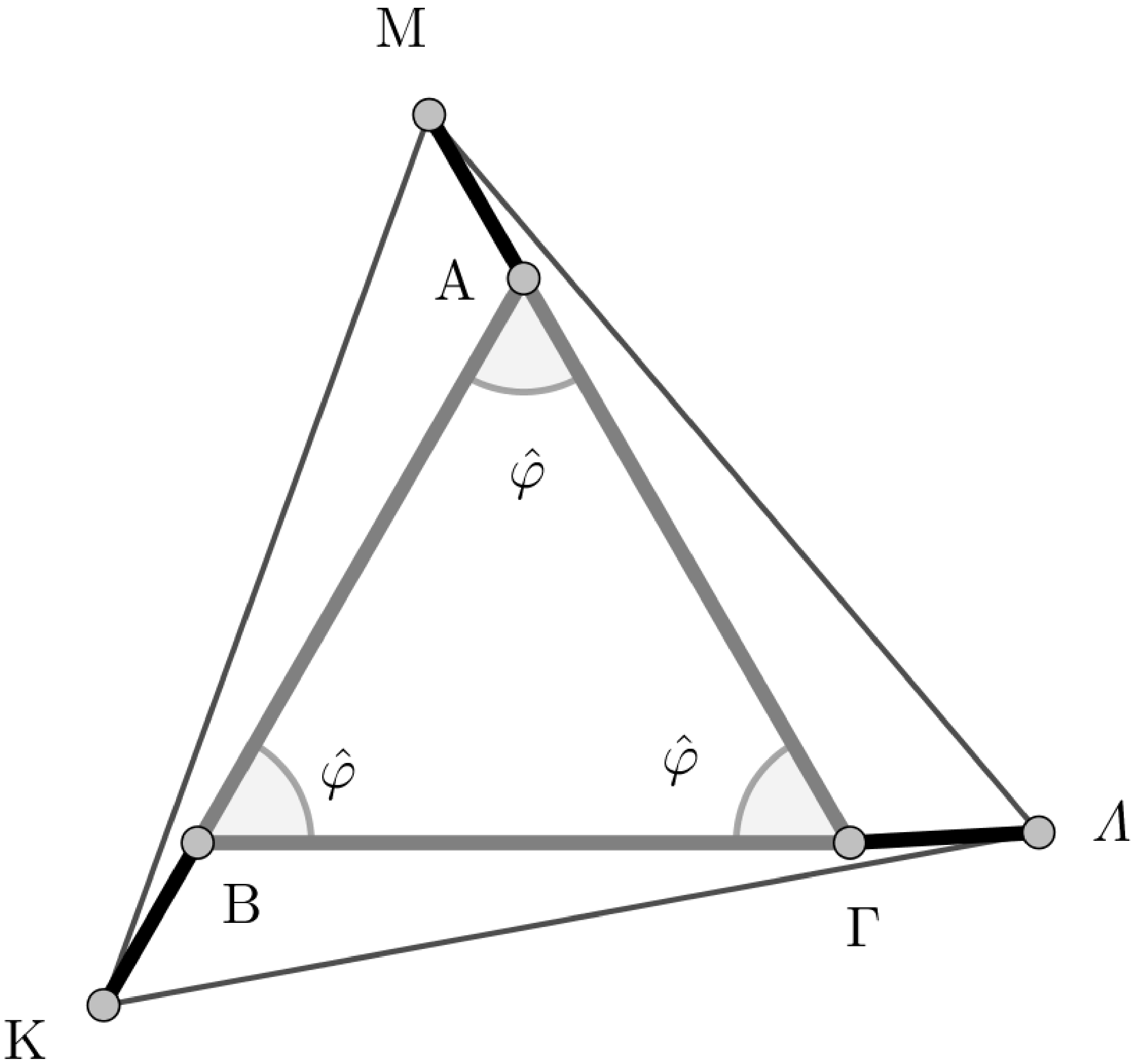
$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \mathrm{AE}=\mathrm{A}\Gamma\left(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta\right)\\(\mathrm{II})\ \mathrm{AB}=\Delta\mathrm{B}\left(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta\right)\\(\mathrm{III})\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma\left(\Omega\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\nu\right)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \overset{\vartriangle}{\mathrm{EAB}}=\overset{\Delta}{\Delta\mathrm{A}\Gamma}\left(\Pi-\Gamma-\Pi\right).\ \Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{BE}=\Gamma\Delta\ \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \sigma\varepsilon\ \delta\upsilon o$ $\acute{\iota}\sigma\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi o\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa o\nu\tau\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma.$

2.

Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ *πρεκτείνουμε τις πλευρές* ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ *και στις προεκτάσεις τους θεωρούμε τα τμήματα* ΒΚ = ΓΛ = ΑΜ. Ν*α αποδείξετε οτι το τρίγωνο* ΚΛΜ *είναι ισόπλευρο.*

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
ΑΒΓ : Ι*σόπλευρο τρίγωνο* ΒΚ = ΓΛ = ΑΜ	ΜΚ = ΜΛ = ΚΛ



Ε*πειδή το τρίγωνο* ΑΒΓ *είναι ισόπλευρο θα έχω*:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \hat{\varphi}\,(1)$$

$$\left\{\begin{matrix} \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K} = 180^0 - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 180^0 - \hat{\varphi} \\ \mathrm{M}\hat{\Gamma}\Lambda = 180^0 - \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = 180^0 - \hat{\varphi} \\ \mathrm{K}\hat{\mathrm{B}}\Lambda = 180^0 - \Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = 180^0 - \hat{\varphi} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K} = \mathrm{M}\hat{\Gamma}\Lambda = \mathrm{K}\hat{\mathrm{B}}\Lambda\,(2)$$

$$\underline{\left.\begin{cases}\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{\Gamma A}\\ \mathrm{BK}=\mathrm{\Gamma\Lambda}=\mathrm{AM}\end{cases}\right\}(+)}$$

$$\mathrm{AB}+\mathrm{BK}=\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Lambda}=\mathrm{\Gamma A}+\mathrm{AM}\overset{\mathrm{AB+BK=AK,B\Gamma+\Gamma\Lambda=A\Lambda,\Gamma A+AM=\Gamma M}}{\Longrightarrow}$$

$$\mathrm{AK}=\mathrm{B\Lambda}=\mathrm{\Gamma M}\,(3)$$

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\mathrm{M\overset{\triangle}{A}K}$ *και* $\mathrm{M\overset{\triangle}{\Gamma}\Lambda}$*. Αυτά έχουν:*

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{MA}=\mathrm{BK}\,(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\ (\mathrm{II})\,\mathrm{AK}=\mathrm{B\Lambda}\,(3)\\ (\mathrm{III})\,\mathrm{M\hat{A}K}=\mathrm{K\hat{B}\Lambda}\,(2)\end{array}\right\}$$

Οπότε $\mathrm{M\overset{\triangle}{A}K}=\mathrm{\Lambda\overset{\triangle}{B}K}\,(\Pi-\Gamma-\Pi)$*. Συνεπώς θα έχω:*

$\mathrm{MK}=\mathrm{K\Lambda}\,(4)$ *(Ως πλευρές που βρίσκονται σε δυο ίσα τρίγωνα απέναντι απο ίσες γωνίες)*

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\mathrm{M\overset{\triangle}{A}K}$ *και* $\mathrm{\Lambda\overset{\triangle}{\Gamma}M}$*. Αυτά έχουν:*

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{MA}=\mathrm{\Gamma\Lambda}\,(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\ (\mathrm{II})\,\mathrm{AK}=\mathrm{\Gamma M}\,(3)\\ (\mathrm{III})\,\mathrm{M\hat{A}K}=\mathrm{M\hat{\Gamma}\Lambda}\,(2)\end{array}\right\}$$

Οπότε $\mathrm{M\overset{\triangle}{A}K}=\mathrm{\Lambda\overset{\triangle}{\Gamma}M}\,(\Pi-\Gamma-\Pi)$*. Συνεπώς θα έχω:*

$\mathrm{MK}=\mathrm{M\Lambda}\,(5)$ *(Ως πλευρές που βρίσκονται σε δυο ίσα τρίγωνα απέναντι απο ίσες γωνίες)*

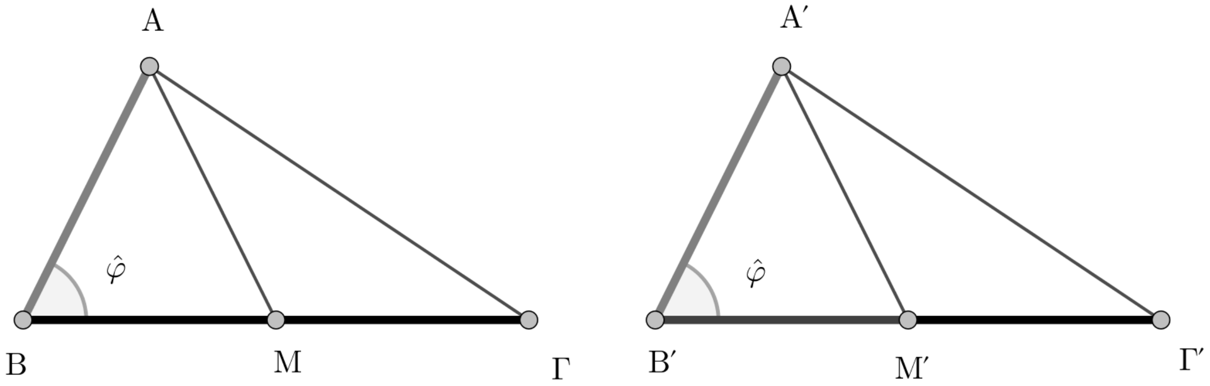
Απο τις σχέσεις (4),(5) θα έχω:

$$\left.\begin{cases}\mathrm{MK}=\mathrm{K\Lambda}\\ \mathrm{MK}=\mathrm{M\Lambda}\end{cases}\right\}\Rightarrow\mathrm{MK}=\mathrm{M\Lambda}=\mathrm{K\Lambda}$$

Άρα το τρίγωνο ΚΛΜ *είναι ισόπλευρο.*

3.

Να αποδείξετε ότι στις ομόλογες πλευρές δυο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσες διάμεσοι.



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}} = \overset{\triangle}{\mathrm{A'B'\Gamma'}}$ $\mathrm{M}: \mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B\Gamma}$ $\mathrm{M'}: \mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B'\Gamma'}$	$\mathrm{AM} = \mathrm{A'M'}$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}} = \overset{\triangle}{\mathrm{A'B'\Gamma'}}\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{B}}'(1), \mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}(2), \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{B'\Gamma'}(3)$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \mathrm{M}\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B\Gamma}\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{BM} = \mathrm{M\Gamma} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}(4)$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \mathrm{M'}\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B'\Gamma'}\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{B'M'} = \mathrm{M'\Gamma'} = \frac{\mathrm{B'\Gamma'}}{2}(5)$$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (3),(4),(5)\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{B'\Gamma'} \\ \mathrm{BM} = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2} \\ \mathrm{B'M'} = \dfrac{\mathrm{B'\Gamma'}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{BM} = \mathrm{B'M'}(6)$$

$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\mathrm{M}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{A'}\overset{\triangle}{\mathrm{B'}}\mathrm{M'}.\ \mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ \mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}(2)\\(\mathrm{II})\ \mathrm{BM}=\mathrm{B'M'}(6)\\(\mathrm{III})\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M}=\mathrm{A'}\hat{\mathrm{B}}'\mathrm{M'}(1)\end{cases}\right\}$$

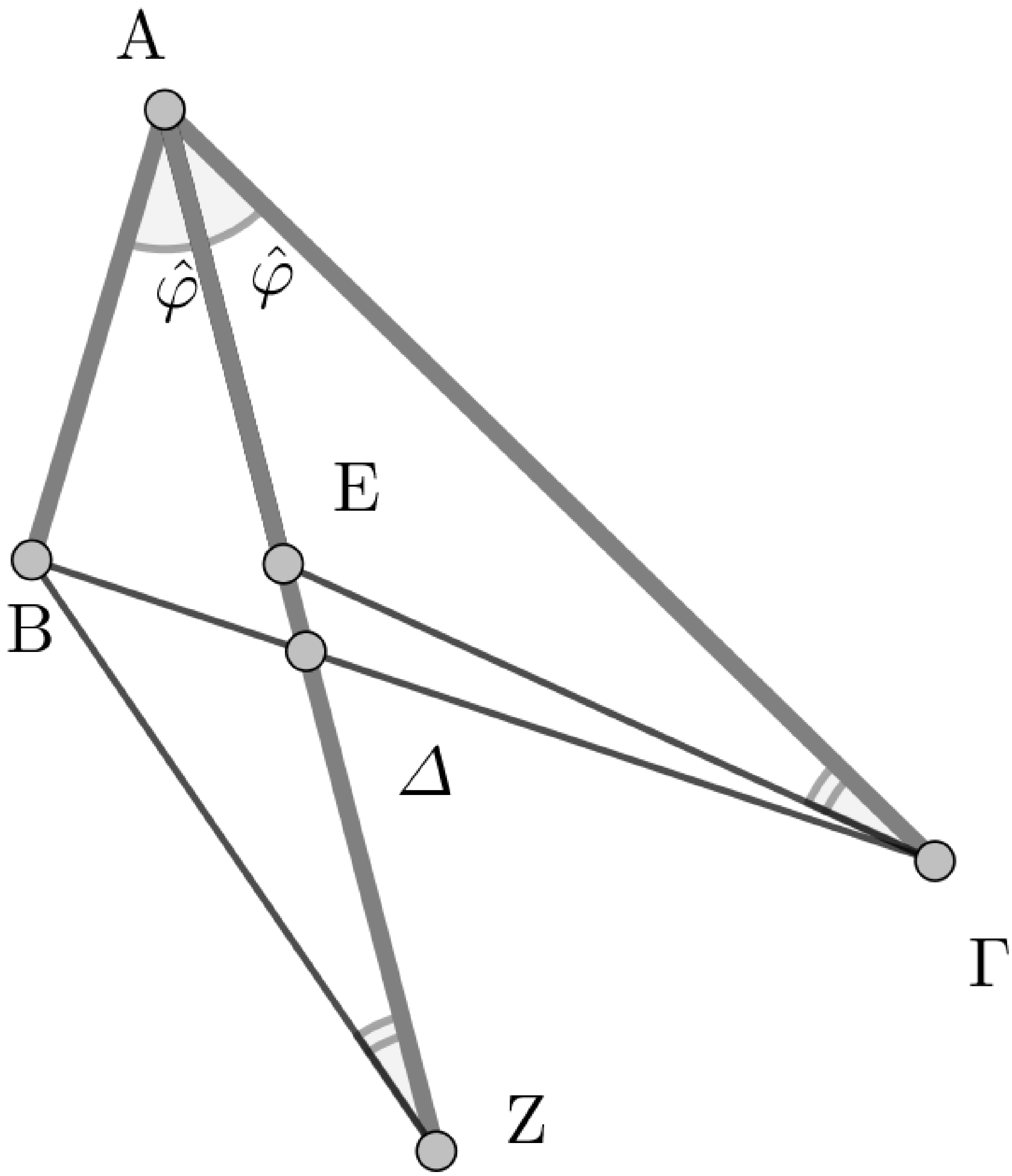
$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\mathrm{M}=\mathrm{A'}\overset{\triangle}{\mathrm{B'}}\mathrm{M'}(\Pi-\Gamma-\Pi).\ \Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{AM}=\mathrm{A'M'}\begin{pmatrix}\Omega\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\ \pi o\upsilon\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa o\nu\tau\alpha\iota\ \sigma\varepsilon\ \delta\upsilon o\ \acute{\iota}\sigma\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\\ \alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi o\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\end{pmatrix}$$

4.

Έστω τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ *και* $\mathrm{A\Delta}$ *η διχοτόμος της* $\hat{\mathrm{A}}$ *στην οποία θεωρούμε τα τμήματα* $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}$ *και* $\mathrm{AZ}=\mathrm{A\Gamma}$. *Να αποδείξετε ότι* $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{A\Delta}$: *Διχοτόμος της* $\hat{\mathrm{A}}$ $\mathrm{AE}=\mathrm{AB},\ \mathrm{AZ}=\mathrm{A\Gamma}$	$\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}$


A
$\hat{\varphi}$
$\hat{\varphi}$
E
B
Δ
Γ
Z

$\Sigma \upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \overset{\triangle}{\mathrm{AZB}}\ \kappa\alpha\iota\ \overset{\triangle}{\mathrm{A\Gamma E}}.\ \mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\ \mathrm{AZ}=\mathrm{A\Gamma}(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta) \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{AB}=\mathrm{AE}(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta) \\ (\mathrm{III})\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}=\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}\left(\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \mathrm{A\Delta}\ \delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \hat{\mathrm{A}}\right) \end{array}\right\}$$

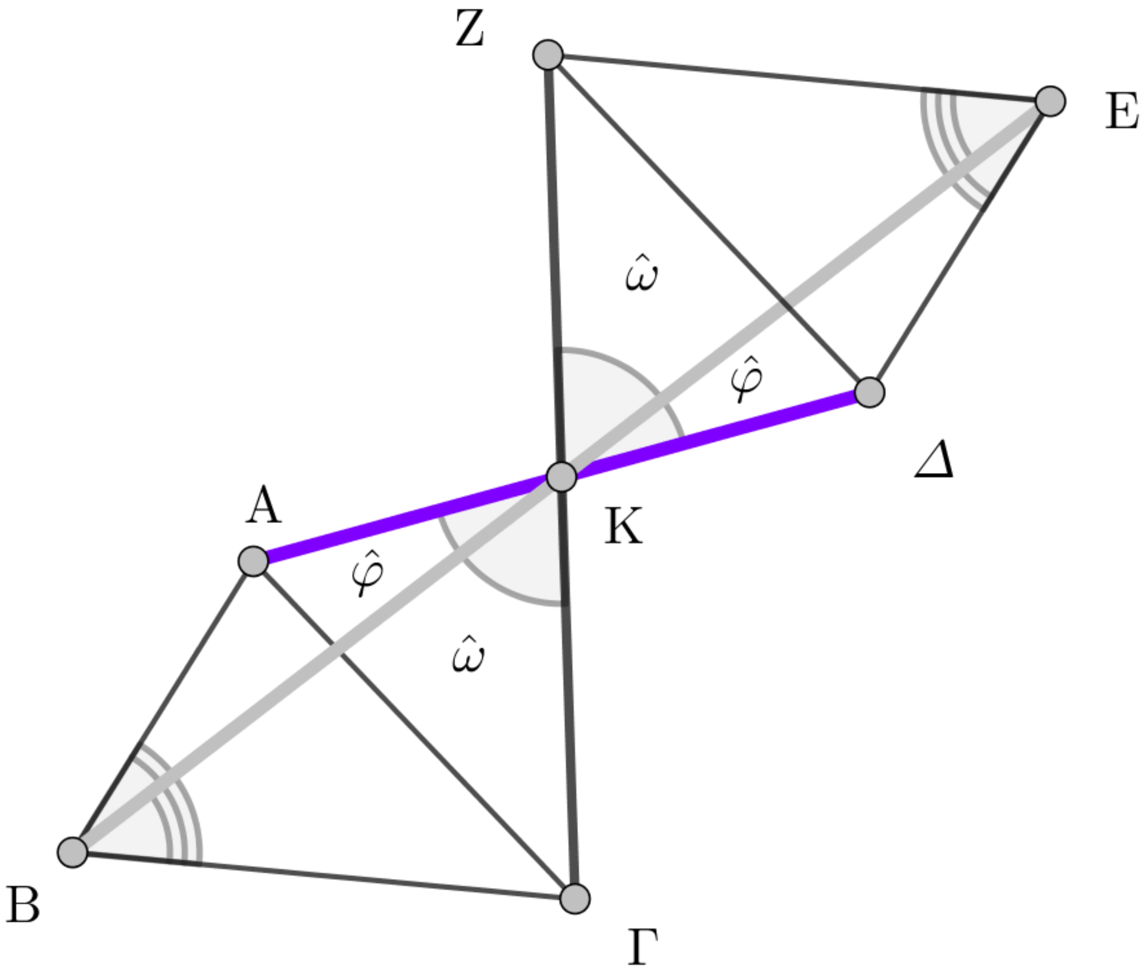
$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \overset{\triangle}{\mathrm{AZB}}=\overset{\triangle}{\mathrm{A\Gamma E}}(\Pi-\Gamma-\Pi).\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}\left(\begin{array}{l}\Omega\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \pi o\upsilon\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa o\nu\tau\alpha\iota\ \sigma\varepsilon\ \delta\upsilon o\ \acute{\iota}\sigma\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha \\ \alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi o\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\end{array}\right)$$

5.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ *και* Κ *σημείο εξωτερικό του τριγώνου. Αν στις προεκτάσεις των* ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ *θεωρήσουμε τα τμήματα* $\mathrm{K\Delta}=\mathrm{AK}$, $\mathrm{KE}=\mathrm{BK}$, $\mathrm{KZ}=\Gamma\mathrm{K}$, *να αποδείξετε ότι* $\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{K\Delta}=\mathrm{AK},\mathrm{KE}=\mathrm{BK},\mathrm{KZ}=\Gamma\mathrm{K}$	$\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$



$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \mathrm{E}\overset{\triangle}{\mathrm{K}}\Delta\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{B}\overset{\triangle}{\mathrm{K}}\mathrm{A}.\ \mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{KE}=\mathrm{KB}(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\mathrm{K}\Delta=\mathrm{KA}(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{III})\mathrm{E}\hat{\mathrm{K}}\Delta=\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B}(\Omega\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\nu)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{E}\overset{\triangle}{\mathrm{K}}\Delta=\mathrm{B}\overset{\triangle}{\mathrm{K}}\mathrm{A}(\Pi-\Gamma-\Pi)\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{K}\hat{\mathrm{E}}\Delta=\mathrm{K}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}(1)\left(\begin{array}{l}\Omega\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \pi o\upsilon\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa o\nu\tau\alpha\iota\ \sigma\varepsilon\ \delta\upsilon o\ \acute{\iota}\sigma\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\\\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi o\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\end{array}\right)$$

$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \overset{\triangle}{\mathrm{EKZ}}\ \kappa\alpha\iota\ \overset{\triangle}{\mathrm{BK\Gamma}}.\ \mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\mathrm{KZ}=\mathrm{K\Gamma}(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\ (\mathrm{II})\mathrm{KE}=\mathrm{KB}(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\ (\mathrm{III})\mathrm{E}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma(\Omega\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\nu)\end{cases}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \overset{\triangle}{\mathrm{EKZ}}=\overset{\triangle}{\mathrm{BK\Gamma}}(\Pi-\Gamma-\Pi)\ \Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{K}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}=\mathrm{K}\hat{\mathrm{B}}\Gamma\,(2)\begin{pmatrix}\Omega\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \pi o\upsilon\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa o\nu\tau\alpha\iota\ \sigma\varepsilon\ \delta\upsilon o\ \acute{\iota}\sigma\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\\ \alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi o\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\end{pmatrix}$$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (1),(2)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

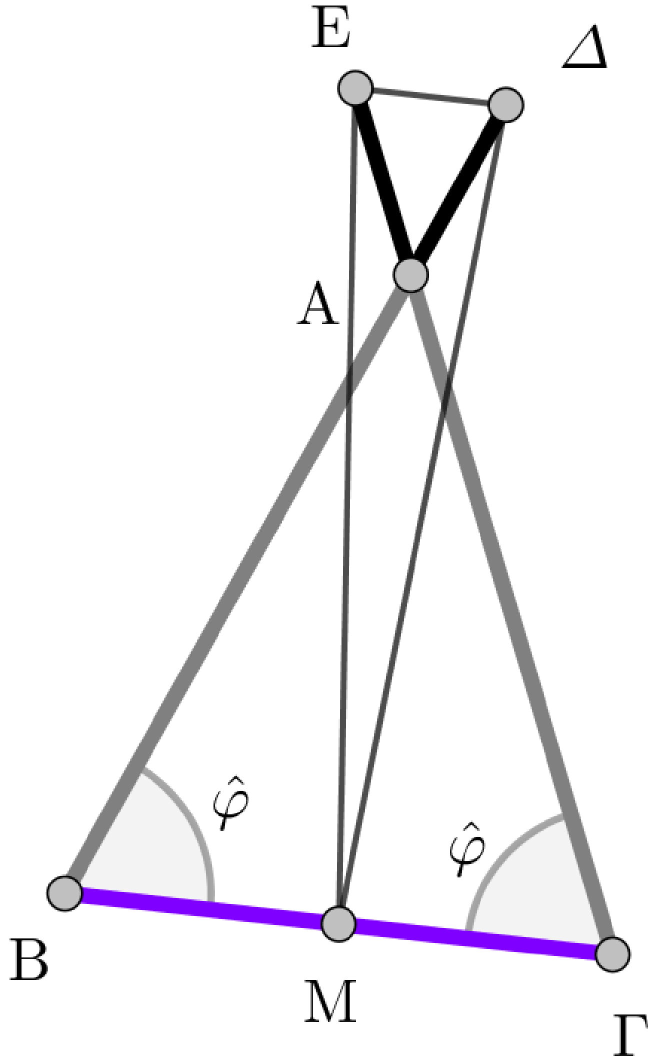
$$\underline{\left.\begin{cases}\mathrm{K}\hat{\mathrm{E}}\Delta=\mathrm{K}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}\\ \mathrm{K}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}=\mathrm{K}\hat{\mathrm{B}}\Gamma\end{cases}\right\}}(+)$$

$$\mathrm{K}\hat{\mathrm{E}}\Delta+\mathrm{K}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}=\mathrm{K}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}+\mathrm{K}\hat{\mathrm{B}}\Gamma\ \overset{\substack{\mathrm{K}\hat{\mathrm{E}}\Delta+\mathrm{K}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}=\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z}\\ \mathrm{K}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}+\mathrm{K}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma}}{\Longrightarrow}\ \mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$$

6.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. *Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών* ΒΑ, ΓΑ *θερωρούμε ίσα τμήματα* ΑΔ, ΑΕ *αντίστοιχα. Αν* Μ *είναι το μέσο της βάσης* ΒΓ, *να αποδείξετε ότι το τρίγωνο* ΜΔΕ *είναι ισοσκελές*

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
Μ: Τ*ο μέσο της* ΒΓ $\mathrm{BA}=\Gamma\mathrm{A},\ \mathrm{A}\Delta=\mathrm{AE}$	$\mathrm{ME}=\mathrm{M}\Delta$



$\Sigma\tau o\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{AB\Gamma}\left(\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}\right)\theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}(1)\begin{pmatrix}\Omega\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\varepsilon\varsigma\ \sigma\tau\eta\nu\ \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda o\acute{\upsilon}\varsigma\\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\end{pmatrix}$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \mathrm{M}\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B\Gamma}\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\mathrm{BM}=\mathrm{M\Gamma}(2)$

$$\underline{\left.\begin{cases}\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}\\ \mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}\end{cases}\right\}}(+)$$

$$\mathrm{AB}+\mathrm{A\Delta}=\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{AE}\overset{\mathrm{AB+A\Delta=B\Delta,A\Gamma+AE=\Gamma E}}{\Longrightarrow}\mathrm{B\Delta}=\Gamma\mathrm{E}(3)$$

$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \overset{\triangle}{\Delta\mathrm{B}\mathrm{M}}\ \kappa\alpha\iota\ \overset{\triangle}{\mathrm{E}\Gamma\mathrm{M}}.\ \mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{BM}=\mathrm{M}\Gamma(2)\\(\mathrm{II})\mathrm{B}\Delta=\Gamma\mathrm{E}(3)\\(\mathrm{III})\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M}=\mathrm{E}\Gamma\hat{\mathrm{M}}(1)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \overset{\triangle}{\Delta\mathrm{B}\mathrm{M}}=\overset{\triangle}{\mathrm{E}\Gamma\mathrm{M}}(\Pi-\Gamma-\Pi)\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

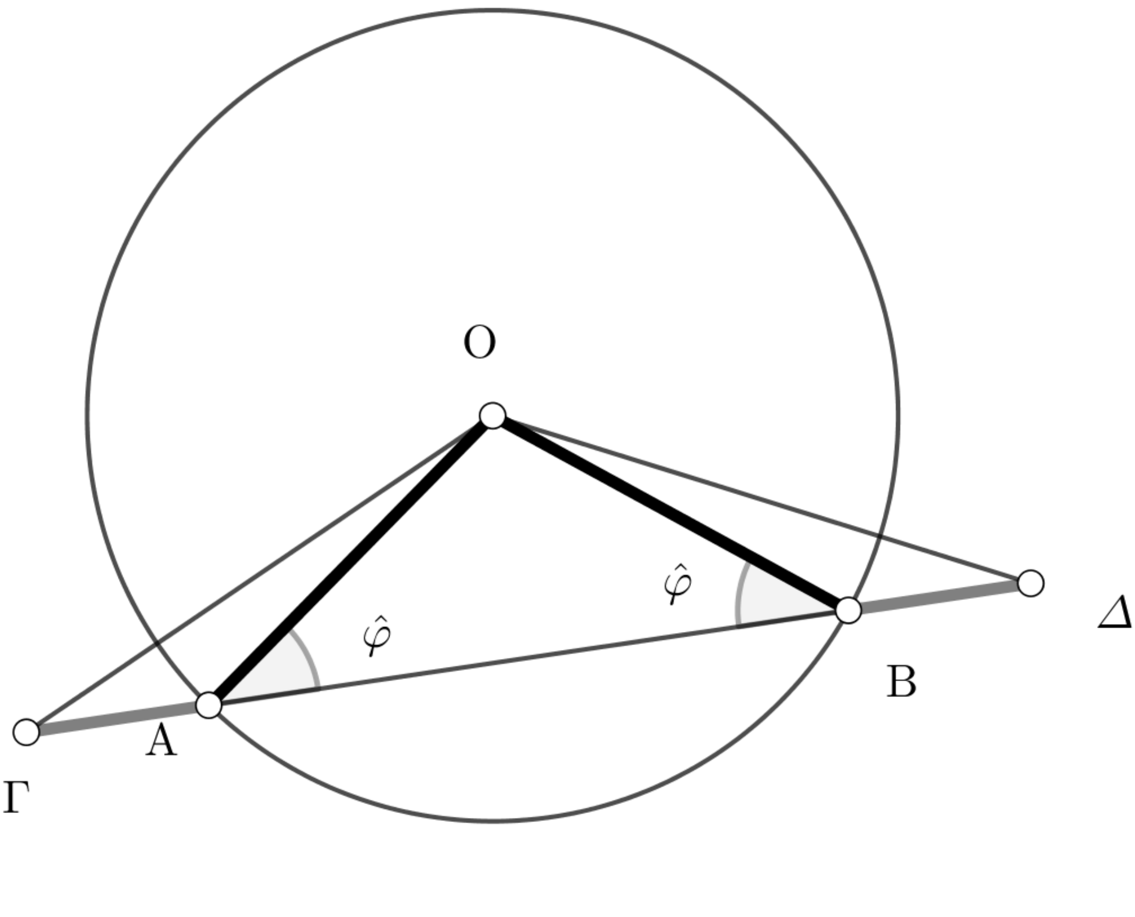
$$\mathrm{ME}=\mathrm{M}\Delta\left(\begin{array}{l}\Omega\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\ \pi o\upsilon\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa o\nu\tau\alpha\iota\ \sigma\varepsilon\ \delta\upsilon o\ \acute{\iota}\sigma\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\\\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi o\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\end{array}\right)$$

Συνεπώς το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{M}\Delta\mathrm{E}}$ *είναι ισοσκελές γιατί έχει δυο τουλάχιστον πλευρές ίσες.*

7.

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο *και χορδή του* ΑΒ. Π*ροεκτείνουμε την* ΑΒ *και προς τα δυο της άκρα, κατά ίσα τμήματα* ΑΓ *και* ΒΔ *αντίστοιχα.*

Ν*α αποδείξετε ότι* $\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=\mathrm{O}\hat{\Delta}\mathrm{B}$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{A,B} \in (\mathrm{O}, \rho)$ $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{B\Delta}$	$\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{O}\hat{\Delta}\mathrm{B}$

$\textit{Έχω}\ \mathrm{OA} = \mathrm{OB}(1)(\textit{Ως ακτίνες του ίδιου κύκλου})$

$\textit{Στο ισοσκελές τρίγωνο}\ \mathrm{OAB}(\mathrm{OA} = \mathrm{OB})\ \textit{θα έχω}:$

$$\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \hat{\varphi}(2)\begin{pmatrix} \textit{Ως προσκείμενες γωνίες στην βάση} \\ \textit{ισοσκελούς τριγώνου} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{cases} \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 180^0 - \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = 180^0 - \hat{\varphi} \\ \mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\Delta = 180^0 - \mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = 180^0 - \hat{\varphi} \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\Delta(3)$$

$\textit{Συγκρίνω τα τρίγωνα}\ \mathrm{O}\overset{\triangle}{\mathrm{A}}\Gamma\ \textit{και}\ \mathrm{O}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Delta.\ \textit{Αυτά έχουν}:$

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\mathrm{OA} = \mathrm{OB}(1) \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{B\Delta}(\textit{Υπόθεση}) \\ (\mathrm{III})\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\Delta(3) \end{array}\right\}$$

$\textit{Οπότε}\ \mathrm{O}\overset{\triangle}{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{O}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Delta(\Pi - \Gamma - \Pi)\ \textit{Συνεπώς θα έχω}:$

$$\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{O}\hat{\Delta}\mathrm{B}\begin{pmatrix} \textit{Ως γωνίες που βρίσκονται σε δυο ίσα τρίγωνα} \\ \textit{απέναντι απο ίσες πλευρές} \end{pmatrix}$$