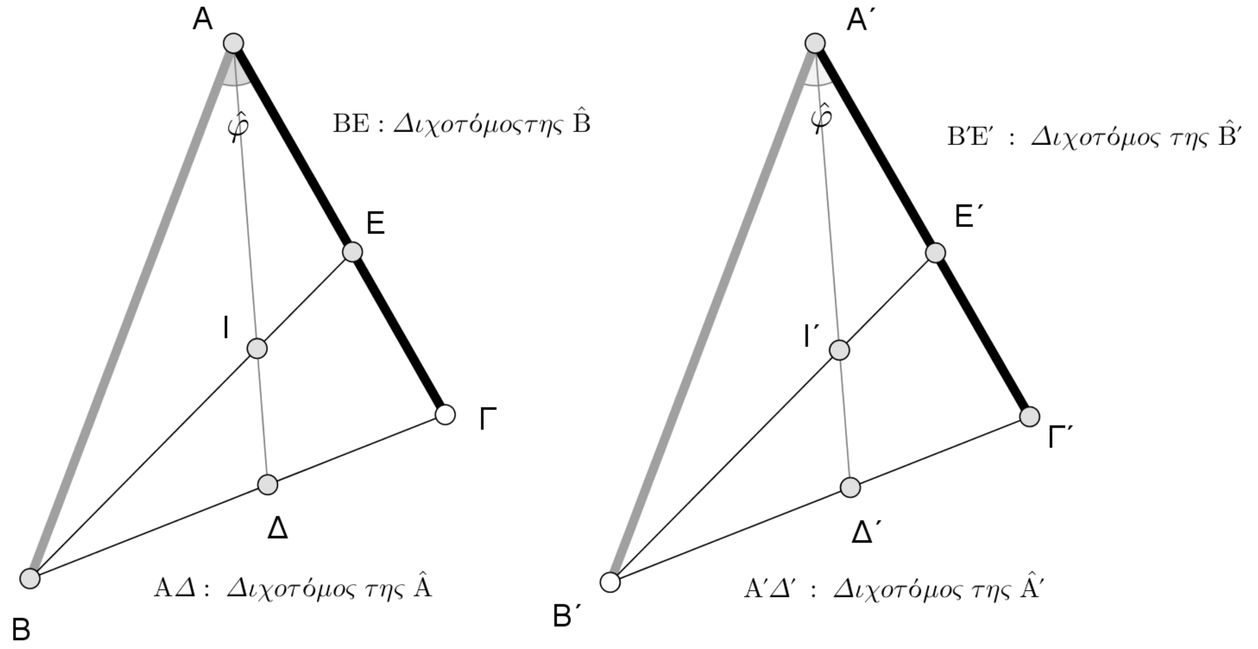
# ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

1.

$\Delta\upsilon o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha$ ΑΒΓ $\kappa\alpha\iota$ Α′Β′Γ′ $\acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu$ $\beta = \beta', \gamma = \gamma'$ $\kappa\alpha\iota$ $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$. Αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ και Ι′ το σημείο τομής των διχοτόμων Α′Δ′ και Β′Ε′ του Α′Β′Γ′ να αποδείξετε οτι:

$(\mathrm{I})$ $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{A'\Delta'}$ και $\mathrm{BE} = \mathrm{B'E'}$

$(\mathrm{II})$ $\mathrm{AI} = \mathrm{A'I'}$ και $\mathrm{BI} = \mathrm{B'I'}$




| ΥΠΟΘΕΣΗ | ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ |
|---|---|
| $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A'\Gamma'}, \mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}, \hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}'$<br>ΑΔ : Διχοτόμος της $\hat{\mathrm{A}}$, ΒΕ : Διχοτόμοςτης $\hat{\mathrm{B}}$<br>Α′Δ′ : Διχοτόμος της $\hat{\mathrm{A}}'$, Β′Ε′ : Διχοτόμοςτης $\hat{\mathrm{B}}'$ | $(\mathrm{I})$ $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{A'\Delta'}$, $\mathrm{BE} = \mathrm{B'E'}$<br>$(\mathrm{II})$ $\mathrm{AI} = \mathrm{A'I'}$, $\mathrm{BI} = \mathrm{B'I'}$ |

$$\Sigma \upsilon \gamma \kappa \rho i \nu \omega \ \tau \alpha \ \tau \rho i \gamma \omega \nu \alpha \ \overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}} \ \kappa \alpha \iota \ \mathrm{A'}\overset{\Delta}{\mathrm{B'}}\mathrm{\Gamma'}.\mathrm{A}\upsilon \tau \acute{\alpha} \ \acute{\varepsilon} \chi o \upsilon \nu:$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{A'\Gamma'}(\mathrm{Y}\pi \acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\,\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}(\mathrm{Y}\pi \acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{III})\,\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{\Gamma}=\mathrm{B'}\hat{\mathrm{A}}'\mathrm{\Gamma'}(\mathrm{Y}\pi \acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\end{array}\right\}$$

$$\mathrm{O}\pi \acute{o}\tau\varepsilon:\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}=\mathrm{A'}\overset{\Delta}{\mathrm{B'}}\mathrm{\Gamma'}(\Pi\Gamma\Pi).\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \hat{\mathrm{B}}=\hat{\mathrm{B}}'(1)$$

$$\Sigma \upsilon \gamma \kappa \rho i \nu \omega \ \tau \alpha \ \tau \rho i \gamma \omega \nu \alpha \ \overset{\triangle}{\mathrm{AB\Delta}} \ \kappa \alpha \iota \ \mathrm{A'}\overset{\Delta}{\mathrm{B'}}\mathrm{\Delta'}.\mathrm{A}\upsilon \tau \acute{\alpha} \ \acute{\varepsilon} \chi o \upsilon \nu:$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}(\mathrm{Y}\pi \acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\,\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}=\mathrm{A'}\hat{\mathrm{B}}'\mathrm{E'}(\Omega\varsigma\ \mu\iota\sigma\acute{\alpha}\ \acute{\iota}\sigma\omega\nu\ \gamma\omega\nu\iota\acute{\omega}\nu)\\(\mathrm{III})\,\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta=\mathrm{A'}\hat{\mathrm{B}}'\Delta'(1)\end{array}\right\}$$

$$\mathrm{O}\pi \acute{o}\tau\varepsilon:\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Delta}}=\mathrm{A'}\overset{\Delta}{\mathrm{B'}}\mathrm{\Delta'}(\Gamma\Pi\Gamma).\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \mathrm{A\Delta}=\mathrm{A'\Delta'}$$

$$\Sigma \upsilon \gamma \kappa \rho i \nu \omega \ \tau \alpha \ \tau \rho i \gamma \omega \nu \alpha \ \overset{\triangle}{\mathrm{ABI}} \ \kappa \alpha \iota \ \mathrm{A'}\overset{\Delta}{\mathrm{B'}}\mathrm{I'}.\mathrm{A}\upsilon \tau \acute{\alpha} \ \acute{\varepsilon} \chi o \upsilon \nu:$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}(\mathrm{Y}\pi \acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\,\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{I}=\mathrm{B'}\hat{\mathrm{A}}'\mathrm{I'}(\Omega\varsigma\ \mu\iota\sigma\acute{\alpha}\ \acute{\iota}\sigma\omega\nu\ \gamma\omega\nu\iota\acute{\omega}\nu)\\(\mathrm{III})\,\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}=\mathrm{A'}\hat{\mathrm{B}}'\mathrm{E'}(\Omega\varsigma\ \mu\iota\sigma\acute{\alpha}\ \acute{\iota}\sigma\omega\nu\ \gamma\omega\nu\iota\acute{\omega}\nu)\end{array}\right\}$$

$$\mathrm{O}\pi \acute{o}\tau\varepsilon:\overset{\triangle}{\mathrm{ABE}}=\mathrm{A'}\overset{\Delta}{\mathrm{B'}}\mathrm{E'}(\Gamma\Pi\Gamma).\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \mathrm{BE}=\mathrm{B'E'}$$

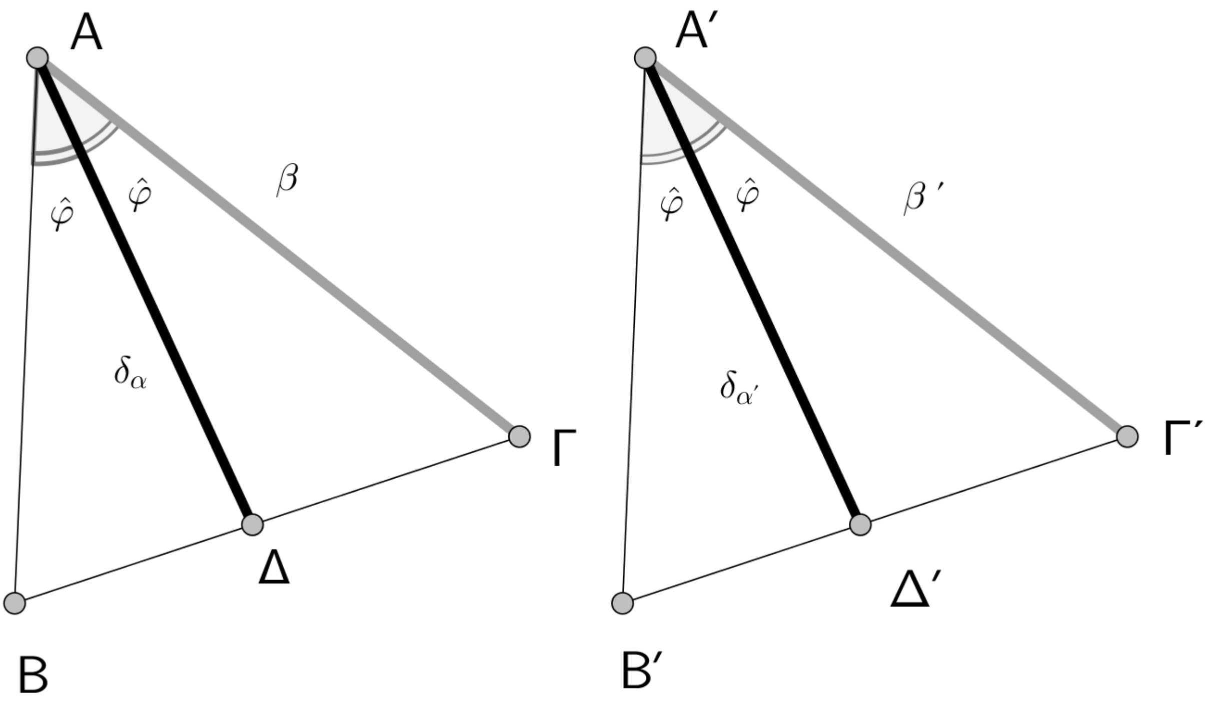
$$\Sigma \upsilon \gamma \kappa \rho i \nu \omega \ \tau \alpha \ \tau \rho i \gamma \omega \nu \alpha \ \overset{\triangle}{\mathrm{ABI}} \ \kappa \alpha \iota \ \mathrm{A'}\overset{\Delta}{\mathrm{B'}}\mathrm{I'}.\mathrm{A}\upsilon \tau \acute{\alpha} \ \acute{\varepsilon} \chi o \upsilon \nu:$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}(\mathrm{Y}\pi \acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\,\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{I}=\mathrm{B'}\hat{\mathrm{A}}'\mathrm{I'}(\Omega\varsigma\ \mu\iota\sigma\acute{\alpha}\ \acute{\iota}\sigma\omega\nu\ \gamma\omega\nu\iota\acute{\omega}\nu)\\(\mathrm{III})\,\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I}=\mathrm{A'}\hat{\mathrm{B}}'\mathrm{I'}(\Omega\varsigma\ \mu\iota\sigma\acute{\alpha}\ \acute{\iota}\sigma\omega\nu\ \gamma\omega\nu\iota\acute{\omega}\nu)\end{array}\right\}$$

$$\mathrm{O}\pi \acute{o}\tau\varepsilon:\overset{\triangle}{\mathrm{ABI}}=\mathrm{A'}\overset{\Delta}{\mathrm{B'}}\mathrm{I'}(\Gamma\Pi\Gamma).\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \mathrm{AI}=\mathrm{A'I'}\,,\mathrm{BI}=\mathrm{B'I'}$$

2.

| |
|---|
| $\Delta\upsilon o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \mathrm{AB\Gamma}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{A'B'\Gamma'}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu\ \beta=\beta',\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{A}}'\,\kappa\alpha\iota\ \delta_\alpha=\delta_{\alpha'}.$<br>$\mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota:$<br>$(\mathrm{I})\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'(\mathrm{II})\alpha=\alpha'\ \kappa\alpha\iota\ \gamma=\gamma'$ |




| ΥΠΟΘΕΣΗ | ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ |
|---|---|
| $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A'\Gamma'},\ \hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}',\ \mathrm{A\Delta} = \mathrm{A'\Delta'}$<br>$\mathrm{A\Delta}: \Delta\iota\chi o\tau \acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \hat{\mathrm{A}}$<br>$\mathrm{A'\Delta'}: \Delta\iota\chi o\tau \acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \hat{\mathrm{A}}'$ | $(\mathrm{I})\ \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$<br>$(\mathrm{II})\ \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{B'\Gamma'},\ \mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$ |

$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \mathrm{A}\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{A}'\overset{\Delta}{\Delta}'\Gamma'.\mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{A}\Gamma=\mathrm{A}'\Gamma'(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\,\mathrm{A}\Delta=\mathrm{A}'\Delta'(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{III})\,\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\Delta'\hat{\mathrm{A}}'\Gamma'(\Omega\varsigma\ \mu\iota\sigma\acute{\alpha}\ \acute{\iota}\sigma\omega\nu\ \gamma\omega\nu\iota\acute{\omega}\nu)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon:\mathrm{A}\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma=\mathrm{A}'\overset{\Delta}{\Delta}'\Gamma'(\Pi\Gamma\Pi).\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'(1)$

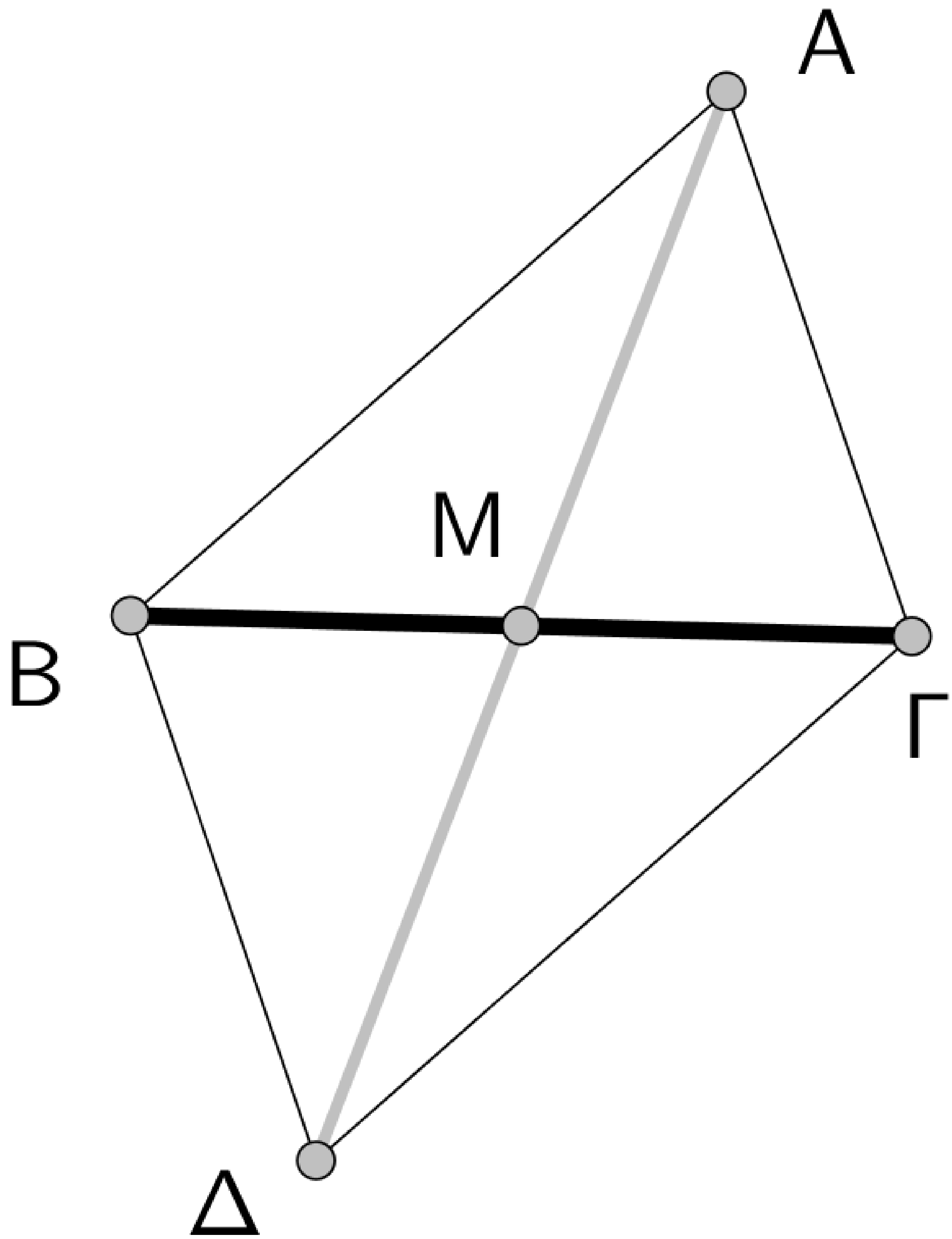
$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Gamma\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{A}'\overset{\Delta}{\mathrm{B}}'\Gamma'.\mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{A}\Gamma=\mathrm{A}'\Gamma'(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\,\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\mathrm{B}'\hat{\mathrm{A}}'\Gamma'(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{III})\,\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}=\mathrm{A}'\hat{\Gamma}'\mathrm{B}'(1)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Gamma=\mathrm{A}'\overset{\Delta}{\mathrm{B}}'\Gamma'.\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \ \mathrm{B}\Gamma=\mathrm{B}'\Gamma',\mathrm{AB}=\mathrm{A}'\mathrm{B}'$

3.

| |
|---|
| *Σε τρίγωνο* ΑΒΓ *προεκτείνουμε τη διάμεσο* ΑΜ *κατά ίσο τμήμα* ΜΔ. *Να αποδείξετε οτι τα τρίγωνα* ΑΒΓ *και* ΒΓΔ *είναι ίσα* |




| ΥΠΟΘΕΣΗ | ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ |
|---|---|
| $\mathrm{M}: \mathrm{M}\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B\Gamma}, \mathrm{AM} = \mathrm{M\Delta}$ | $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}} = \overset{\Delta}{\mathrm{B\Gamma\Delta}}$ |

$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \stackrel{\triangle}{\mathrm{ABM}}\ \kappa\alpha\iota\ \stackrel{\Delta}{\Delta\Gamma\mathrm{M}}.\mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{BM}=\mathrm{M}\Gamma(\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \mathrm{M}\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B}\Gamma)\\(\mathrm{II})\mathrm{AM}=\mathrm{M}\Delta(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{III})\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{A}=\Delta\hat{\mathrm{M}}\Gamma(\Omega\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\nu)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: \stackrel{\triangle}{\mathrm{ABM}}=\stackrel{\Delta}{\Delta\Gamma\mathrm{M}}\ (\Pi\Gamma\Pi).\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \mathrm{AB}=\Delta\Gamma(1), \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M}=\mathrm{M}\hat{\Gamma}\Delta(2)$

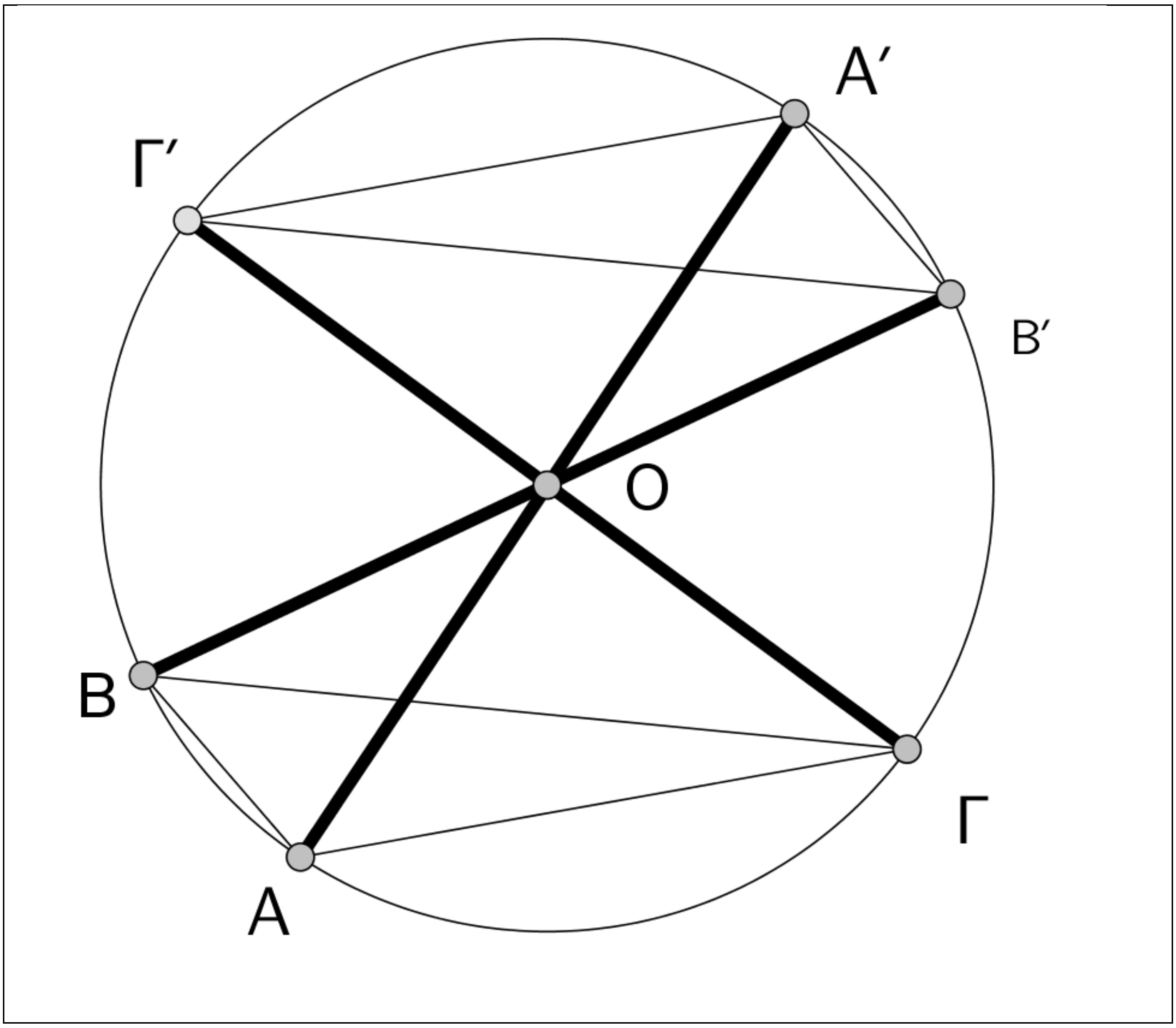
$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \stackrel{\triangle}{\mathrm{AB}\Gamma}\ \kappa\alpha\iota\ \stackrel{\Delta}{\mathrm{B}\Gamma\Delta}.\mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{B}\Gamma=\mathrm{B}\Gamma(\mathrm{K}o\iota\nu\acute{\eta}\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha})\\(\mathrm{II})\mathrm{AB}=\Gamma\Delta(1)\\(\mathrm{III})\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta(2)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \stackrel{\triangle}{\mathrm{AB}\Gamma}=\stackrel{\Delta}{\mathrm{B}\Gamma\Delta}(\Pi\Gamma\Pi)$

4.

| |
|---|
| *Έστω* $\mathrm{AA}', \mathrm{BB}'$ *και* $\Gamma\Gamma'$ *είναι αποδείξετε ότι τα τρίγωνα* $\mathrm{AB}\Gamma$ *και* $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\Gamma'$ *είναι ίσα.* |




| ΥΠΟΘΕΣΗ | ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ |
| --- | --- |
| $\mathrm{AA', BB', \Gamma\Gamma'}$ : *Διάμετροι* | $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}} = \mathrm{A'}\overset{\Delta}{\mathrm{B'}}\mathrm{\Gamma'}$ |

*Συγκρίνω τα τρίγωνα* $\mathrm{O}\overset{\Delta}{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ *και* $\mathrm{O'}\overset{\Delta}{\mathrm{A'}}\mathrm{B'}$. *Αυτά έχουν* :

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\ \mathrm{OA} = \mathrm{O'A'}\ (\text{Ως ακτίνες του ίδιου κύκλου}) \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{OB} = \mathrm{O'B'}\ (\text{Ως ακτίνες του ίδιου κύκλου}) \\ (\mathrm{III})\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B} = \mathrm{A'}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B'}\ (\text{Ως κατακορυφήν}) \end{array}\right\}$$

$O\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ O\overset{\triangle}{A}B = O'\overset{\triangle}{A'}B'(\Pi - \Gamma - \Pi).\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$AB = A'B'(1)\ \kappa\alpha\iota\ B\hat{A}O = B'\hat{A}'O\ (2)$

$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ O\overset{\triangle}{A}\Gamma\ \kappa\alpha\iota\ O'\overset{\triangle}{A'}\Gamma'.\ A\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\left\{\begin{array}{l}(I)OA = O'A'(\Omega\varsigma\ \alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\varepsilon\varsigma\ \tau o\upsilon\ \acute{\iota}\delta\iota o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon)\\ (II)O\Gamma = O'\Gamma'(\Omega\varsigma\ \alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\varepsilon\varsigma\ \tau o\upsilon\ \acute{\iota}\delta\iota o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon)\\ (III)A\hat{O}\Gamma = A'\hat{O}\Gamma'(\Omega\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\nu)\end{array}\right\}$$

$O\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ O\overset{\triangle}{A}\Gamma = O'\overset{\triangle}{A'}\Gamma'(\Pi - \Gamma - \Pi).\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$A\Gamma = A'\Gamma'(3)\ \kappa\alpha\iota\ \Gamma\hat{A}O = \Gamma'\hat{A}'O(4)$

$A\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (2),(4)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left\{\begin{array}{l}B\hat{A}O = B'\hat{A}'O\\ \Gamma\hat{A}O = \Gamma'\hat{A}'O\end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} B\hat{A}O + \Gamma\hat{A}O = B'\hat{A}'O + \Gamma'\hat{A}'O$$

$$\overset{\substack{B\hat{A}O+\Gamma\hat{A}O=\hat{A}\\ B'\hat{A}'O+\Gamma'\hat{A}'O=\hat{A}'}}{\Longrightarrow} \hat{A} = \hat{A}'(5)$$

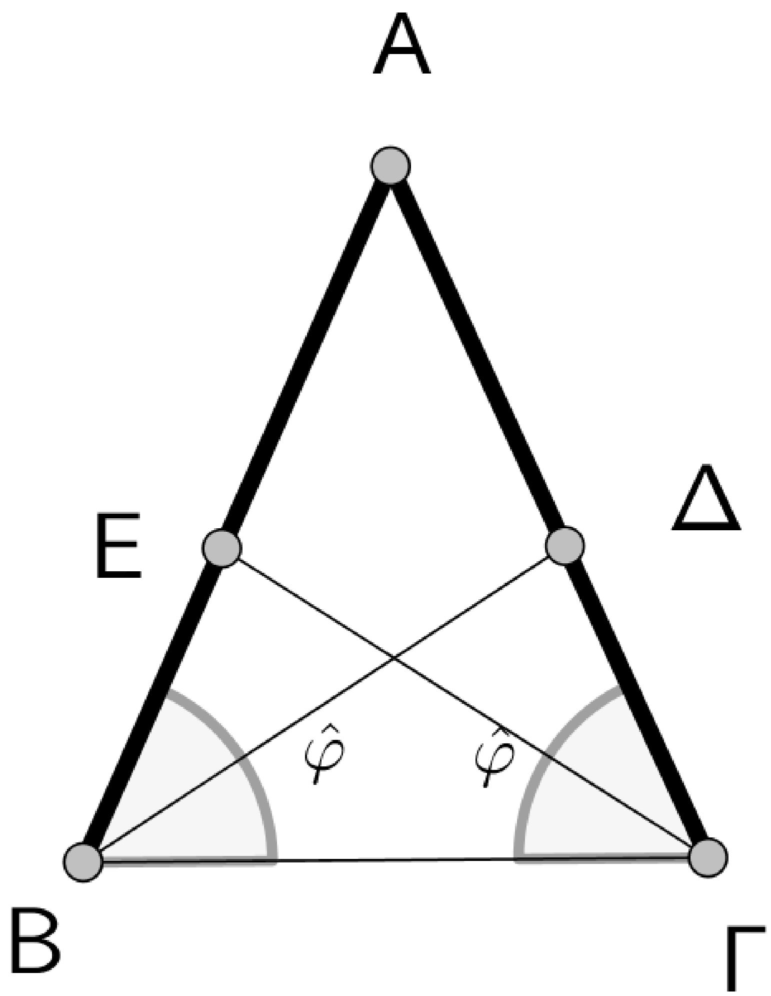
$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ A\overset{\triangle}{B}\Gamma\ \kappa\alpha\iota\ A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'.\ A\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\left\{\begin{array}{l}(I)AB = A'B'(1)\\ (II)A\Gamma = A'\Gamma'(3)\\ (III)B\hat{A}\Gamma = B'\hat{A}'\Gamma'(5)\end{array}\right\}$$

$O\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ A\overset{\triangle}{B}\Gamma = A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$

5.

| |
|---|
| *Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.* |




| ΥΠΟΘΕΣΗ | ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ |
|---|---|
| $AB = A\Gamma$<br>$B\Delta : \Delta\iota\chi o\tau \acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \hat{B}$<br>$\Gamma E : \Delta\iota\chi o\tau \acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \hat{\Gamma}$ | $B\Delta = \Gamma E$ |

$\Sigma\tau o\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ AB\Gamma\left(AB = A\Gamma\right)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega :$

$$A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = \hat{\varphi}(1)\begin{pmatrix}\Omega\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\varepsilon\varsigma\ \sigma\tau\eta\nu\ \beta\acute{\alpha}\sigma\eta \\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda o\acute{\upsilon}\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\end{pmatrix}$$

$E\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ B\Delta\ \delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ A\hat{B}\Gamma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega :$

$$A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{\varphi}}{2}(2)$$

$\text{Επειδή ΓΕ } \textit{διχοτόμος της } \hat{\text{ΑΓΒ}} \textit{ θα έχω}:$

$\hat{\text{ΑΓΕ}} = \hat{\text{ΕΓΒ}} = \frac{\hat{\varphi}}{2} (3)$

$\text{Απο τις σχέσεις } (2),(3) \text{ θα έχω}:$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\hat{\text{Β}}\Gamma = \frac{\hat{\varphi}}{2} \\ \text{Ε}\hat{\Gamma}\text{Β} = \frac{\hat{\varphi}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta\hat{\text{Β}}\Gamma = \text{Ε}\hat{\Gamma}\text{Β} (4)$$

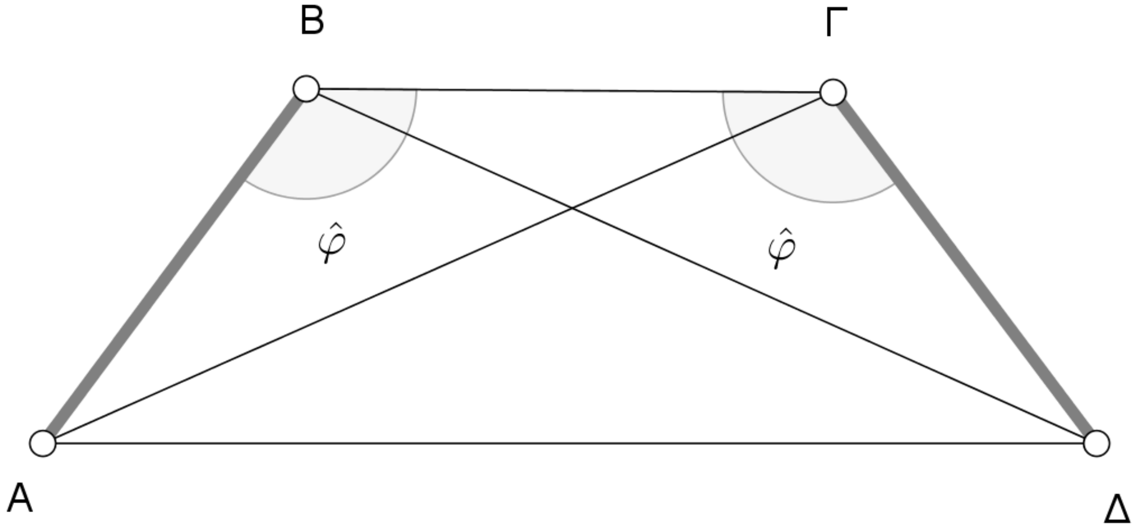
$\text{Συγκρίνω τα τρίγωνα } \text{Β}\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma \text{ και } \Gamma\overset{\Delta}{\text{Ε}}\text{Β}. \text{ Αυτά έχουν}:$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{I})\ \text{ΒΓ} = \text{ΒΓ} (\text{Ως κοινή πλευρά}) \\ (\text{II})\ \Delta\hat{\Gamma}\text{Β} = \text{Ε}\hat{\text{Β}}\Gamma (1) \\ (\text{III})\ \Delta\hat{\text{Β}}\Gamma = \text{Ε}\hat{\Gamma}\text{Β} (4) \end{array} \right\}$$

$\text{Οπότε } \text{Β}\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma = \Gamma\overset{\Delta}{\text{Ε}}\text{Β} (\Gamma - \Pi - \Gamma). \text{ Συνεπώς θα έχω } \text{Β}\Delta = \Gamma\text{Ε}$

6.

| |
|---|
| $\text{Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ} = \Gamma\Delta \text{ και } \hat{\text{Β}} = \hat{\Gamma}.$ <br> $\text{Να αποδειχθεί ότι } \hat{\text{Α}} = \hat{\Delta}$ |



| ΥΠΟΘΕΣΗ | ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ |
|---|---|
| $\mathrm{AB}=\Gamma\Delta, \hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}$ | $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\Delta}$ |

$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}\ \kappa\alpha\iota\ \overset{\Delta}{\Delta\Gamma\mathrm{B}}$. $\mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\epsilon}\chi o\upsilon\nu$ :

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \mathrm{AB}=\Gamma\Delta(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\ \mathrm{B\Gamma}=\mathrm{B\Gamma}(\mathrm{K}o\iota\nu\acute{\eta}\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha})\\(\mathrm{III})\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B}(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}=\overset{\Delta}{\Delta\Gamma\mathrm{B}}(\Pi\Gamma\Pi)$. $\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \mathrm{A\Gamma}=\mathrm{B}\Delta(1)$

$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \overset{\Delta}{\mathrm{AB}\Delta}\ \kappa\alpha\iota\ \overset{\Delta}{\Delta\Gamma\mathrm{A}}$. $\mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\epsilon}\chi o\upsilon\nu$ :

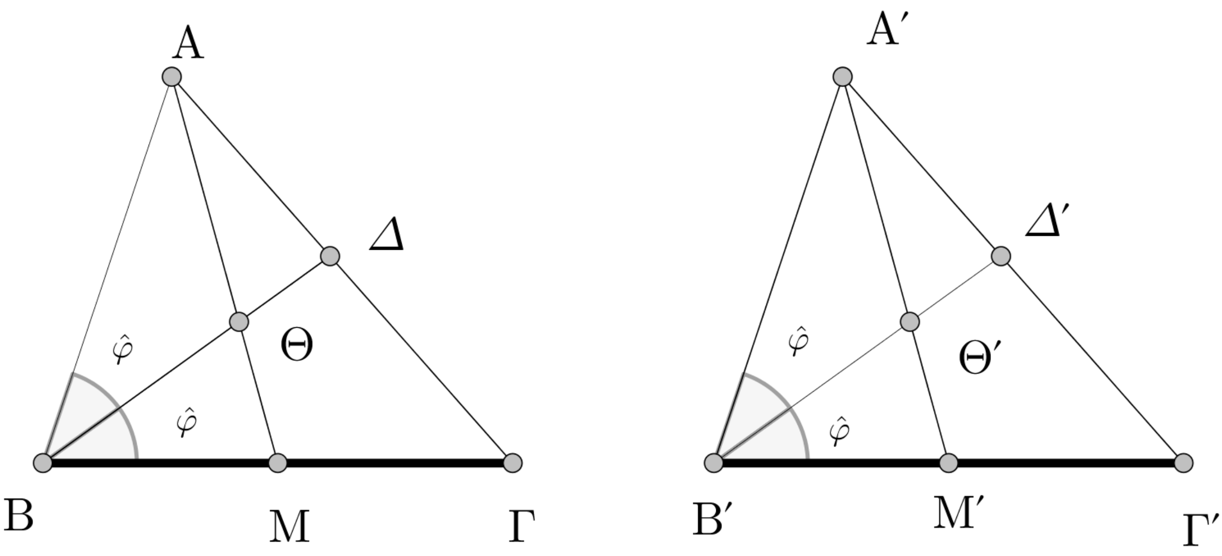
$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \mathrm{AB}=\Gamma\Delta(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\ \mathrm{A}\Delta=\mathrm{A}\Delta(\mathrm{K}o\iota\nu\acute{\eta}\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha})\\(\mathrm{III})\ \mathrm{B}\Delta=\mathrm{A\Gamma}(1)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \overset{\Delta}{\mathrm{AB}\Delta}=\overset{\Delta}{\Delta\Gamma\mathrm{A}}(\Pi\Pi\Pi)$. $\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \hat{\mathrm{A}}=\hat{\Delta}$

7.

| |
|---|
| *Θωρούμε δυο ίσα τρίγωνα* ΑΒΓ *και* Α′Β′Γ′. Η *διάμεσος* ΑΜ *και η διχοτόμος* ΒΔ *του* ΑΒΓ *τέμνονται στο* Θ, *ενώ η αντίστοιχη διάμεσος* Α′Μ′ *και η αντίστοιχη διχοτόμος* Β′Δ′ *του* Α′Β′Γ′ *τέμνονται στο* Θ′. Ν*α αποδείξετε ότι*: $(\mathrm{I})\ \mathrm{B}\Delta=\mathrm{B}'\Delta'\ (\mathrm{II})\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M}=\mathrm{B}'\hat{\mathrm{A}}'\mathrm{M}\ (\mathrm{III})\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Theta=\mathrm{A}'\hat{\mathrm{B}}'\Theta'\ (IV)\ \mathrm{A}\Theta=\mathrm{A}'\Theta', \Theta\Delta=\Theta'\Delta'$ |

| ΥΠΟΘΕΣΗ | ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ |
|---|---|
| $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}=\overset{\Delta}{\mathrm{A'B'\Gamma'}}$<br>Μ : Μ*έσο της* ΒΓ<br>ΒΔ : Δ*ιχοτόμος της* $\hat{\mathrm{B}}$<br>Μ′ : Μ*έσο της* Β′Γ′<br>Β′Δ′ : Δ*ιχοτόμος της* $\hat{\mathrm{B}}'$ | $(\mathrm{I})\ \mathrm{B}\Delta=\mathrm{B}'\Delta'$<br>$(\mathrm{II})\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M}=\mathrm{B}'\hat{\mathrm{A}}'\mathrm{M}$<br>$(\mathrm{III})\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Theta=\mathrm{A}'\hat{\mathrm{B}}'\Theta'$<br>$(IV)\ \mathrm{A}\Theta=\mathrm{A}'\Theta', \Theta\Delta=\Theta'\Delta'$ |




$(\mathrm{I})$Επειδή $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}} = \overset{\Delta}{\mathrm{A'B'\Gamma'}}$ *θα έχω*:

$\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{B}}'(1)$, $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}'(2)$, $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}(3)$ *και* $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{B'\Gamma'}(4)$

Επειδή $\mathrm{B\Delta}$ *διχοτόμος της* $\hat{\mathrm{B}}$ *θα έχω*:

$$\mathrm{\Delta\hat{B}A} = \mathrm{\Delta\hat{B}\Gamma} = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}(5)$$

Επειδή $\mathrm{B'\Delta'}$ *διχοτόμος της* $\hat{\mathrm{B}}'$ *θα έχω*:

$$\mathrm{\Delta'\hat{B}'A'} = \mathrm{\Delta'\hat{B}'\Gamma'} = \frac{\hat{\mathrm{B}}'}{2}(6)$$

Απο *τις σχέσεις* $(1),(5),(6)$ *θα έχω*:

$$\left.\begin{cases} \mathrm{\Delta\hat{B}A} = \dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{2} \\ \mathrm{\Delta'\hat{B}'A'} = \dfrac{\hat{\mathrm{B}}'}{2} \\ \hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{B}}' \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{\Delta\hat{B}A} = \mathrm{\Delta'\hat{B}'A'}(7)(\Omega\varsigma \textit{ μισά ίσων γωνιών})$$

*Συγκρίνω τα τρίγωνα* $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Delta}}$ *και* $\overset{\triangle}{\mathrm{A'B'\Delta'}}$. *Αυτά έχουν* :

$$\begin{cases} (\mathrm{I})\ \mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}(3) \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{B\hat{A}\Delta} = \mathrm{B'\hat{A}'\Delta'}(1) \\ (\mathrm{III})\ \mathrm{\Delta\hat{B}A} = \mathrm{\Delta'\hat{B}'A'}(7) \end{cases}$$

*Οπότε* $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Delta}} = \overset{\triangle}{\mathrm{A'B'\Delta'}}(\Gamma - \Pi - \Gamma)$. *Συνεπώς θα έχω* :

$\mathrm{B\Delta} = \mathrm{B'\Delta'}(8)$

(ΙΙ)*Επειδή* Μ *μέσο της* ΒΓ *θα έχω* :

$$\mathrm{BM} = \mathrm{M\Gamma} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}(9)$$

*Επειδή* Μ′ *μέσο της* Β′Γ′ *θα έχω* :

$$\mathrm{B'M'} = \mathrm{M'\Gamma'} = \frac{\mathrm{B'\Gamma'}}{2}(10)$$

*Απο τις σχέσεις* (4),(9),(10) *θα έχω* :

$$\begin{cases} \mathrm{BM} = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2} \\ \mathrm{B'M'} = \dfrac{\mathrm{B'\Gamma'}}{2} \\ \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{B'\Gamma'} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{BM} = \mathrm{B'M'}(11)(\Omega\varsigma\ \mu\iota\sigma\acute{\alpha}\ \acute{\iota}\sigma\omega\nu\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}\nu)$$

*Συγκρίνω τα τρίγωνα* $\overset{\triangle}{\mathrm{BAM}}$ *και* $\overset{\triangle}{\mathrm{B'A'M'}}$. *Αυτά έχουν* :

$$\begin{cases} (\mathrm{I})\ \mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}(3) \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{A\hat{B}M} = \mathrm{A'\hat{B}'M'}(1) \\ (\mathrm{III})\ \mathrm{BM} = \mathrm{B'M'}(11) \end{cases}$$

*Οπότε* $\overset{\triangle}{\mathrm{BAM}} = \overset{\triangle}{\mathrm{B'A'M'}}(\Pi - \Gamma - \Pi)$. *Συνεπώς θα έχω* :

$\mathrm{B\hat{A}M} = \mathrm{B'\hat{A}'M}(12)$

$(III)$ *Συγκρίνω τα τρίγωνα* $\overset{\triangle}{AB\Theta}$ *και* $\overset{\triangle}{A'B'\Theta'}$. *Αυτά έχουν*:

$$\begin{cases} (I)\ AB = A'B'(3) \\ (II)\ B\hat{A}\Theta = B'\hat{A'}\Theta'(12) \\ (III)\ A\hat{B}\Theta = A'\hat{B'}\Theta'(7) \end{cases}$$

*Οπότε* $\overset{\triangle}{AB\Theta} = \overset{\triangle}{A'B'\Theta'}(\Gamma - \Pi - \Gamma)$

$(IV)$ *Επειδή* $\overset{\triangle}{AB\Theta} = \overset{\triangle}{A'B'\Theta'}$ *θα έχω*:

$A\Theta = A'\Theta'$ *και* $B\Theta = B'\Theta'(13)$

*Απο τις σχέσεις* $(8)$ *και* $(13)$ *θα έχω*:

$$\left.\begin{matrix} B\Delta = B'\Delta' \\ B\Theta = B'\Theta' \end{matrix}\right\} \overset{(-)}{\Longrightarrow} B\Delta - B\Theta = B'\Delta' - B'\Theta' \overset{\substack{B\Delta - B\Theta = \Delta\Theta \\ B'\Delta' - B'\Theta' = \Delta'\Theta'}}{\Longrightarrow}$$

$\Delta\Theta = \Delta'\Theta'$ (*Ως διαφορά ίσων ευθυγράμμων τμημάτων*)

8.

*Έστω ισοσκελές τρίγωνο* $AB\Gamma\,(AB = A\Gamma)$. *Η μεσοκάθετος της πλευράς* $A\Gamma$ *τέμνει την προέκταση της* $\Gamma B$ *στο* $\Delta$. *Να αποδείξετε ότι*:

$(I)$ *το τρίγωνο* $\Delta A\Gamma$ *είναι ισοσκελές*

$(II)$ *το τρίγωνο* $\Gamma\Delta E$ *είναι επίσης ισοσκελές*

| ΥΠΟΘΕΣΗ | ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ |
|---|---|
| $AB = A\Gamma$<br>$(\varepsilon)$: *Μεσοκάθετος της* $A\Gamma$ | $(I)\ \Delta A = \Delta\Gamma$<br>$(II)\ \Gamma E = \Delta A$ |

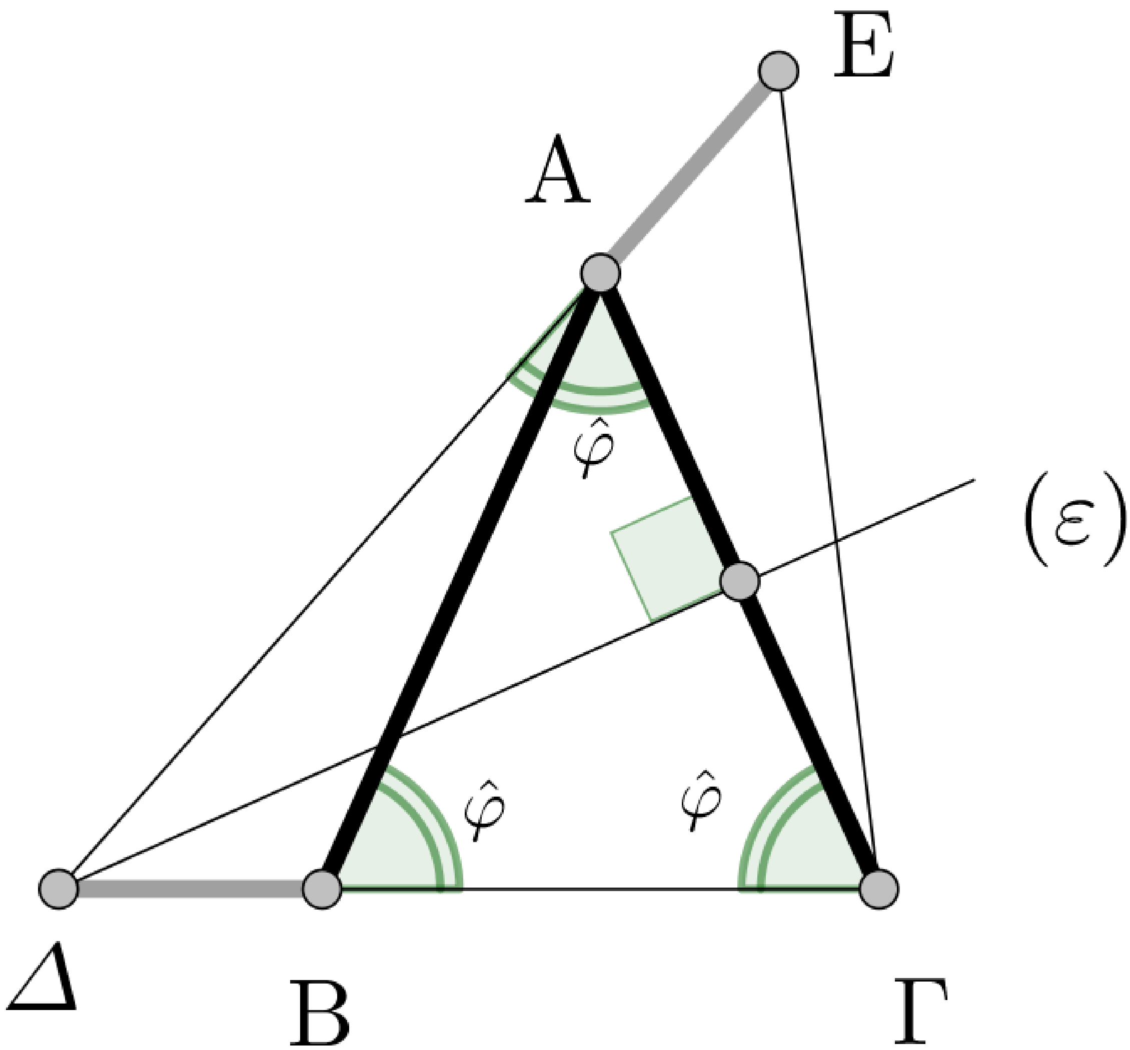
$(I)$ *Επειδή* $(\varepsilon)$ *είναι η μεσοκάθετος της* $A\Gamma$ *θα έχω*:

$\Delta A = \Delta\Gamma(1)$ (*Γιατί κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει απο τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος*)

*Συνεπώς το τρίγωνο* $\Delta A\Gamma$ *είναι ισοσκελές*

$(II)$ *Στο ισοσκελές τρίγωνο* $\Delta A\Gamma\,(\Delta A = \Delta\Gamma)$ *θα έχω*:

$\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}A = \hat{\varphi}(2)$ (*Ως προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου*)




*Στο ισοσκελές τρίγωνο* ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) *θα έχω*:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \hat{\varphi}\,(3)\left(\begin{array}{l}\textit{Ως προσκείμενες γωνίες στη βάση} \\ \textit{ισοσκελούς τριγώνου}\end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = 180^0 - \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 180^0 - \hat{\varphi} \\ \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 180^0 - \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{A} = 180^0 - \hat{\varphi}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \Gamma\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\,(4)\,(\textit{Ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών})$$

*Συγκρίνω τα τρίγωνα* $\mathrm{B}\overset{\triangle}{\Delta}\mathrm{A}$ *και* $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{E}}\Gamma$. Α*υτά έχουν*:

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{B\Delta}=\mathrm{AE}\left(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta\right)\\(\mathrm{II})\,\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}\left(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta\right)\\(\mathrm{III})\,\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{\Delta}=\mathrm{\Gamma A}\hat{\mathrm{E}}(4)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{B}\overset{\triangle}{\Delta}\mathrm{A}=\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{E}}\Gamma\left(\Pi-\Gamma-\Pi\right).\ \Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \Gamma\mathrm{E}=\mathrm{A}\Delta(5)$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (1),(5)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\mathrm{A}=\Delta\Gamma\\\Delta\mathrm{A}=\Gamma\mathrm{E}\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta\Gamma=\Gamma\mathrm{E}$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \Gamma\Delta\mathrm{E}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma.$

9.

*Δυο τμήματα* ΑΒ *και* ΓΔ, *που δεν έχουν τον ίδιο φορέα, έχουν την ίδια μεσοκάθετο* $(\varepsilon)$. *Αν η* $(\varepsilon)$ *και η μεσοκάθετος του* ΑΓ *τέμνονται, να αποδείξετε ότι απο το σημείο τομής τους διέρχεται και η μεσοκάθετος του* ΒΔ.

| ΥΠΟΘΕΣΗ | ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ |
|---|---|
| $(\varepsilon)$: Κ*οινή μεσοκάθετος των* ΑΒ, ΓΔ<br>$(\eta)$: Η *μεσοκάθετος του* ΑΓ | ΒΕ = ΕΔ |

Ε*πειδή* $(\varepsilon)$ *η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος* ΑΒ

*θα έχω*:

$\mathrm{EA}=\mathrm{EB}(1)$

Ε*πειδή* $(\varepsilon)$ *η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος* ΑΒ

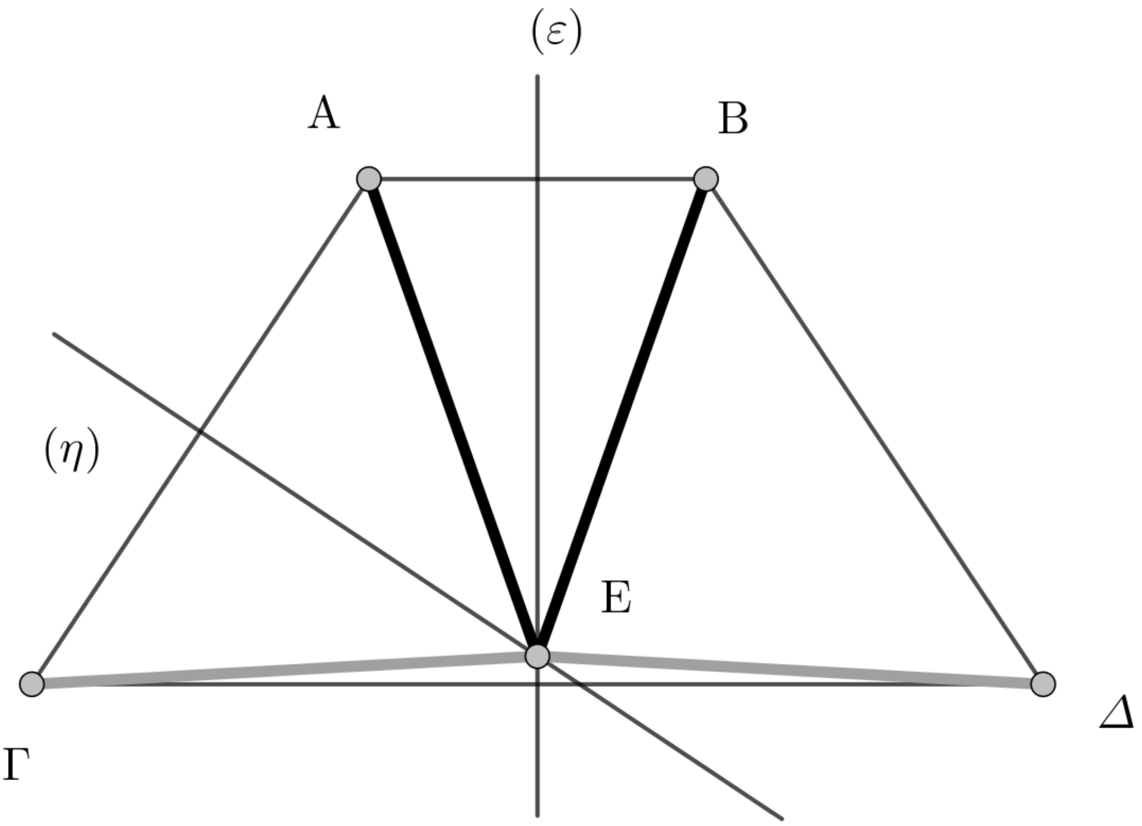
*θα έχω*:

$\mathrm{E}\Gamma=\mathrm{E}\Delta(2)$

*Έστω* $(\eta)$ *η μεσοκάθετος του* ΑΓ *τότε θα έχω*:

$\mathrm{EA}=\mathrm{E}\Gamma(3)$

Α*πο τις σχέσεις* $(1),(3)$ *έχω*:




$$\left.\begin{cases} \mathrm{EA} = \mathrm{EB} \\ \mathrm{EA} = \mathrm{E\Gamma} \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{EB} = \mathrm{E\Gamma}\,(4)$$

Α*πο τις σχέσεις* $(2),(4)$ *θα έχω*:

$$\left.\begin{cases} \mathrm{E\Gamma} = \mathrm{E\Delta} \\ \mathrm{E\Gamma} = \mathrm{EB} \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{E\Delta} = \mathrm{EB}$$

*Άρα το σημείο* Ε *ισαπέχει απο τα άκρα του ευθυγράμμου τμηματος* ΔΒ. *Συνεπώς ανήκει στην μεσοκάθετο του* ΔΒ