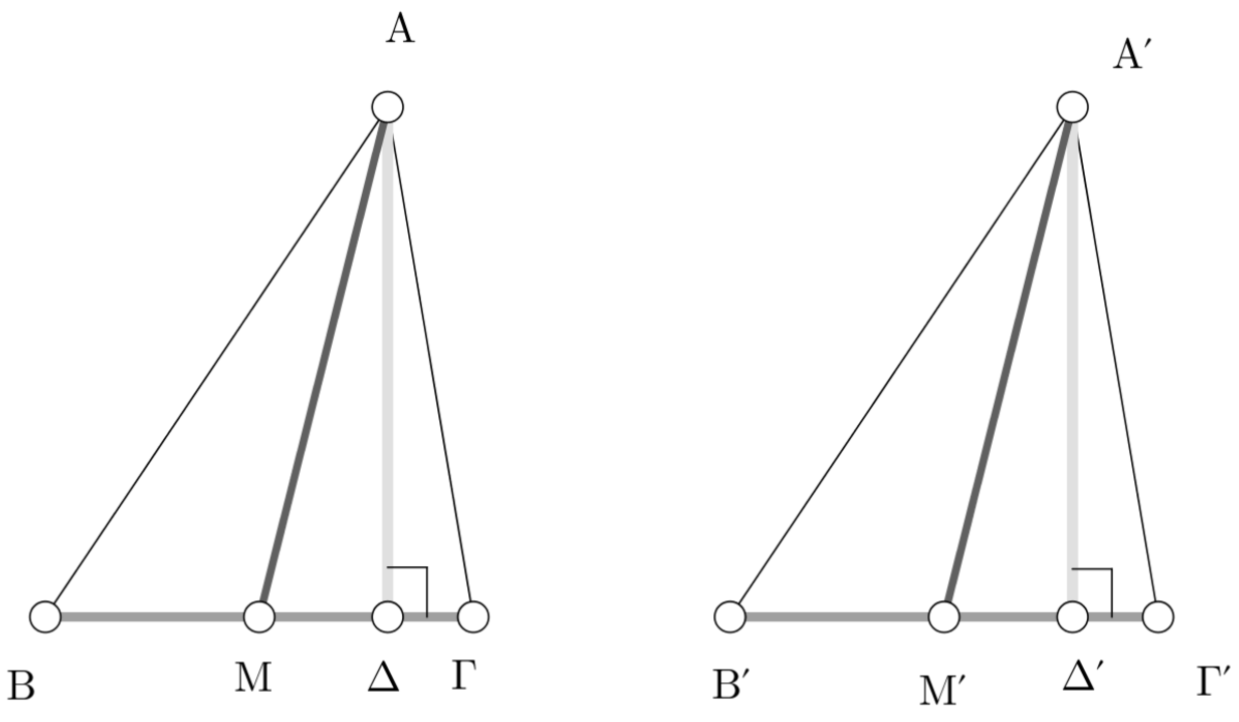
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

1.

Ν*α αποδείξετε ότι αν σε δυο τρίγωνα* ΑΒΓ *και* Α′Β′Γ′ *είναι* $\alpha = \alpha', \upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$ *και* $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$, *τότε τρίγωνα είναι ίσα*

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{B\Gamma = B'\Gamma', A\Delta \perp B\Gamma, A'\Delta' \perp B'\Gamma', A\Delta = A'\Delta', AM = A'M'}$ M : Μ*έσο της* ΒΓ, Μ′ : Μ*έσο της* Β′Γ′	$\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}} = \overset{\Delta}{\mathrm{A'B'\Gamma'}}$



$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ o\rho\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \overset{\Delta}{\mathrm{AM\Delta}}\ \kappa\alpha\iota\ \overset{\Delta}{\mathrm{A'M'\Delta'}}\left(\hat{\Delta}=\hat{\Delta}'=90^0\right).\mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\begin{cases}(\mathrm{I})\ \mathrm{AM}=\mathrm{A'M'}(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\ \mathrm{A\Delta}=\mathrm{A'\Delta'}(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\end{cases}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \overset{\Delta}{\mathrm{AM\Delta}}=\overset{\Delta}{\mathrm{A'M'\Delta'}}.\ \Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \mathrm{A\hat{M}\Delta}=\mathrm{A'\hat{M}'\Delta'}(1)$

$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \overset{\Delta}{\mathrm{AM\Gamma}}\ \kappa\alpha\iota\ \overset{\Delta}{\mathrm{A'M'\Gamma'}}.\mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\begin{cases}(\mathrm{I})\ \mathrm{AM}=\mathrm{A'M'}(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\ \mathrm{A\hat{M}\Gamma}=\mathrm{A'\hat{M}'\Gamma'}(1)\\(\mathrm{III})\ \mathrm{M\Gamma}=\mathrm{M'\Gamma'}(\Omega\varsigma\ \mu\iota\sigma\acute{\alpha}\ \acute{\iota}\sigma\omega\nu\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}\nu)\end{cases}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \overset{\Delta}{\mathrm{AM\Gamma}}=\overset{\Delta}{\mathrm{A'M'\Gamma'}}(\Pi\Gamma\Pi).\ \Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \mathrm{A\Gamma}=\mathrm{A'\Gamma'}(2),\ \hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'(3)$

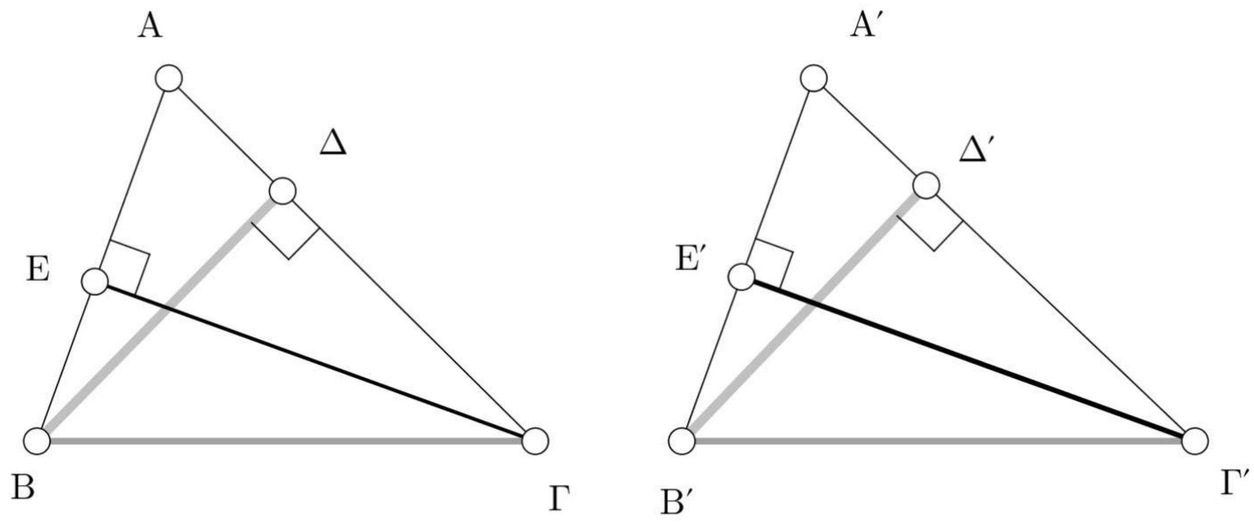
$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}\ \kappa\alpha\iota\ \overset{\Delta}{\mathrm{A'B'\Gamma'}}.\ \mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\begin{cases}(\mathrm{I})\ \mathrm{B\Gamma}=\mathrm{B'\Gamma'}(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\ \mathrm{A\Gamma}=\mathrm{A'\Gamma'}(2)\\(\mathrm{III})\ \hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'(3)\end{cases}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}=\overset{\Delta}{\mathrm{A'B'\Gamma'}}(\Pi\Gamma\Pi)$

2.

$\mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ \alpha\nu\ \sigma\varepsilon\ \delta\upsilon o\ o\xi\upsilon\gamma\acute{\omega}\nu\iota\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \mathrm{AB\Gamma}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{A'B'\Gamma'}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \alpha=\alpha'$
$\upsilon_\beta=\upsilon_{\beta'}\ \kappa\alpha\iota\ \upsilon_\gamma=\upsilon_{\gamma'}$, $\tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma\alpha$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{B'\Gamma'},\mathrm{B\Delta}\perp\mathrm{A\Gamma},\mathrm{\Gamma E}\perp\mathrm{AB},\mathrm{B'\Delta'}\perp\mathrm{A'\Gamma'},\mathrm{\Gamma'E'}\perp\mathrm{A'B'}$ $\mathrm{B\Delta}=\mathrm{B'\Delta'}$, $\mathrm{\Gamma E}=\mathrm{\Gamma'E'}$	$\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}=\overset{\Delta}{\mathrm{A'B'\Gamma'}}$

$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ o\rho\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \mathrm{B}\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{B}'\overset{\Delta}{\Delta}'\Gamma'\left(\hat{\Delta}=\hat{\Delta}'=90^0\right).\mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\begin{cases}(\mathrm{I})\,\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{B'\Gamma'}\,(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\,\mathrm{B\Delta}=\mathrm{B'\Delta'}\,(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\end{cases}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{B}\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma=\mathrm{B}'\overset{\Delta}{\Delta}'\Gamma'.\ \Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'\,(1)$

$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ o\rho\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \mathrm{B}\overset{\Delta}{\mathrm{E}}\Gamma\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{B}'\overset{\Delta}{\mathrm{E}}'\Gamma'\left(\hat{\mathrm{E}}=\hat{\mathrm{E}}'=90^0\right).\mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\begin{cases}(\mathrm{I})\,\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{B'\Gamma'}\,(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\,\mathrm{\Gamma E}=\mathrm{\Gamma'E'}\,(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\end{cases}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{B}\overset{\Delta}{\mathrm{E}}\Gamma=\mathrm{B}'\overset{\Delta}{\mathrm{E}}'\Gamma'.\ \Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \hat{\mathrm{B}}=\hat{\mathrm{B}}'\,(2)$

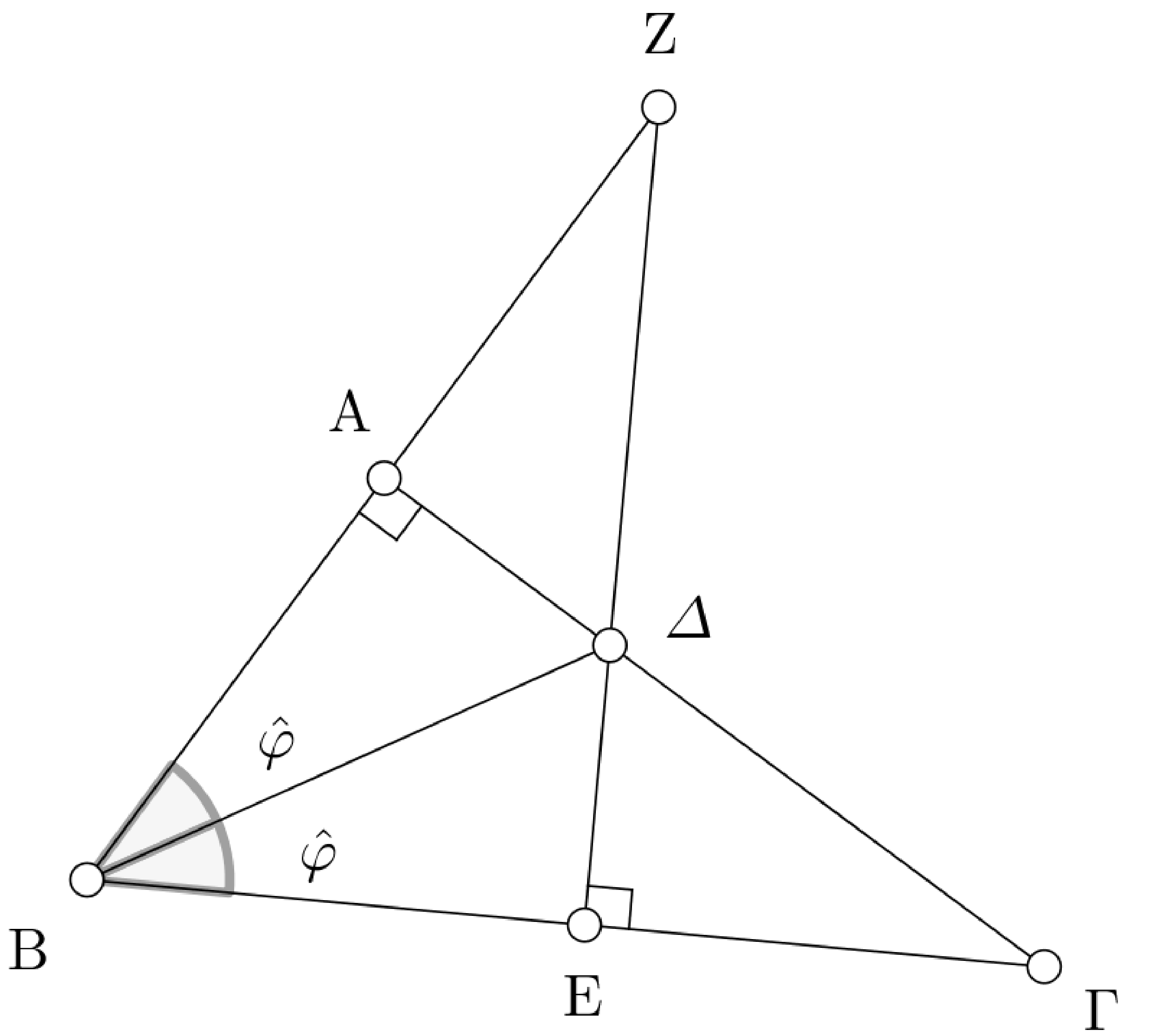
$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{A}'\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma'.\mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\begin{cases}(\mathrm{I})\,\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}\,(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\,\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'\,(1)\\(\mathrm{III})\,\hat{\mathrm{B}}=\hat{\mathrm{B}}'\,(2)\end{cases}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma=\mathrm{A}'\overset{\Delta}{\mathrm{B}}'\Gamma'\,(\Gamma\Pi\Gamma)$

3.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ o\rho\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{AB\Gamma}\left(\hat{\mathrm{A}}=90^0\right)\kappa\alpha\iota\ \eta\ \delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau o\upsilon\ \mathrm{B\Delta}.\ \mathrm{A}\pi\acute{o}\ \tau o$ $\Delta\ \varphi\acute{\varepsilon}\rho\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \Delta\mathrm{E}\perp\mathrm{B\Gamma},\ \pi o\upsilon\ \tau\acute{\varepsilon}\mu\nu\varepsilon\iota\ \tau\eta\nu\ \mathrm{AB}\ \sigma\tau o\ \mathrm{Z}.\ \mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ o\tau\iota\ \tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o$ $\mathrm{B\Gamma Z}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\hat{A} = 90^0, B\Delta : \Delta\iota\chi o\tau \acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \hat{B}, \Delta E \perp B\Gamma$	$BZ = \Gamma E$

$\text{Επειδή ΒΔ διχοτόμος της } \hat{\mathrm{B}}, \mathrm{ΔΕ} \perp \mathrm{ΒΓ}, \mathrm{ΔΑ} \perp \mathrm{ΒΑ} \text{ θα έχω } \mathrm{ΔΕ} = \mathrm{ΔΑ}\,(1)$

(Γιατί κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει απο τις πλευρές της γωνίας)

Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{Δ}\overset{\Delta}{\mathrm{A}}\mathrm{Z}$ και $\mathrm{Δ}\overset{\Delta}{\mathrm{E}}\mathrm{Γ}\left(\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{E}} = 90^0\right)$. Αυτά έχουν:

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \mathrm{AΔ} = \mathrm{AE}\,(1)\\ (\mathrm{II})\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Δ} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{Δ}}\mathrm{Γ}\,(\text{Ως κατακορυφήν})\end{array}\right\}$$

Οπότε $\mathrm{Δ}\overset{\Delta}{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = \mathrm{Δ}\overset{\Delta}{\mathrm{E}}\mathrm{Γ}$. Συνεπώς $\boxed{\mathrm{AZ} = \mathrm{EΓ}}\,(2)$

Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\mathrm{Δ}$ και $\mathrm{E}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\mathrm{Δ}\left(\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{E}} = 90^0\right)$. Αυτά έχουν:

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \mathrm{ΔA} = \mathrm{ΔE}\,(1)\\ (\mathrm{II})\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Δ} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Δ}\left(\text{Γιατι ΒΔ διχοτόμος της } \hat{\mathrm{B}}\right)\end{array}\right\}$$

Οπότε $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\mathrm{Δ} = \mathrm{E}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\mathrm{Δ}$. Συνεπώς $\boxed{\mathrm{AB} = \mathrm{BE}}\,(3)$

Απο τις σχέσεις $(2),(3)$ θα έχω:

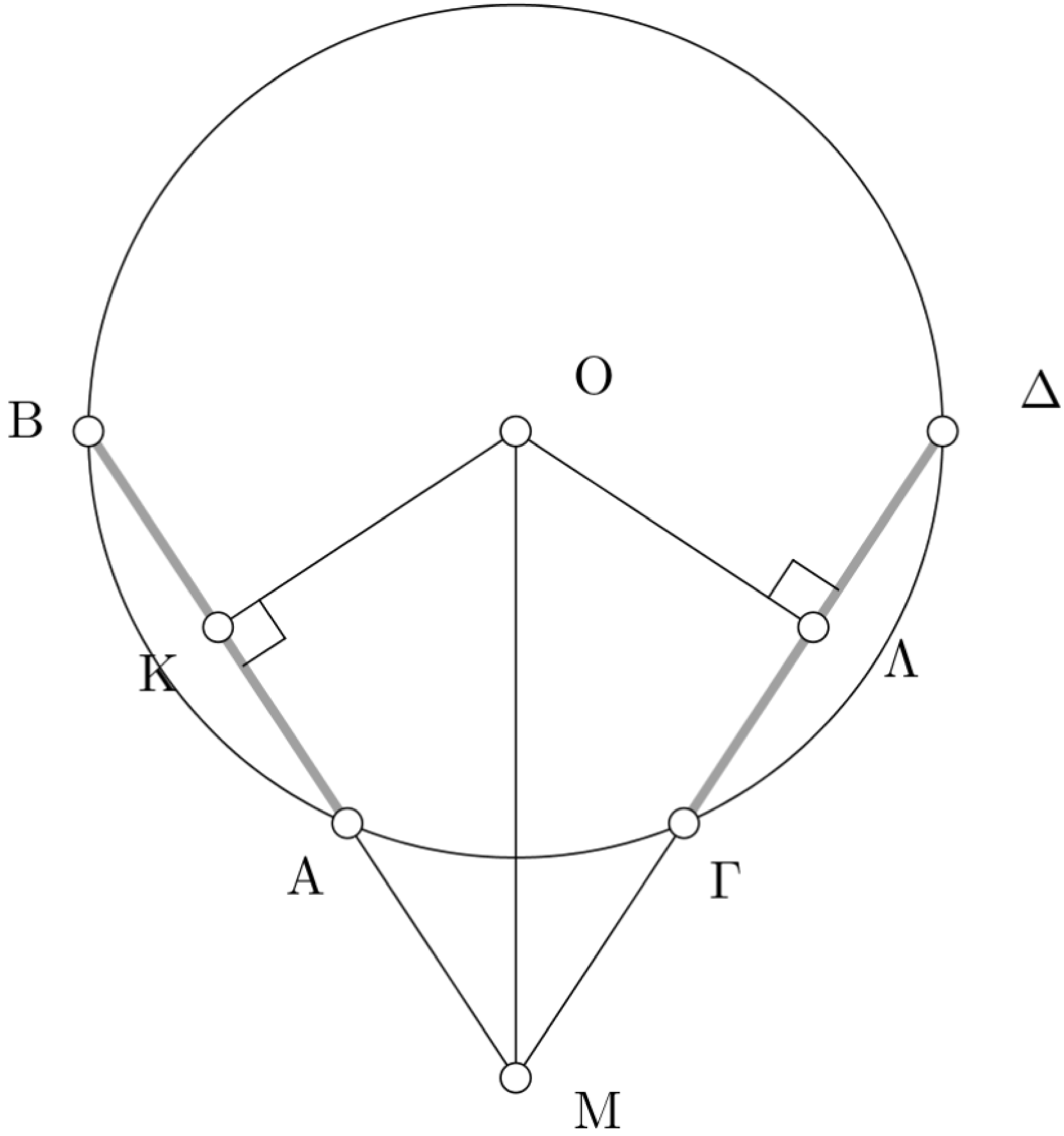
$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AZ} = \mathrm{EΓ}\\ \mathrm{AB} = \mathrm{BE}\end{array}\right\}(+)$$

$$\underbrace{\mathrm{AZ} + \mathrm{AB}}_{\mathrm{BZ}} = \underbrace{\mathrm{EΓ} + \mathrm{BE}}_{\mathrm{BΓ}} \Rightarrow \mathrm{BZ} = \mathrm{BΓ}$$

Συνεπώς το τρίγωνο $\mathrm{BΓZ}\,(\mathrm{BZ} = \mathrm{BΓ})$ είναι ισοσκελές

4.

Δίνεται κύκλος (O, R), οι ίσες χορδές του ΑΒ, ΓΔ και τα αποστήματα τους ΟΚ και ΟΛ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΒΑ και ΔΓ τέμνονται στο M, να αποδείξετε ότι:
(i) τα τρίγωνα ΜΟΚ και ΜΟΛ είναι ίσα
(ii) $\mathrm{MA} = \mathrm{MΓ}$ και $\mathrm{MB} = \mathrm{MΔ}$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$AB = \Gamma\Delta, OK \perp AB, O\Lambda \perp \Delta\Gamma$	$(i)\, \overset{\Delta}{MOK} = \overset{\Delta}{MO\Lambda}\, (ii)\, MA = M\Gamma,\ MB = M\Delta$

(i) *Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα* $\overset{\triangle}{\mathrm{MOK}} = \overset{\triangle}{\mathrm{MO\Lambda}}\left(\hat{\mathrm{K}} = \hat{\Lambda} = 90^0\right)$. *Αυτά έχουν* :

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \mathrm{OM} = \mathrm{OM}\,(\textit{Ως κοινή πλευρά}) \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{OK} = \mathrm{O\Lambda}\,(\textit{Ως αποστήματα που αντιστοιχούν σε ίσες χορδές})\end{array}\right\}$$

Οπότε $\overset{\triangle}{\mathrm{MOK}} = \overset{\triangle}{\mathrm{MO\Lambda}}$

(ii) *Επειδή* $\overset{\triangle}{\mathrm{MOK}} = \overset{\triangle}{\mathrm{MO\Lambda}}$ *θα έχω* $\boxed{\mathrm{MK} = \mathrm{M\Lambda}}\,(1)$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{OAB}(\mathrm{OA} = \mathrm{OB})$ *το* OK *είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση του* AB. *Άρα* OK *δίαμεσος του* $\mathrm{OAB}(\mathrm{OA} = \mathrm{OB})$ *(Ως ύψος που αντιστοιχεί στην βάση ισοσκελούς τριγώνου).Οπότε* :

$$\mathrm{AK} = \mathrm{BK} = \frac{\mathrm{AB}}{2}\,(2)$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{O\Gamma\Delta}(\mathrm{O\Gamma} = \mathrm{O\Delta})$ *το* ΟΛ *είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση του* ΓΔ. *Άρα* ΟΛ *δίαμεσος του* $\mathrm{O\Delta\Gamma}(\mathrm{O\Delta} = \mathrm{O\Gamma})$ *(Ως ύψος που αντιστοιχεί στην βάση ισοσκελούς τριγώνου).Οπότε* :

$$\Gamma\Lambda = \Lambda\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}\,(3)$$

Επειδή $\mathrm{AB} = \Gamma\Delta$ *απο τις σχέσεις* $(2),(3)$ *θα έχω* :

$$\boxed{\mathrm{AK} = \mathrm{BK} = \Gamma\Lambda = \Lambda\Delta}\,(4)$$

Απο τις σχεσεις $(2),(4)$ *θα έχω* :

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{MK} = \mathrm{M\Lambda} \\ \mathrm{AK} = \Lambda\Gamma\end{array}\right\}(-)$$

$$\underbrace{\mathrm{MK} - \mathrm{AK}}_{\mathrm{MA}} = \underbrace{\mathrm{M\Lambda} - \Lambda\Gamma}_{\mathrm{M\Gamma}} \Rightarrow \mathrm{MA} = \mathrm{M\Gamma}$$

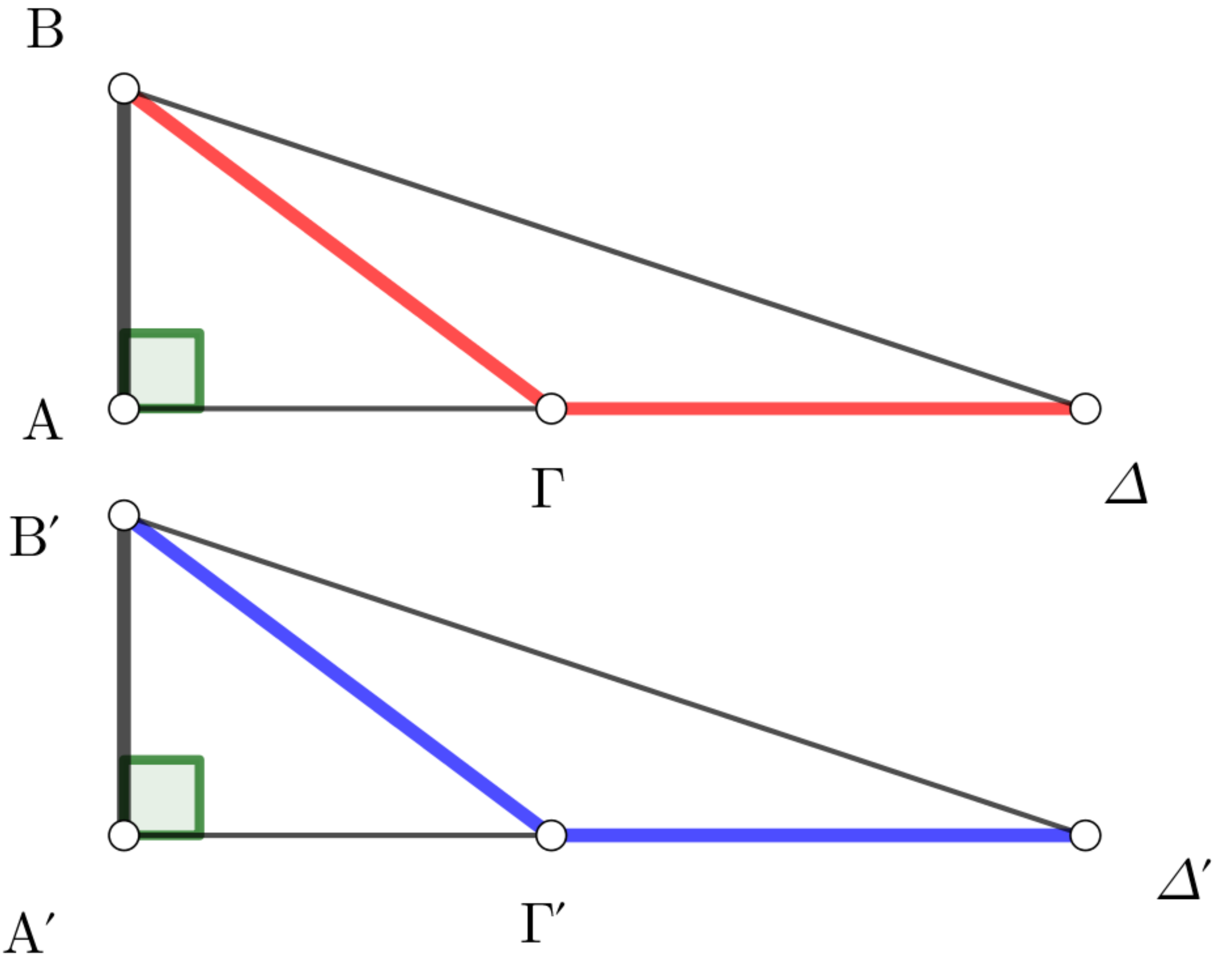
$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{MK} = \mathrm{M\Lambda} \\ \mathrm{BK} = \Lambda\Delta\end{array}\right\}(+)$$

$$\underbrace{\mathrm{MK} + \mathrm{BK}}_{\mathrm{MA}} = \underbrace{\mathrm{M\Lambda} + \Lambda\Delta}_{\mathrm{M\Gamma}} \Rightarrow \mathrm{MB} = \mathrm{M\Delta}$$

5.

Αν δυο ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{AB\Gamma}, \mathrm{A'B'\Gamma'}$ *έχουν μια κάθετη πλευρά ίση και η περίμετρος του ενός είναι με την περίμετρο του άλλου, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα*

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\hat{\mathrm{A}}' = \hat{\mathrm{A}} = 90^0, \mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$, $\mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \Gamma\mathrm{A} = \mathrm{A'B'} + \mathrm{B'\Gamma'} + \Gamma'\mathrm{A'}$	$\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{A'}\overset{\triangle}{\mathrm{B'}}\Gamma'$



$Aς\ υποθέσουμε\ οτι\ \mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}\ (1)$

$\mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{\Gamma A} = \mathrm{A'B'} + \mathrm{B'\Gamma'} + \mathrm{\Gamma'A'} \xRightarrow{\mathrm{AB=A'B'}} \cancel{\mathrm{A'B'}} + \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{\Gamma A} = \cancel{\mathrm{A'B'}} + \mathrm{B'\Gamma'} + \mathrm{\Gamma'A'}$

$\Rightarrow \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{\Gamma A} = \mathrm{B'\Gamma'} + \mathrm{\Gamma'A'}\ (2)$

$Στην\ προέκταση\ της\ \mathrm{A\Gamma}\ παίρνουμε\ σημείο\ \Delta\ τέτοιο\ ώστε\ \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{\Gamma\Delta}\ (3)$

$Στην\ προέκταση\ της\ \mathrm{A'\Gamma'}\ παίρνουμε\ σημείο\ \Delta'\ τέτοιο\ ώστε\ \mathrm{B'\Gamma'} = \mathrm{\Gamma'\Delta'}\ (4)$

$\mathrm{A\Delta} = \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma\Delta} \xRightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta=B\Gamma}} \mathrm{A\Delta} = \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{B\Gamma}\ (5)$

$\mathrm{A'\Delta'} = \mathrm{A'\Gamma'} + \mathrm{\Gamma'\Delta'} \xRightarrow{\mathrm{\Gamma'\Delta'=B'\Gamma'}} \mathrm{A'\Delta'} = \mathrm{A'\Gamma'} + \mathrm{B'\Gamma'}\ (6)$

$Aπο\ τις\ σχέσεις\ (2),(5),(6)\ έχω:$

$$\left.\begin{cases} \mathrm{A\Delta} = \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{B\Gamma} \\ \mathrm{A'\Delta'} = \mathrm{A'\Gamma'} + \mathrm{B'\Gamma'} \\ \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{\Gamma A} = \mathrm{B'\Gamma'} + \mathrm{\Gamma'A'} \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{A\Delta} = \mathrm{A'\Delta'}\ (7)$$

$Συγκρίνω\ τα\ ορθογώνια\ τρίγωνα\ \mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\mathrm{\Delta}\ και\ \mathrm{A'}\overset{\Delta}{\mathrm{B'}}\mathrm{\Delta'}\left(\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}' = 90^0\right)$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}(1)\\(\mathrm{II})\ \mathrm{A\Delta}=\mathrm{A'\Delta'}(7)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon:\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Delta=\mathrm{A'}\overset{\Delta}{\mathrm{B'}}\Delta'.\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \hat{\Delta}=\hat{\Delta}'=\hat{\varphi}(8)\ \kappa\alpha\iota\ \hat{\mathrm{B}}=\hat{\mathrm{B}}'=\hat{\omega}(9)$

$\Sigma\tau o\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{B\Gamma\Delta}(\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{\Gamma\Delta})\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{\Gamma}\hat{\mathrm{B}}\Delta=\hat{\Delta}=\hat{\varphi}$

$\acute{E}\chi\omega:\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\hat{\mathrm{B}}-\Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta=\hat{\omega}-\hat{\varphi}$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon:\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\hat{\omega}-\hat{\varphi}(10)$

$\Sigma\tau o\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{B'\Gamma'\Delta'}(\mathrm{B'\Gamma'}=\mathrm{\Gamma'\Delta'})\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{\Gamma'}\hat{\mathrm{B}}'\Delta'=\hat{\Delta}'=\hat{\varphi}$

$\acute{E}\chi\omega:\mathrm{A'}\hat{\mathrm{B}}'\Gamma'=\hat{\mathrm{B}}'-\Gamma'\hat{\mathrm{B}}'\Delta'=\hat{\omega}-\hat{\varphi}$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon:\mathrm{A'}\hat{\mathrm{B}}'\Gamma'=\hat{\omega}-\hat{\varphi}(11)$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (10),(11)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\hat{\omega}-\hat{\varphi}\\\mathrm{A'}\hat{\mathrm{B}}'\Gamma'=\hat{\omega}-\hat{\varphi}\end{array}\right\}\Rightarrow\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\mathrm{A'}\hat{\mathrm{B}}'\Gamma'(12)$$

$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ o\rho\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{A'}\overset{\Delta}{\mathrm{B'}}\Gamma'\left(\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{A}}'=90^0\right)$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}(1)\\(\mathrm{II})\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\mathrm{A'}\hat{\mathrm{B}}'\Gamma'(12)\end{array}\right\}$$

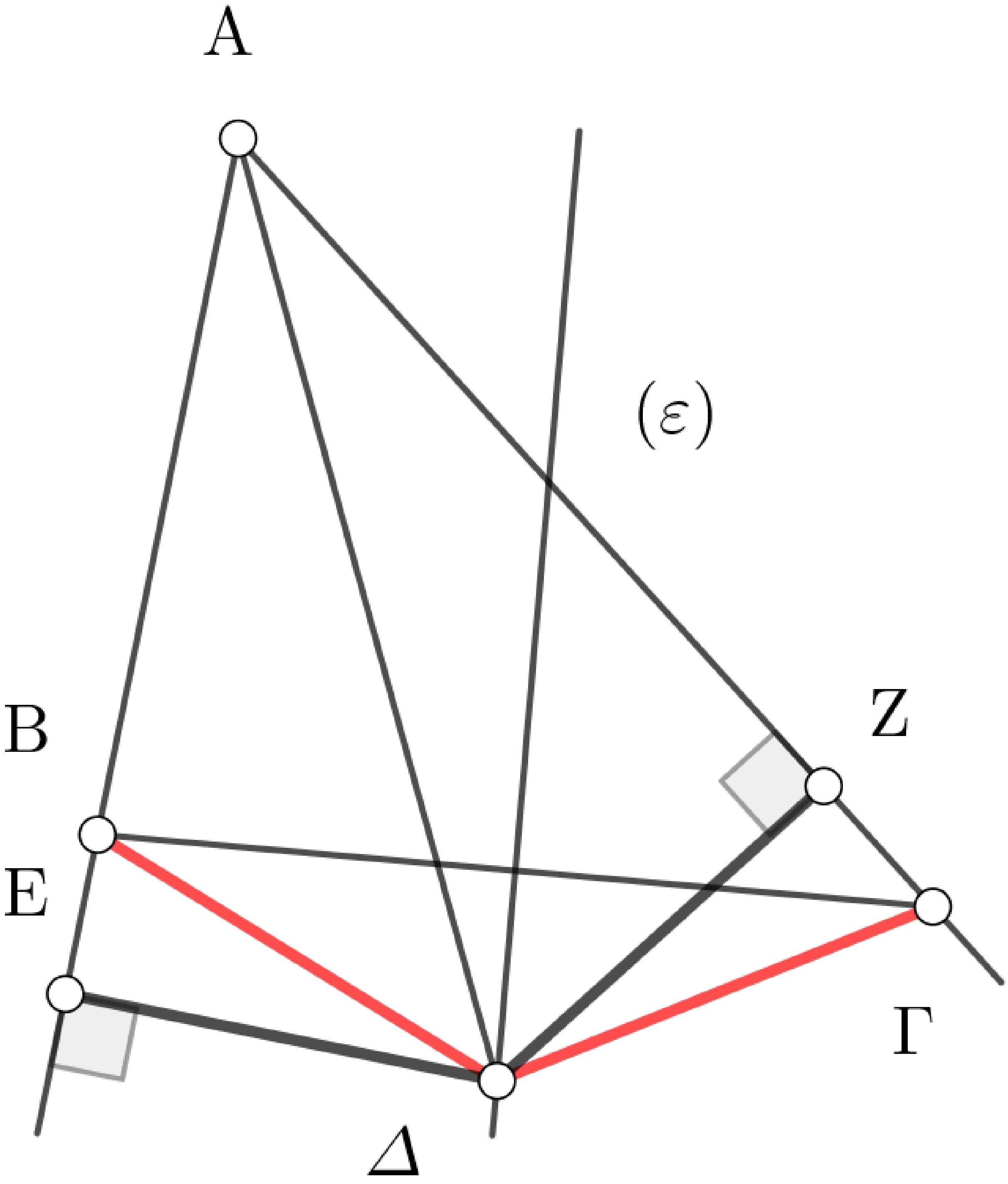
$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon:\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma=\mathrm{A'}\overset{\Delta}{\mathrm{B'}}\Gamma'$

6.

$\Theta\varepsilon\omega\rho o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{AB\Gamma}.\mathrm{H}\ \delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\varsigma\ \hat{\mathrm{A}}\ \tau\acute{\varepsilon}\mu\nu\varepsilon\iota\ \tau\eta\nu$ $\mu\varepsilon\sigma o\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B\Gamma}\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \Delta.\acute{E}\sigma\tau\omega\ \mathrm{E}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{Z}\ o\iota\ \pi\rho o\beta o\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau o\upsilon$ $\Delta\ \sigma\tau\iota\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\ \mathrm{AB}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{A\Gamma}\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi\alpha.$ $(\mathrm{I})\mathrm{N}\alpha\ \sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\varepsilon\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \Delta\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\mathrm{E}\ \kappa\alpha\iota\ \Delta\overset{\Delta}{\Gamma}\mathrm{Z}$ $(\mathrm{II})\mathrm{H}\ \delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\varsigma\ \hat{\mathrm{A}}_{\varepsilon\xi}\ \tau\acute{\varepsilon}\mu\nu\varepsilon\iota\ \tau\eta\nu\ \mu\varepsilon\sigma o\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B\Gamma}\ \sigma\tau o$ $\sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \Delta'.\acute{E}\sigma\tau\omega\ \mathrm{E'}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{Z'}\ o\iota\ \pi\rho o\beta o\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau o\upsilon\ \Delta'\ \sigma\tau\iota\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\ \mathrm{A'B'}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{A'\Gamma'}$ $\alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi\alpha.\mathrm{N}\alpha\ \sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\varepsilon\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \Delta'\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\mathrm{E'}\ \kappa\alpha\iota\ \Delta'\overset{\Delta}{\Gamma}\mathrm{Z'}$ $(\mathrm{III})\mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota\ \mathrm{EE'}=\mathrm{A\Gamma}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{ZZ'}=\mathrm{AB}$

(I)

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{A\Delta}:\Delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \hat{\mathrm{A}}$ $\Delta\mathrm{E}\perp\mathrm{AB},\Delta\mathrm{Z}\perp\mathrm{A\Gamma}$	$\Delta\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\mathrm{E}=\Delta\overset{\Delta}{\Gamma}\mathrm{Z}$


A
(ε)
B
Z
E
Γ
Δ

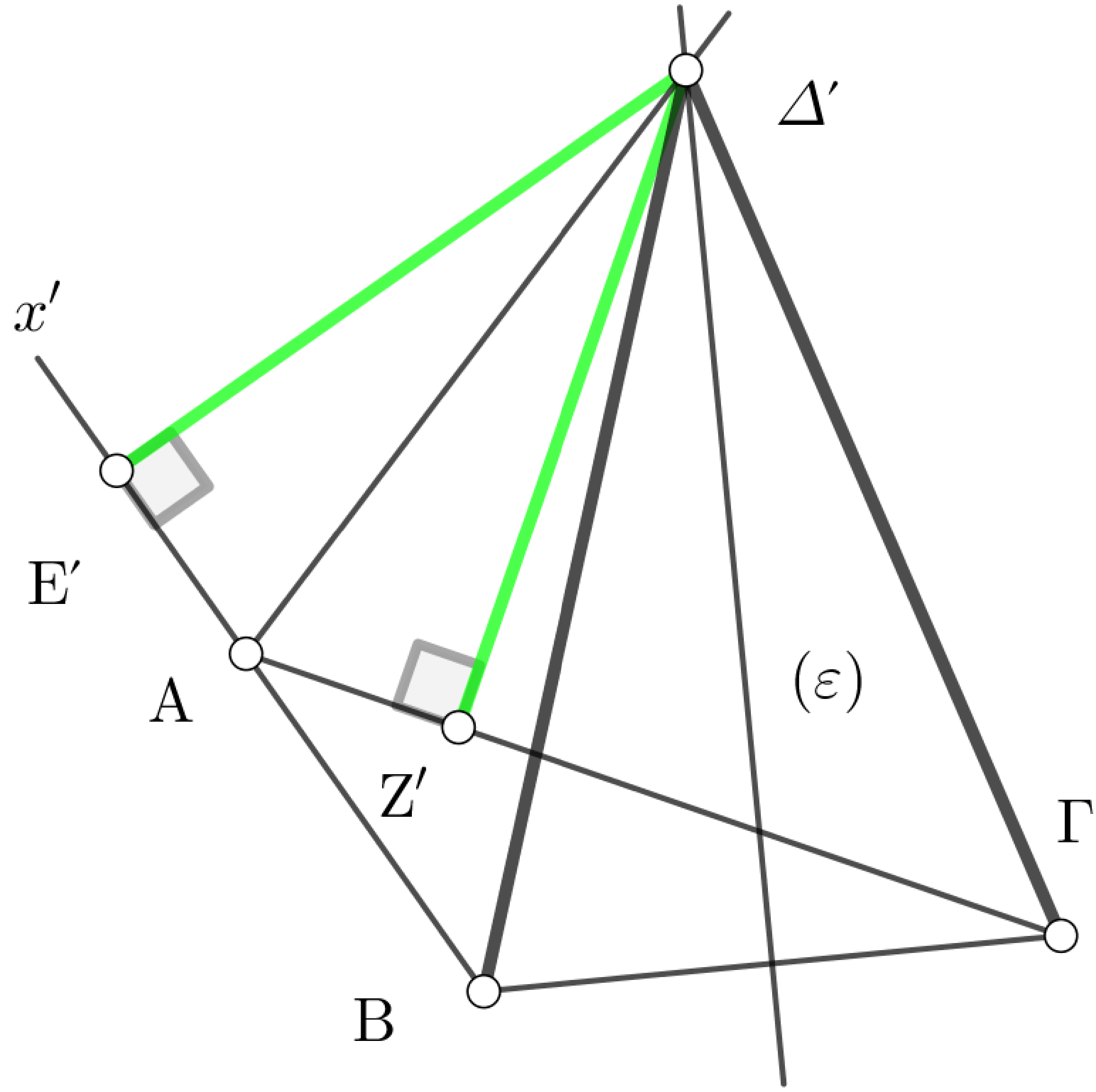
$$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ o\rho\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \Delta\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\mathrm{E}\ \kappa\alpha\iota\ \Delta\overset{\triangle}{\Gamma}\mathrm{Z}\left(\Delta\mathrm{E}\perp\mathrm{AB},\Delta\mathrm{Z}\perp\mathrm{A}\Gamma\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \Delta\mathrm{E}=\Delta\mathrm{Z}\left(\begin{array}{l}\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \tau\eta\varsigma\ \delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\upsilon\ \iota\sigma\alpha\pi\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \alpha\pi o\\ \tau\iota\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\varsigma\end{array}\right)\\ (\mathrm{II})\ \Delta\mathrm{B}=\Delta\Gamma\left(\begin{array}{l}\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \tau\eta\varsigma\ \mu\varepsilon\sigma o\kappa\alpha\theta\acute{\varepsilon}\tau o\upsilon\ \iota\sigma\alpha\pi\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \alpha\pi o\\ \tau\alpha\ \acute{\alpha}\kappa\rho\alpha\ \tau o\upsilon\ \varepsilon\upsilon\theta\upsilon\gamma\rho\acute{\alpha}\mu\mu o\upsilon\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma\end{array}\right)\end{array}\right\}$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon:\Delta\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\mathrm{E}=\Delta\overset{\triangle}{\Gamma}\mathrm{Z}$$

(II)

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{A}\Delta' : \Delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \hat{\mathrm{A}}_{\varepsilon\xi}$ $\Delta'\mathrm{E}'\perp\mathrm{AB},\Delta'\mathrm{Z}'\perp\mathrm{A}\Gamma$	$\Delta'\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\mathrm{E}'=\Delta'\overset{\triangle}{\Gamma}\mathrm{Z}'$



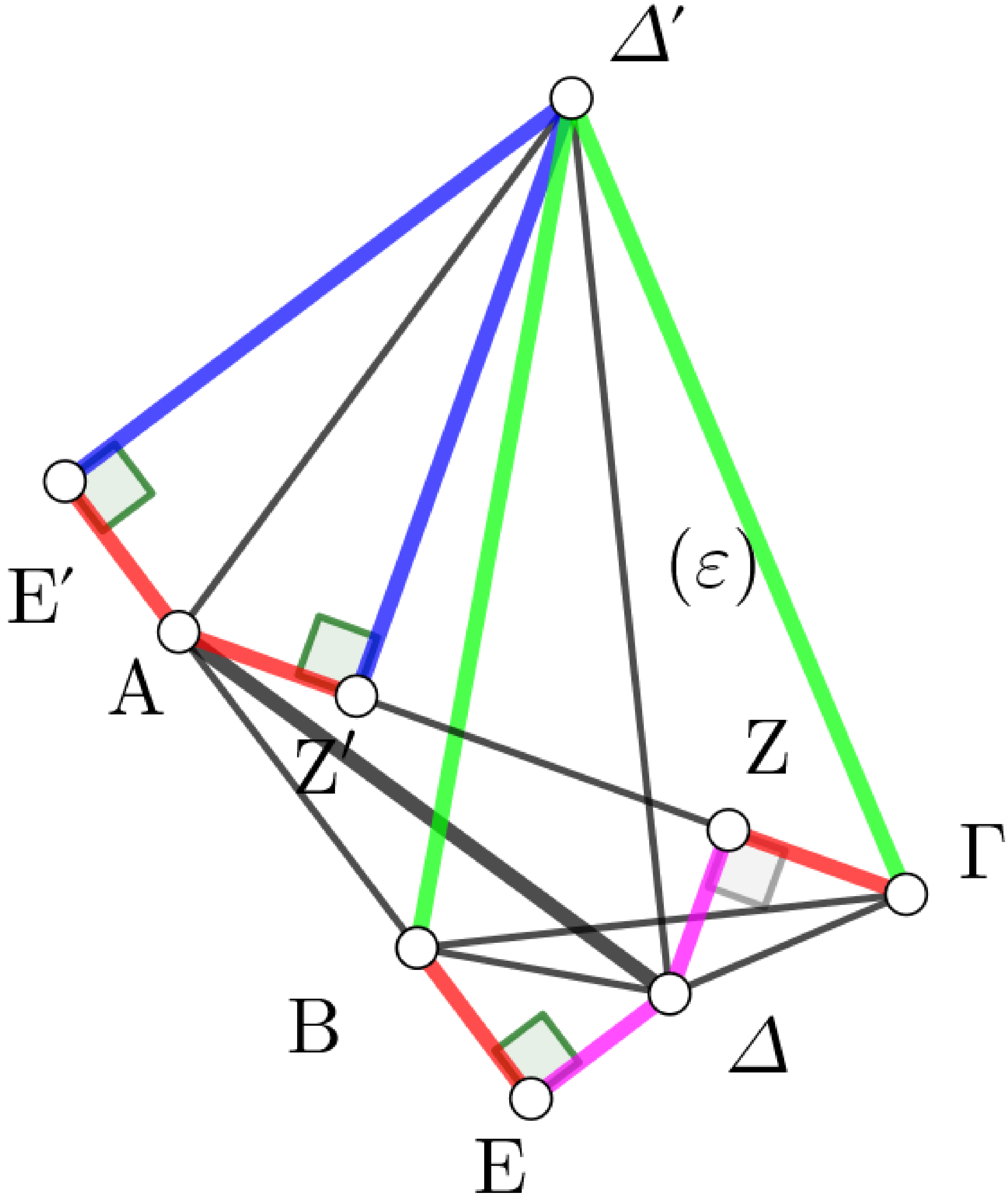
Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Delta'BE'}$ *και* $\overset{\triangle}{\Delta'\Gamma Z'}$ $(\Delta'E' \perp AB, \Delta'Z' \perp A\Gamma)$

$$\left\{\begin{array}{l} (I)\ \Delta'E' = \Delta'Z' \left(\begin{array}{l} \textit{Γιατί κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει απο} \\ \textit{τις πλευρές της γωνίας} \end{array}\right) \\ (II)\ \Delta'B = \Delta'\Gamma \left(\begin{array}{l} \textit{Γιατί κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει απο} \\ \textit{τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος} \end{array}\right) \end{array}\right\}$$

Ο*πότε* : $\overset{\triangle}{\Delta'BE'} = \overset{\triangle}{\Delta'\Gamma Z'}$

(III)

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{A\Delta}: \Delta\iota\chi o\tau \acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \hat{\mathrm{A}}$ $\mathrm{\Delta E} \perp \mathrm{AB}, \mathrm{\Delta Z} \perp \mathrm{A\Gamma}$ $\mathrm{A\Delta'}: \Delta\iota\chi o\tau \acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \hat{\mathrm{A}}_{\varepsilon\xi}$ $\mathrm{\Delta'E'} \perp \mathrm{AB}, \mathrm{\Delta'Z'} \perp \mathrm{A\Gamma}$	$\mathrm{EE'} = \mathrm{A\Gamma}, \mathrm{ZZ'} = \mathrm{AB}$


Δ′
E′
A
Z′
(ε)
Z
Γ
B
Δ
E

<u>*Θα αποδείξω οτι* $\mathrm{AE}=\mathrm{AZ}$</u>

Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta E}}$ *και* $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta Z}}\left(\hat{\mathrm{E}}'=\hat{\mathrm{Z}}'=90^0\right)$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ \mathrm{AE}'=\mathrm{AZ}'\left(\begin{array}{l}\text{Γιατί κάθε σημείο της εξωτερικής διχοτόμου της } \hat{\mathrm{A}}_{\varepsilon\xi}\\ \text{ισαπέχει απο τις πλευρές της γωνίας}\end{array}\right)\\ (\mathrm{II})\ \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}\left(\text{Γιατί } \mathrm{A\Delta} \text{ διχοτόμος της } \hat{\mathrm{A}}\right)\end{cases}\right\}$$

Οπότε : $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta E}}=\overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta Z}}$. *Συνεπώς θα έχω* $\mathrm{AE}=\mathrm{AZ}$

<u>*Θα αποδείξω οτι* $\Gamma\mathrm{Z}'=\mathrm{BE}'$</u>

Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Delta'\mathrm{E}'\mathrm{B}}$ *και* $\overset{\triangle}{\Delta'\mathrm{Z}'\Gamma}\left(\hat{\mathrm{E}}=\hat{\mathrm{Z}}=90^0\right)$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ \Delta'\mathrm{E}'=\Delta'\mathrm{Z}'\left(\begin{array}{l}\text{Γιατί κάθε σημείο της } \hat{\mathrm{A}}_{\varepsilon\xi} \text{ ισαπέχει απο τις}\\ \text{πλευρές της γωνίας}\end{array}\right)\\ (\mathrm{II})\ \Delta'\mathrm{B}=\Delta'\Gamma\left(\begin{array}{l}\text{Γιατί κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει απο}\\ \text{τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.}\end{array}\right)\end{cases}\right\}$$

Οπότε : $\overset{\triangle}{\Delta'\mathrm{E}'\mathrm{B}}=\overset{\triangle}{\Delta'\mathrm{Z}'\Gamma}$. *Συνεπώς θα έχω* $\Gamma\mathrm{Z}'=\mathrm{BE}'$

$$\underline{\left.\begin{cases}\mathrm{AE}=\mathrm{AZ}\\ \Gamma\mathrm{Z}'=\mathrm{BE}'\end{cases}\right\}(+)}$$

$\mathrm{AE}+\Gamma\mathrm{Z}'=\mathrm{AZ}+\mathrm{BE}'$

Σκέφτομαι τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{AE},\Gamma\mathrm{Z}',\mathrm{AZ},\mathrm{BE}'$ *να τα εκφράσω σε σχέση με το* AB *ή το* $\mathrm{A}\Gamma$. *Έτσι θα έχω* :

$\mathrm{AE}=\mathrm{AB}+\mathrm{BE},\ \Gamma\mathrm{Z}'=\mathrm{A}\Gamma-\mathrm{AZ}',\ \mathrm{AZ}=\mathrm{A}\Gamma-\Gamma\mathrm{Z},\ \mathrm{BE}'=\mathrm{AB}+\mathrm{AE}'$

$$\mathrm{AE}+\Gamma\mathrm{Z}'=\mathrm{AZ}+\mathrm{BE}' \overset{\substack{\mathrm{AE}=\mathrm{AB}+\mathrm{BE}\\ \Gamma\mathrm{Z}'=\mathrm{A}\Gamma-\mathrm{AZ}'\\ \mathrm{AZ}=\mathrm{A}\Gamma-\Gamma\mathrm{Z}\\ \mathrm{BE}'=\mathrm{AB}+\mathrm{AE}'}}{\Longleftrightarrow} \cancel{\mathrm{AB}}+\mathrm{BE}+\cancel{\mathrm{A}\Gamma}-\mathrm{AZ}'=\cancel{\mathrm{A}\Gamma}-\Gamma\mathrm{Z}+\cancel{\mathrm{AB}}+\mathrm{AE}'$$

$\Leftrightarrow \mathrm{BE}-\mathrm{AZ}'=\mathrm{AE}'-\Gamma\mathrm{Z}\Leftrightarrow \mathrm{BE}+\Gamma\mathrm{Z}=\mathrm{AE}'+\mathrm{AZ}'\ (1)$

Επειδή $\Delta\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\mathrm{E}=\Delta\overset{\triangle}{\Gamma}\mathrm{Z}$ *θα έχω* $\mathrm{BE}=\Gamma\mathrm{Z}\ (2)$

Επειδή $\Delta'\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\mathrm{E}'=\Delta'\overset{\triangle}{\Gamma}\mathrm{Z}'$ *θα έχω* $\mathrm{AE}'=\mathrm{AZ}'\ (3)$

Απο τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ *θα έχω* :

$$(1)\Leftrightarrow \mathrm{BE}+\Gamma\mathrm{Z}=\mathrm{AE}'+\mathrm{AZ}' \overset{\substack{\mathrm{BE}=\Gamma\mathrm{Z}\\ \mathrm{AE}'=\mathrm{AZ}'}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{BE}+\mathrm{BE}=\mathrm{AZ}'+\mathrm{AZ}'\Leftrightarrow \cancel{2}\mathrm{BE}=\cancel{2}\mathrm{AZ}'$$

$$\overset{\substack{\text{Αν } \alpha\neq 0 \text{ ισχύει η ισοδυναμία:}\\ \alpha\beta=\alpha\gamma\Leftrightarrow\beta=\gamma}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{BE}=\mathrm{AZ}'$$

$\text{Ο}\pi\acute{o}\tau\varepsilon : \Gamma\text{Z} = \text{BE} = \text{AZ}' = \text{AE}'(4)$

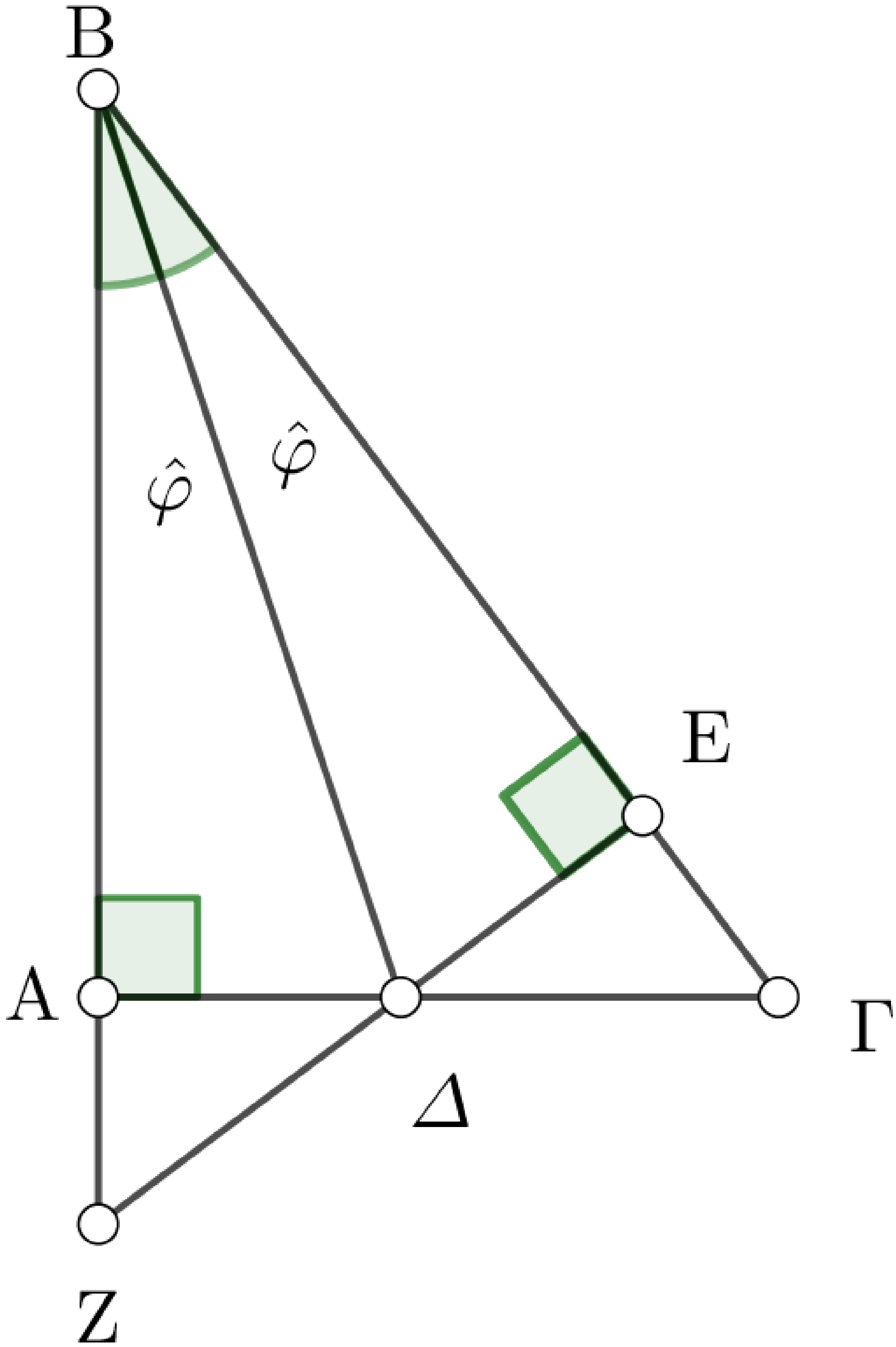
$\text{EE}' = \text{AE} + \text{AE}' \overset{\substack{\text{AE=AZ} \\ \text{AE}'=\Gamma\text{Z}}}{=} \text{AZ} + \Gamma\text{Z} = \text{A}\Gamma$

$\text{ZZ}' = \text{AZ} - \text{AZ}' \overset{\substack{\text{AZ=AE} \\ \text{AZ}'=\text{BE}}}{=} \text{AE} - \text{BE} = \text{AB}$

7.

Δίνεται τρίγωνο $\text{AB}\Gamma\left(\text{A} = 90^0\right)$ *και* $\text{B}\Delta$ *η διχοτόμος της γωνίας* $\hat{\text{B}}$. *Απο το* Δ *φέρουμε* $\Delta\text{E} \perp \text{B}\Gamma$, *και έστω* Z *το σημείο στο οποίο η ευθεία* $\text{E}\Delta$ *τέμνει την προέκταση της* BA(*προς το* A).*Να αποδείξετε ότι*: $(\text{I})\ \text{AB} = \text{BE}$ $(\text{II})\ \text{A}\overset{\Delta}{\text{B}}\Gamma = \text{Z}\overset{\Delta}{\text{E}}\text{B}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\hat{\text{A}} = 90^0, \text{B}\Delta$: *Διχοτόμος της γωνίας* $\hat{\text{B}}$ $\Delta\text{E} \perp \text{B}\Gamma$	$(\text{I})\ \text{AB} = \text{BE}$ $(\text{II})\ \text{A}\overset{\Delta}{\text{B}}\Gamma = \text{Z}\overset{\Delta}{\text{E}}\text{B}$



B
$\hat{\varphi}$
$\hat{\varphi}$
E
A
Δ
Γ
Z

(i) *Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα* $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ *και* $\overset{\triangle}{EB\Delta}$ $\left(\hat{A}=\hat{E}=90^0\right)$

$$\begin{cases}(I)\ B\Delta = B\Delta\ (\Omega\varsigma\ \kappa o\nu\acute{\eta}\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}) \\ (II)\ A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}E\left(\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ B\Delta\ \ \delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\varsigma\ \hat{B}\right)\end{cases}$$

Οπότε $\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{EB\Delta}$. *Συνεπώς θα έχω* $AB = BE\ (1)$

(ii) *Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα* $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ *και* $\overset{\triangle}{EBZ}$ $\left(\hat{A}=\hat{E}=90^0\right)$

$$\begin{cases}(I)\ AB = BE\ (1) \\ (II)\ A\hat{B}\Gamma = Z\hat{B}E\ (\Omega\varsigma\ \kappa o\iota\nu\acute{\eta}\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha)\end{cases}$$

Οπότε $\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{EBZ}$

8.

Δίνεται $AB\Gamma$ *με* $AB < A\Gamma$. *Στην προέκταση της* AB *θεωρούμε σημείο* E *έτσι ώστε* $AE = A\Gamma$. *Στην πλευρά* $A\Gamma$ *θεωρούμε σημείο* Δ *έτσι ώστε* $A\Delta = AB$. *Αν τα τμήματα* ΔE *και* $B\Gamma$ *τέμνονται στο* K *και η προέκταση της* AK *τέμνει την* $E\Gamma$ *στο* M, *να αποδείξετε ότι*:

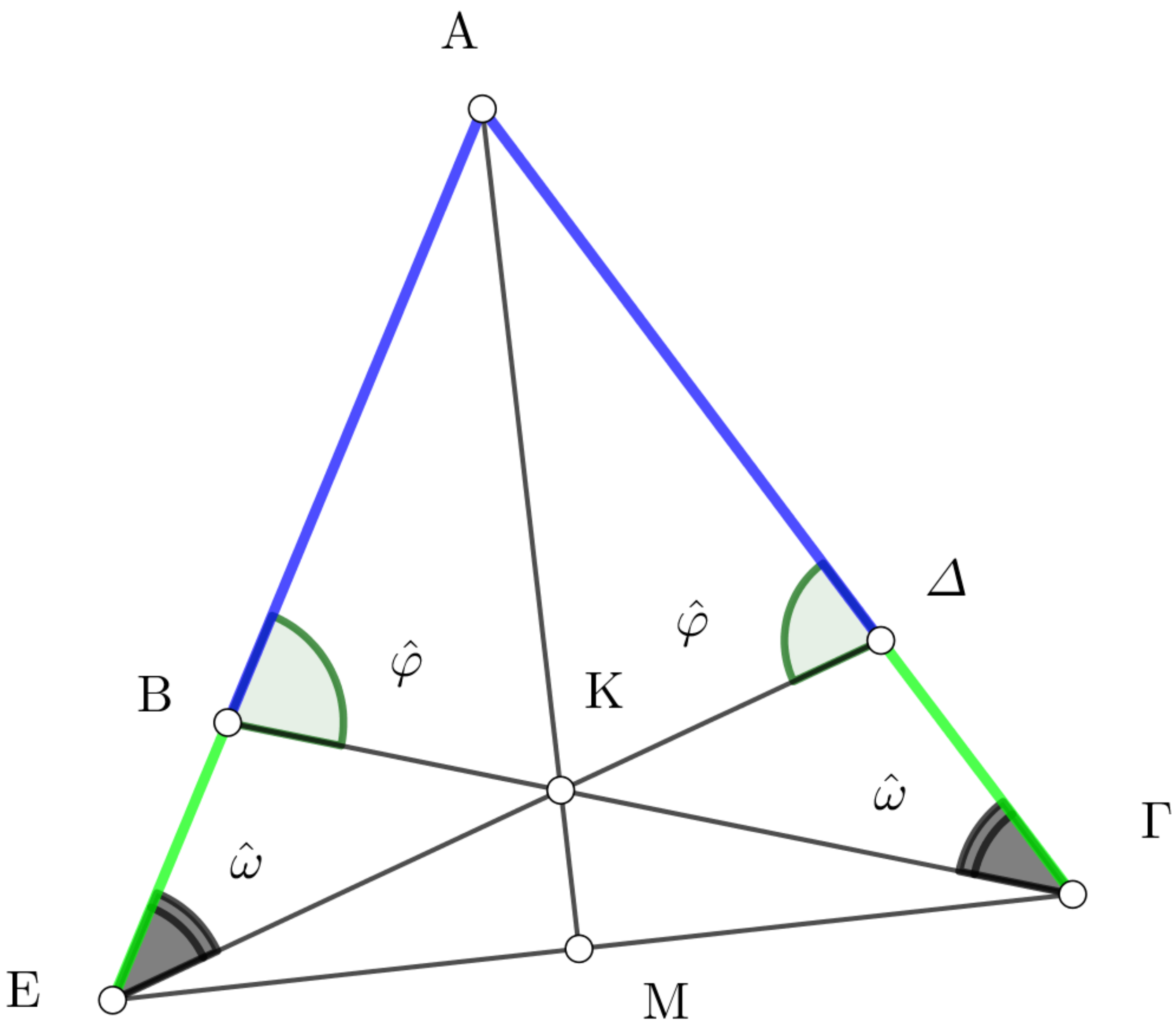
$(I)\ B\Gamma = \Delta E$

$(II)\ BK = K\Delta$

(III) Η AK *είναι διχοτόμος της γωνίας* $\hat{A}$

(IV) Η AM *είναι μεσοκάθετος της* $E\Gamma$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$AE = A\Gamma,\ A\Delta = AB$	$(I)\ B\Gamma = \Delta E$ $(II)\ BK = K\Delta$ $(III)\ AK$: *Διχοτόμος της γωνίας* $\hat{A}$ $(IV)\ AM$: *Μεσοκάθετος της* $E\Gamma$



$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \overset{\triangle}{\mathrm{AE\Delta}}\ \kappa\alpha\iota\ \overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma B}}.\ \mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \mathrm{AE}=\mathrm{A\Gamma}\,(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\ \mathrm{A\Delta}=\mathrm{AB}\,(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{III})\ \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Delta=\Gamma\mathrm{AB}\,(\Omega\varsigma\ \kappa o\nu\acute{\eta}\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \overset{\triangle}{\mathrm{AE\Delta}}=\overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma B}}\,(\Pi\Gamma\Pi).\mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\Delta\mathrm{E}=\mathrm{B\Gamma}\,(1),\ \mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{A}=\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}=\varphi\,(2),\ \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A}=\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}=\hat{\omega}\,(3)$

(II)

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}=180^0-\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=180^0-\hat{\varphi}\\\mathrm{K}\hat{\Delta}\Gamma=180^0-\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{A}=180^0-\hat{\varphi}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}=\mathrm{K}\hat{\Delta}\Gamma\,(4)$$

$$BE = AE - AB \overset{\substack{AE=A\Gamma \\ AB=A\Delta}}{=} A\Gamma - A\Delta = \Delta\Gamma$$

$O\pi\acute{o}\tau\varepsilon : BE = \Delta\Gamma\,(5)$

$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \overset{\triangle}{EBK}\ \kappa\alpha\iota\ \overset{\triangle}{\Gamma\Delta K}.\ A\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi\text{ουν}:$

$$\left\{\begin{array}{l} (I)\, BE = \Delta\Gamma\,(5) \\ (II)\, E\hat{B}K = K\hat{\Delta}\Gamma\,(4) \\ (III)\, K\hat{E}B = K\Gamma\hat{\Delta}\,(3) \end{array}\right\}$$

$O\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \overset{\triangle}{EBK} = \overset{\triangle}{\Gamma\Delta K}\,(\Gamma\Pi\Gamma).\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ BK = K\Delta\,(5)$

$(III)\,\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \overset{\triangle}{AKB}\ \kappa\alpha\iota\ \overset{\triangle}{AK\Delta}.\ A\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi\text{ουν}:$

$$\left\{\begin{array}{l} (I)\, AK = AK\,(K\text{οινή πλευρά}) \\ (II)\, BK = K\Delta\,(5) \\ (III)\, AB = A\Delta\,(\Upsilon\text{πόθεση}) \end{array}\right\}$$

$O\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \overset{\triangle}{AKB} = \overset{\triangle}{AK\Delta}.\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ B\hat{A}K = \Delta\hat{A}K$ *Άρα* AK *είναι διχοτόμος της γωνίας* $\hat{A}$.

(IV) *Στο ισοσκελές τρίγωνο* $AE\Gamma\,(AE = A\Gamma)$ *η* AM *είναι διχοτόμος της γωνίας* $\hat{A}$. *Οπότε η* AM *είναι διάμεσος και ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο* $AE\Gamma\,(AE = A\Gamma)$ $\left(\begin{array}{l}\text{Ως διχοτόμος της γωνίας της κορυφής} \\ \text{ισοσκελούς τριγώνου}\end{array}\right)$

Άρα M *είναι το μέσο της* $E\Gamma$ *και* $AM \perp E\Gamma$. *Άρα η* AM *είναι μεσοκάθετος της* $E\Gamma$ *γιατί κάθετη στην* $E\Gamma$ *και διέρχεται απο το μέσο της* $E\Gamma$.

9.

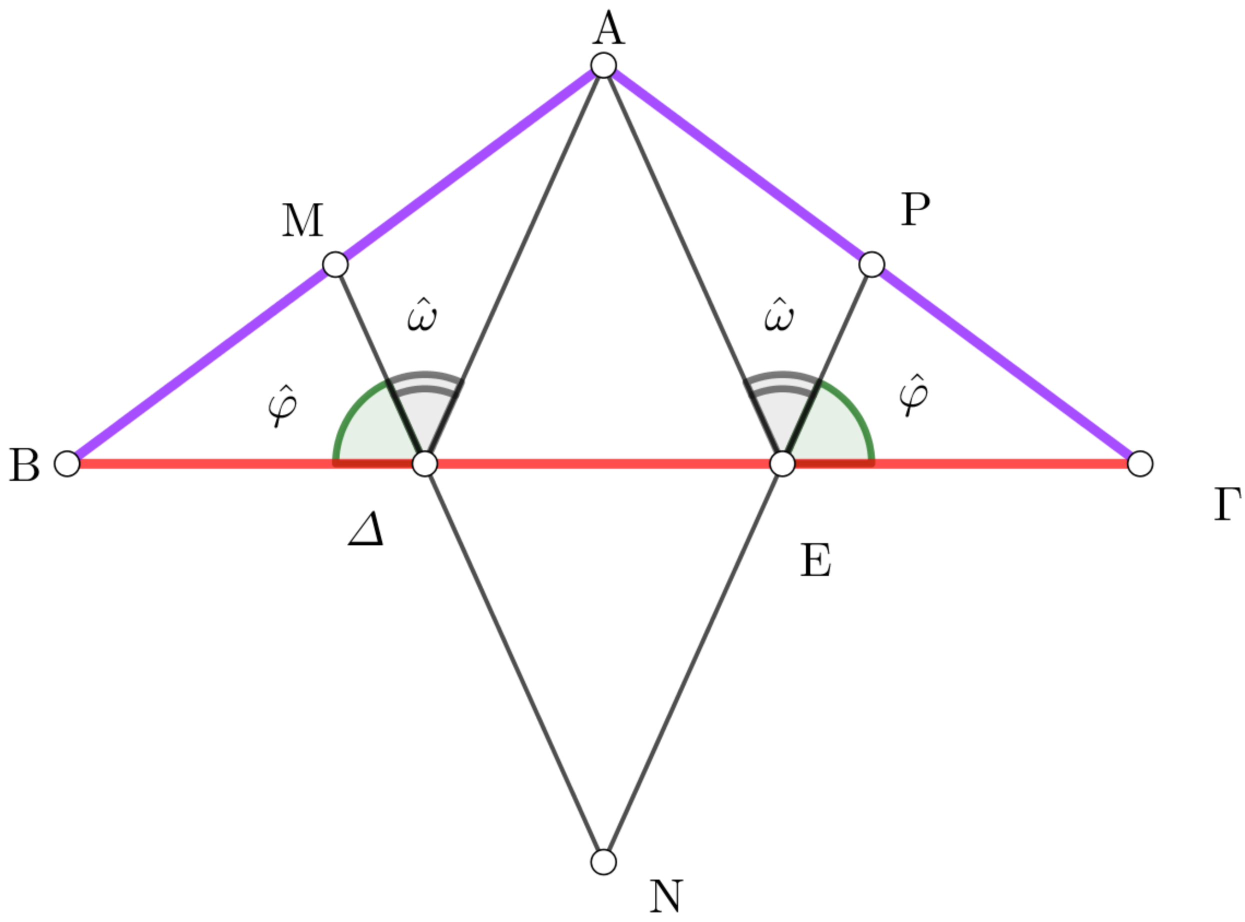
Έστω $AB\Gamma$ *ένα ισοσκελές τρίγωνο με* $AB = A\Gamma$. *Έστω* Δ, E *σημεία της πλευράς* $B\Gamma$ *τέτοια ώστε* $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$ *και* M, P *τα μέσα των πλευρών* $AB, A\Gamma$ *αντίστοιχα. Έστω* N *το σημείο τομής των ευθειών* $M\Delta$ *και* PE. *Να αποδείξετε ότι:*

$(I)\, M\Delta = PE$

$(II)\, M\hat{\Delta}A = P\hat{E}A$

$(III)\, MN = PN$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$ΑΒ = ΑΓ$ $ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ$ $Μ : Μέσο\ της\ ΑΒ$ $Ρ : Μέσο\ της\ ΑΓ$	$(Ι)\, ΜΔ = ΡΕ$ $(ΙΙ)\, Μ\hat{Δ}Α = Ρ\hat{Ε}Α$ $(ΙΙΙ)\, ΜΝ = ΡΝ$



$(Ι)\, Στο\ ισοσκελές\ τρίγωνο\ ΑΒΓ\ (ΑΒ = ΑΓ)\ θα\ έχω\ \hat{Β} = \hat{Γ}\ (1)$

$(Ως\ προσκείμενες\ γωνίες\ στη\ βάση\ ισοσκελούς\ τριγώνου)$

$Συγκρίνω\ τα\ τρίγωνα\ Μ\overset{\triangle}{Δ}Β\ και\ Ρ\overset{\triangle}{Ε}Γ.\ Αυτά\ έχουν:$

$$\left\{\begin{array}{l}(Ι)\, ΒΔ = ΓΕ\ (Υπόθεση)\\ (ΙΙ)\, ΒΜ = ΡΓ\ (Ως\ μισά\ ίσων\ πλευρών)\\ (ΙΙΙ)\, Μ\hat{Β}Δ = Ρ\hat{Γ}Ε\ (1)\end{array}\right\}$$

$Οπότε\ Μ\overset{\triangle}{Δ}Β = Ρ\overset{\triangle}{Ε}Γ.\ Συνεπώς\ θα\ έχω\ ΜΔ = ΡΕ\ (2)\ και\ Μ\hat{Δ}Β = Ρ\hat{Ε}Γ = \hat{Α}\ (3)$

$(\mathrm{II})\,\Sigma \upsilon \gamma \kappa \rho \acute{\iota} \nu \omega\ \tau \alpha\ \tau \rho \acute{\iota} \gamma \omega \nu \alpha\ \mathrm{A}\overset{\triangle}{\Delta}\mathrm{B}\ \kappa \alpha \iota\ \mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{E}}\Gamma.\ \mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{B}\Delta=\Gamma\mathrm{E}\,(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\ (\mathrm{II})\,\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma\,(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\ (\mathrm{III})\,\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta=\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{E}\,(1)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{A}\overset{\triangle}{\Delta}\mathrm{B}=\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{E}}\Gamma.\ \Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma\,(4)$

$$\mathrm{M}\hat{\Delta}\mathrm{A}=\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}-\mathrm{M}\hat{\Delta}\mathrm{B}\overset{\substack{\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma\\ \mathrm{M}\hat{\Delta}\mathrm{B}=\mathrm{P}\hat{\mathrm{E}}\Gamma}}{=}\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma-\mathrm{P}\hat{\mathrm{E}}\Gamma=\mathrm{P}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A}$$

$(\mathrm{III})\,\mathrm{N}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{M}\hat{\Delta}\mathrm{B}=\mathrm{P}\hat{\mathrm{E}}\Gamma=\hat{\varphi}\,(\Omega\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\nu)$

$\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{N}=\mathrm{P}\hat{\mathrm{E}}\Gamma=\hat{\varphi}\,(\Omega\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\nu)$

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{N}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\widehat{\varphi}\\ \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{N}=\widehat{\varphi}\end{array}\right\}\Rightarrow\mathrm{N}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{N}\hat{\Delta}\mathrm{E}$$

$\Sigma\tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \Delta\mathrm{EN}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{N}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{N}\hat{\Delta}\mathrm{E}.\ \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \Delta\mathrm{N}=\mathrm{NE}\,(5)$

$(\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa o\nu\tau\alpha\iota\ \sigma\tau o\ \acute{\iota}\delta\iota o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi o\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma)$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (2)\ \kappa\alpha\iota\ (5)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{M}\Delta=\mathrm{PE}\\ \Delta\mathrm{N}=\mathrm{NE}\end{array}\right\}(+)$$

$$\underbrace{\mathrm{M}\Delta+\Delta\mathrm{N}}_{\mathrm{MN}}=\underbrace{\mathrm{PE}+\mathrm{NE}}_{\mathrm{PN}}\Rightarrow\mathrm{MN}=\mathrm{PN}$$