ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΕΝΑ ΤΡΙΓΩΝΟ

1.

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, που διέρχονται απο δυο σταθερά σημεία Α *και* Β

Θα αποδείξω ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται απο τα σταθερά σημεία Α *και* Β *είναι η μεσοκάθετος του τμήματος* ΑΒ

Ευθύ:

Στο ευθύ θα αποδείξω αν υπάρχει κύκλος που διέρχεται απο τα σταθερά σημεία Α *και* Β *το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετο του* ΑΒ

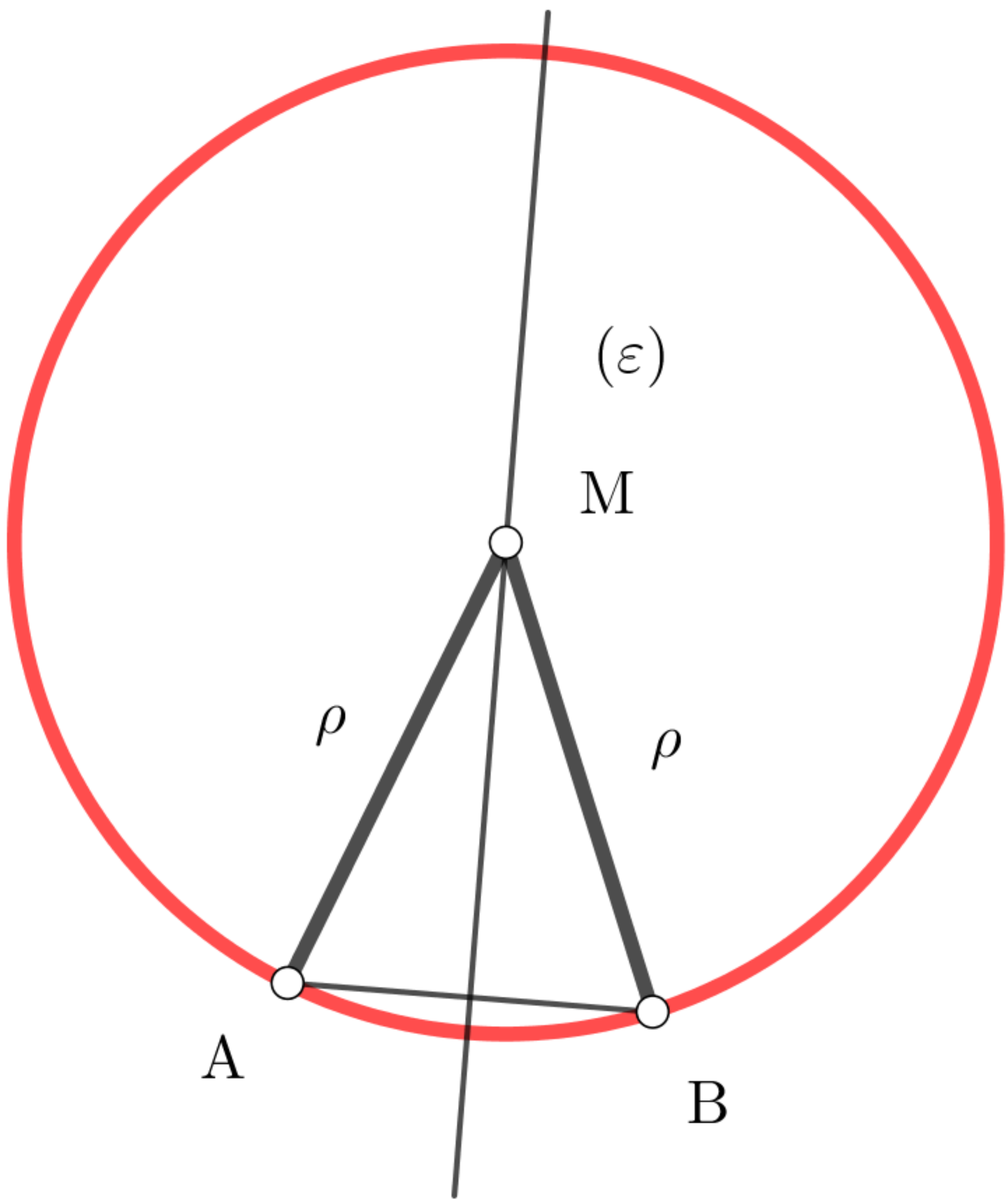
Έστω (ε) *η μεσοκάθετος του* ΑΒ

Γνωρίζω ότι ένα σημείο ανήκει σε κύκλο όταν η απόσταση του απο το κέντρο του κύκλου είναι ίση με την ακτίνα του

Έστω υπάρχει κύκλος (M,ρ) *τέτοιος ώστε* $\mathrm{A},\mathrm{B}\in(\mathrm{M},\rho)$

$$\left.\begin{cases}\mathrm{A}\in(\mathrm{M},\rho)\\ \mathrm{B}\in(\mathrm{M},\rho)\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}\mathrm{MA}=\rho\\ \mathrm{MB}=\rho\end{cases}\right\}\Rightarrow \mathrm{MA}=\mathrm{MB}$$

Επειδή $\mathrm{MA}=\mathrm{MB}$ *το σημείο* Μ *ισαπέχει απο τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος* ΑΒ.*Συνεπώς είναι σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος* ΑΒ



(ε)
M
ρ
ρ
A
B

<u>Αντίστροφο</u>:

Στο αντίστροφο θα αποδείξω αν M σημείο της μεσοκαθέτου του AB τότε υπάρχει κύκλος με κέντρο M που διέρχεται απο τα σημεία A και B

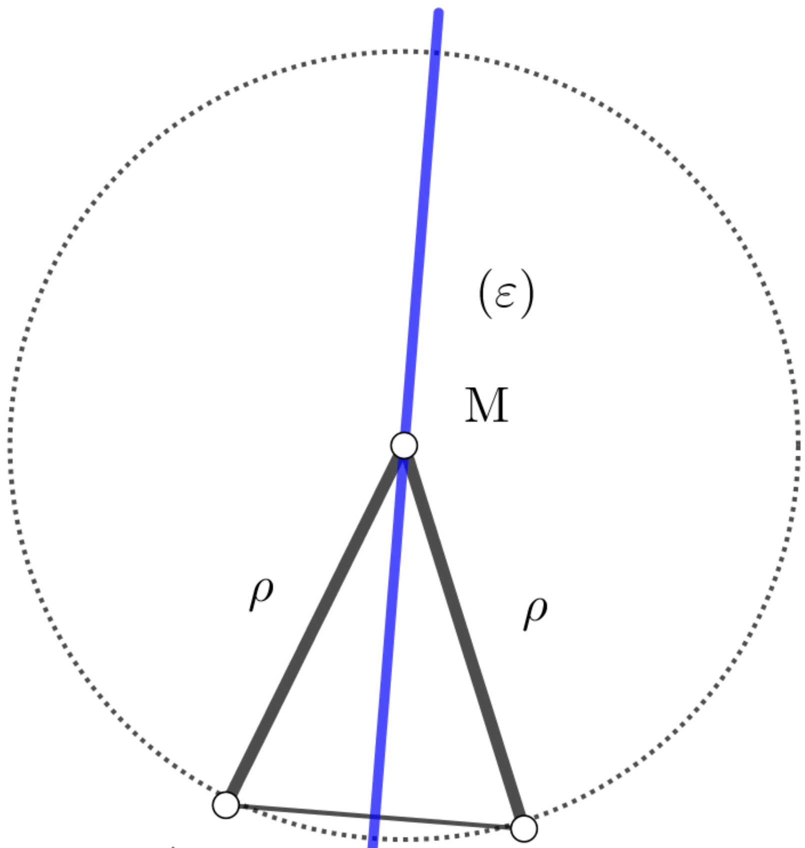
Έστω (ε) η μεσοκάθετος του AB

Γνωρίζω ότι <u>ένα σημείο ανήκει στην μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος αν και μόνο αν ισαπέχει απο τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος</u>

Έστω M σημείο της μεσοκαθέτου (ε) του AB. Τότε θα έχω:

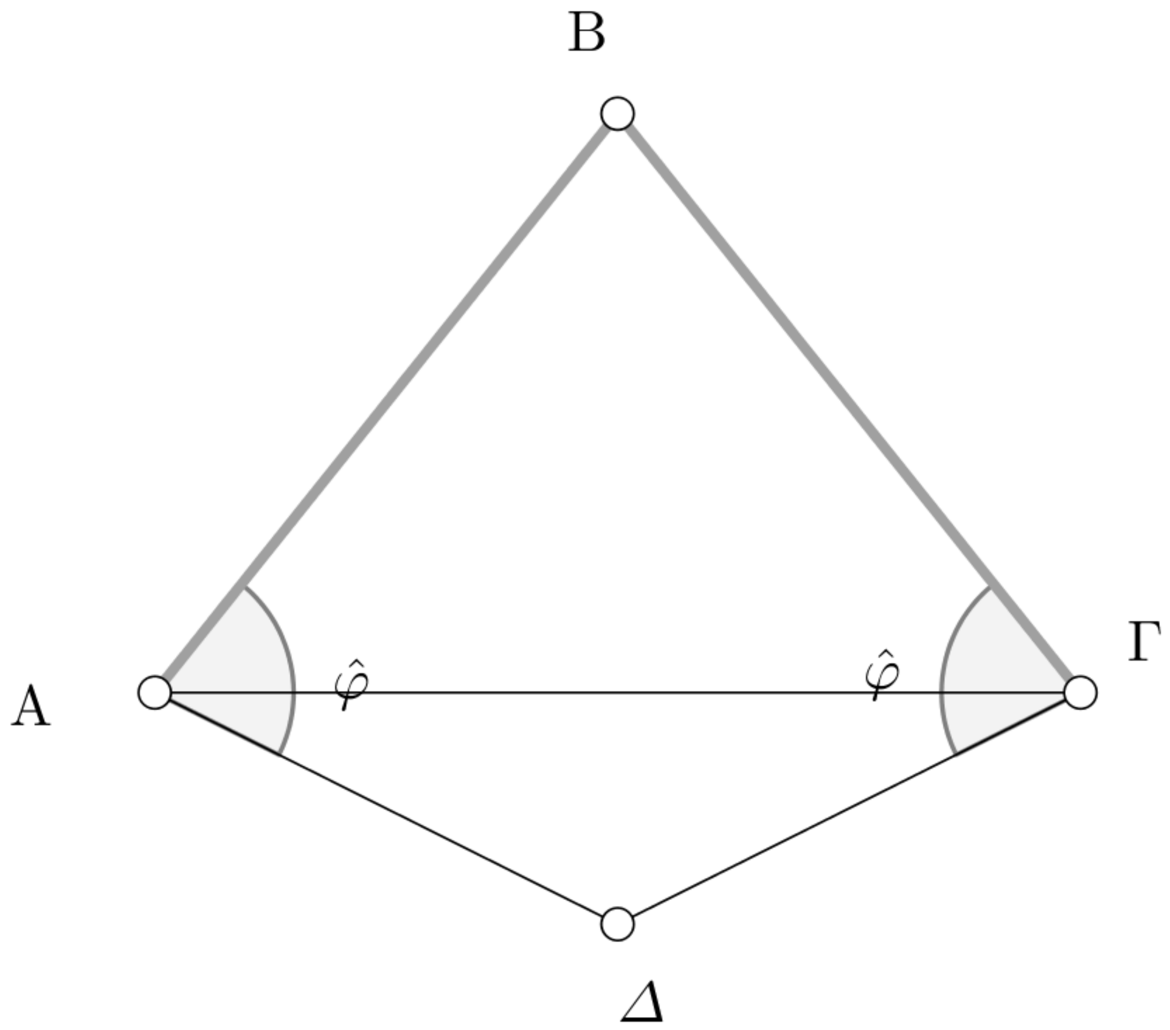
$\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$

Θεωρώ τον κύκλο με κέντρο M και ακτίνα $\rho = \mathrm{MA} = \mathrm{MB}$ δηλαδή τον κύκλο (M, ρ). Τότε τα σημεία A και B είναι σημεία του κύκλου γιατί οι αποστάσεις τους απο τα σημεία A, B είναι ίσες με την ακτίνα του κύκλου. Συνεπώς υπάρχει κύκλος με κέντρο M που να διέρχεται απο τα σημεία A και B



2.

Αν σε ένα κυρτό τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ ισχύουν $ΑΒ = ΒΓ$ και $\hat{Α} = \hat{Γ}$, να αποδείξετε ότι $ΑΔ = ΓΔ$. Τι συμπεραίνετε για την $ΒΔ$;



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$ΑΒ = ΒΓ$, $\hat{Α} = \hat{Γ}$	$ΑΔ = ΓΔ$ $ΒΔ$: Μεσοκάθετος του $ΑΓ$

Έχω : $\hat{Α} = \hat{Γ} = \varphi \ (1)$

Στο ισοσκελές τρίωνο $ΒΑΓ \ (ΒΑ = ΒΓ)$ θα έχω $Β\hat{Α}Γ = Β\hat{Γ}Α = \hat{\omega} \ (1)$

(Ως γωνίες προσκείμενες στην βάση ισοσκελούς τριγώνου)

$$\Delta\hat{A}\Gamma = \hat{A} - B\hat{A}\Gamma \overset{\substack{\hat{A}=\varphi \\ B\hat{A}\Gamma=\omega}}{=} \hat{\varphi} - \hat{\omega}$$

$$\text{Οπότε}: \boxed{\Delta\hat{A}\Gamma = \hat{\varphi} - \hat{\omega}}\ (3)$$

$$A\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma} - B\hat{\Gamma}A \overset{\substack{\hat{\Gamma}=\varphi \\ B\hat{\Gamma}A=\omega}}{=} \hat{\varphi} - \hat{\omega}$$

$$\text{Οπότε}: \boxed{A\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\varphi} - \hat{\omega}}\ (4)$$

Απο τις σχέσεις $(3),(4)$ *θα έχω*: $\Delta\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta$

Στο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ *έχω* $\Delta\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta$ *οπότε θα ισχύει* $\Delta\Gamma = A\Delta$

(*Γιατί στο ίδιο τρίγωνο ή σε δυο ίσα τρίγωνα απέναντι απο ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές*)

Επειδή $\Delta\Gamma = A\Delta$ *το* Δ *ισαπέχει απο τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος* $A\Gamma$. *Συνεπώς το* Δ *είναι σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος* $A\Gamma$

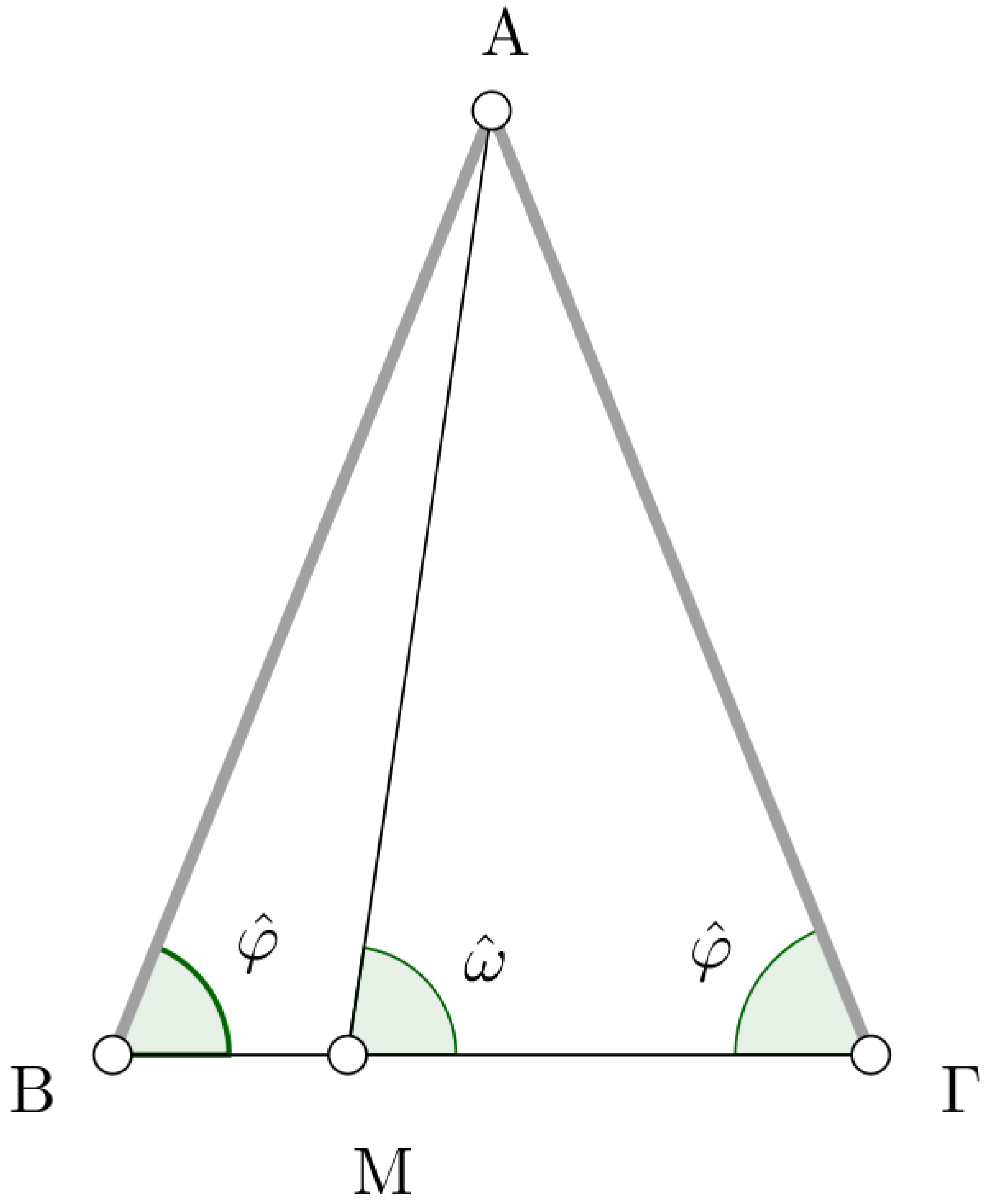
Επειδή $B\Gamma = B\Delta$ *το* B *ισαπέχει απο τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος* $A\Gamma$. *Συνεπώς το* Δ *είναι σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος* $A\Gamma$

Άρα B, Δ *είναι δυο διακεκριμένα σημεία της μεσοκαθέτου του ευθυργάμμου τμήματος* $A\Gamma$. *Επειδή δυο διαφορετικά σημεία ορίζουν την θέση μιας και μόνο ευθείας προκύπτει η* $B\Delta$ *είναι μεσοκάθετος του* $A\Gamma$.

3.

Αν M *σημείο της βάσης* $B\Gamma$ *ισοσκελούς τριγώνου* $AB\Gamma$, *να αποδείξετε ότι* $AM < AB$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$AB = A\Gamma$	$AM < AB$



$\Sigma \textit{το ισοσκελές τρίγωνο } \mathrm{AB\Gamma}\left(\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}\right) \textit{ θα έχω } \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \hat{\varphi}\,(1)$

$\left(\textit{Ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου}\right)$

$\Theta\textit{έτω}: \mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = \hat{\omega}$

Γ*νωρίζω ότι* <u>*κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη απο τις δυο απέναντι εσωτερικές*</u>

Η *γωνία* $\mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$ *είναι εξωτερική στο τρίγωνο* $\mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B}$.Ο*πότε θα είναι μεγαλύτερη απο τις δυο απέναντι εσωτερικές*.Ο*πότε θα έχω*:

$$\hat{A M \Gamma} > \hat{A B M} \xrightarrow[\hat{ABM}=\hat{\varphi}]{\hat{AM\Gamma}=\hat{\omega}} \hat{\omega} > \hat{\varphi}$$

Σ*το τρίγωνο* $AM\Gamma$ *έχω* $A\hat{M}\Gamma > A\hat{\Gamma}M$. *Οπότε θα ισχύει* $A\Gamma > AM$

$\left(\begin{array}{l}\Gamma\text{ιατί στο ίδιο τρίγωνο ή σε δυο ίσα τρίγωνα απέναντι απο την}\\ \text{μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρα}\end{array}\right)$

$$A\Gamma > AM \xrightarrow{A\Gamma=AB} AB > AM \Rightarrow AM < AB$$

4.

Σ*ε οθογώνιο τρίγωνο* $AB\Gamma\left(\hat{A}=90^0\right)$, *η διχοτόμος της γωνίας* $\hat{\Gamma}$ *τέμνει την απέναντι πλευρά* AB *στο* Δ. *Να αποδείξετε ότι* $A\Delta < \Delta B$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$A = 90^0$ $\Gamma\Delta$: *Διχοτόμος της* $\hat{\Gamma}$ $\Delta K \perp B\Gamma$	$A\Delta < \Delta B$

Φέρνω $\Delta K \perp B\Gamma$

Επειδή $\Gamma\Delta$ *διχοτόμος της γωνίας* $\hat{\Gamma}$ *θα έχω*:

$\Delta K = \Delta A\,(1)$

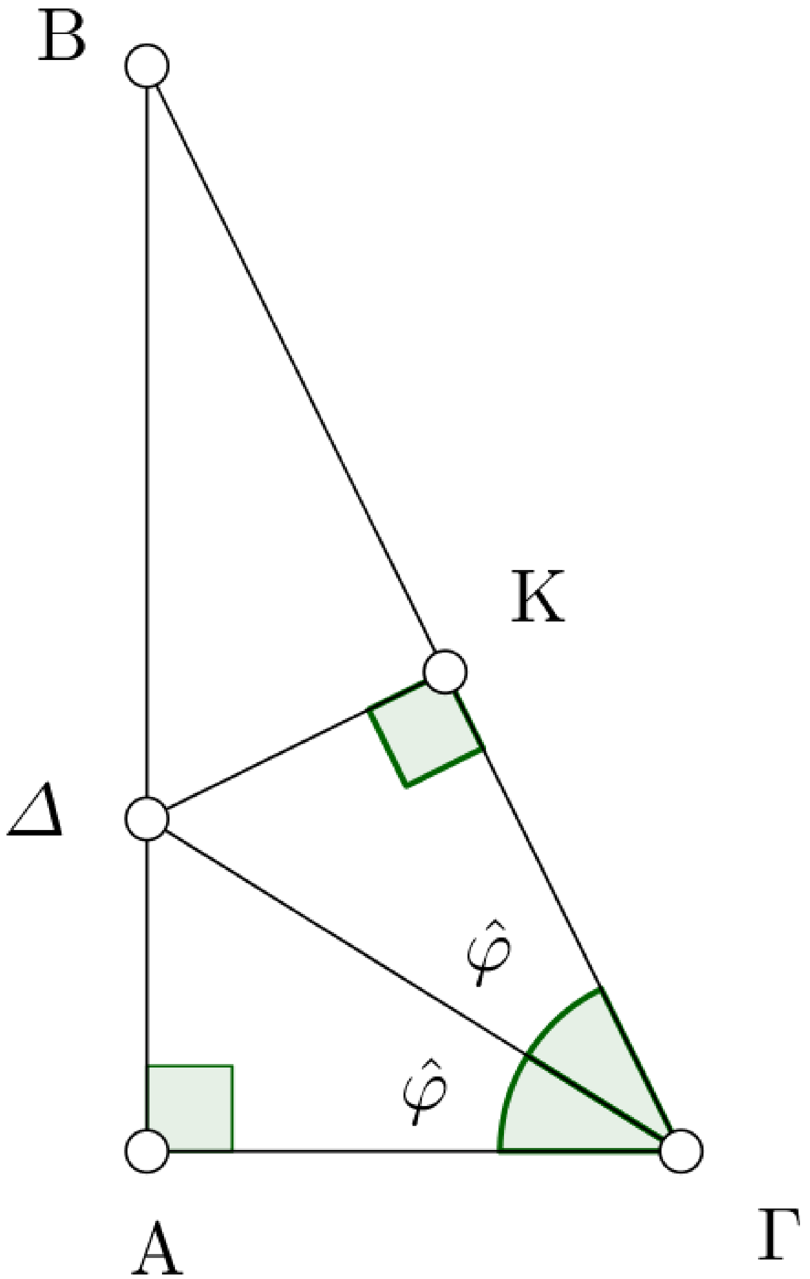
$\left(\begin{array}{l}\Gamma\text{ιατί κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει απο τις πλευρές της}\\ \text{γωνίας}\end{array}\right)$

Σ*ε οθογώνιο τρίγωνο* $\Delta KB\left(\hat{K}=90^0\right)$ *έχω* $\Delta K < \Delta B\,(2)$

$\left(\begin{array}{l}\Gamma\text{ιατί σε κάθε ορθογώνιο οι κάθετες πλευρές είναι μικρότερες}\\ \text{απο την υποτείνουσα}\end{array}\right)$

Απο τις σχέσεις $(1),(2)$ *θα έχω*:

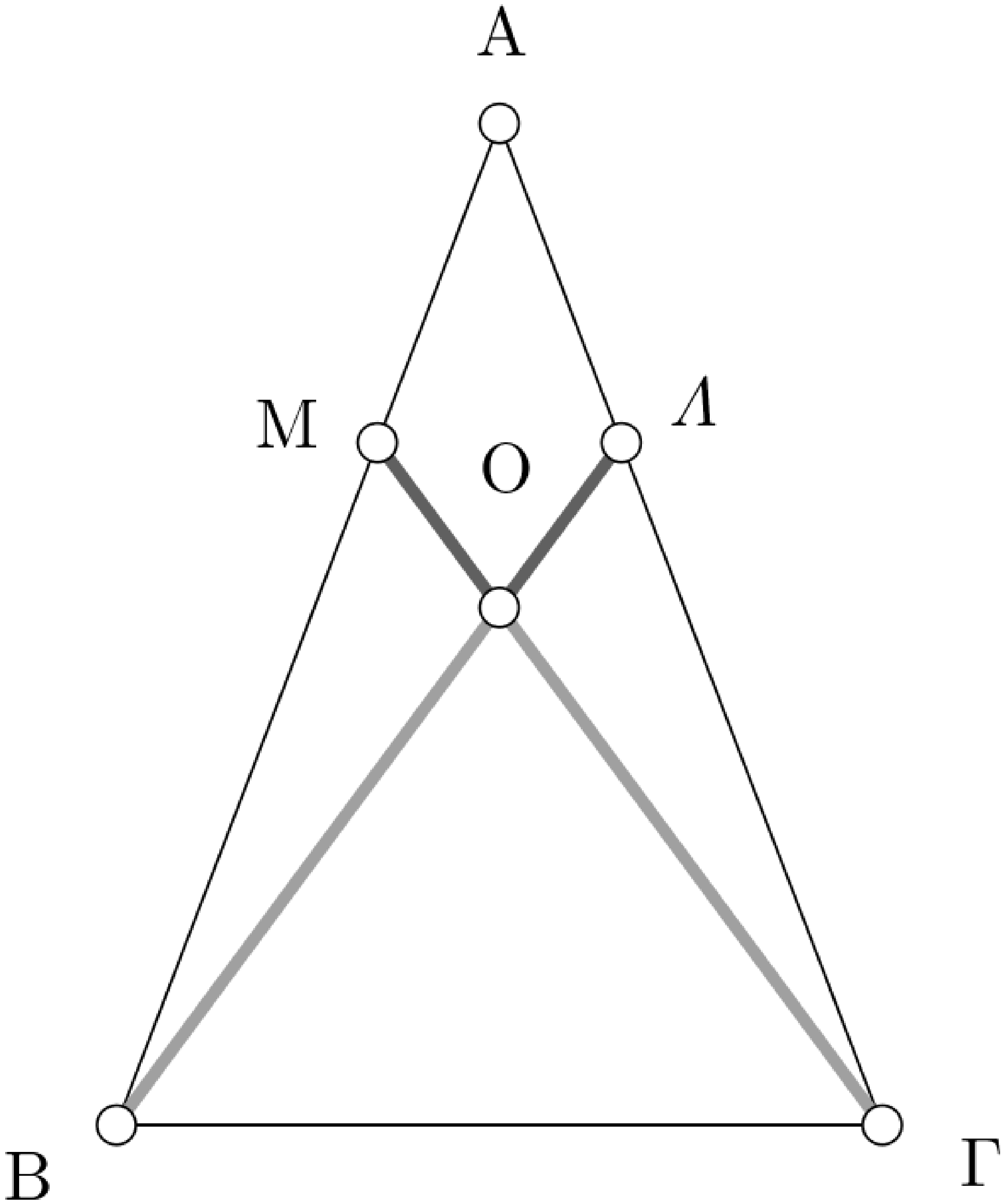
$$\Delta K < \Delta B \xrightarrow{\Delta K=\Delta A} \Delta A < \Delta B$$



5.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ *και* Ο *σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου.* Οι ΒΟ *και* ΓΟ *τέμνουν τις* ΑΓ *και* ΑΒ *στα σημεία* Λ *και* Μ *αντίστοιχα* Αν *ισχύει* ΒΟ = ΓΟ *και* ΟΛ = ΟΜ *να αποδείξετε ότι το τρίγωνο* ΑΒΓ *είναι ισοσκελές.*

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
ΒΟ = ΓΟ , ΟΛ = ΟΜ	ΑΒΓ : Ι*σοσκελές*



$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \mathrm{M}\overset{\triangle}{\mathrm{O}}\mathrm{B}\ \kappa\alpha\iota\ \Lambda\overset{\triangle}{\mathrm{O}}\Gamma.\mathrm{A}\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu:$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{MO}=\mathrm{O}\Lambda\,(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\ (\mathrm{III})\,\mathrm{OB}=\mathrm{O}\Gamma\,(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\ (\mathrm{III})\,\mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}=\Lambda\hat{\mathrm{O}}\Gamma\,(\Omega\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\nu)\end{array}\right\}$$

$\text{Οπότε } M\overset{\triangle}{O}B = \Lambda\overset{\triangle}{O}\Gamma\,(\Pi\Gamma\Pi).\text{Συνεπώς θα έχω } M\hat{B}O = \Lambda\hat{\Gamma}O\,(1)$

$\text{Στο ισοσκελές τρίγωνο } OB\Gamma\,(OB = O\Gamma) \text{ θα έχω } O\hat{B}\Gamma = O\hat{\Gamma}B\,(2)$

$\text{Απο τις σχέσεις } (1),(2) \text{ θα έχω}:$

$$\underline{\left.\begin{Bmatrix} M\hat{B}O = \Lambda\hat{\Gamma}O \\ O\hat{B}\Gamma = O\hat{\Gamma}B \end{Bmatrix}\right.(+)}$$

$$M\hat{B}O + O\hat{B}\Gamma = \Lambda\hat{\Gamma}O + O\hat{\Gamma}B \Rightarrow \hat{\Gamma} = \hat{B}$$

$\text{Στο τρίγωνο } AB\Gamma \text{ έχω } \hat{B} = \hat{\Gamma} \text{ οπότε θα ισχύει } A\Gamma = AB$

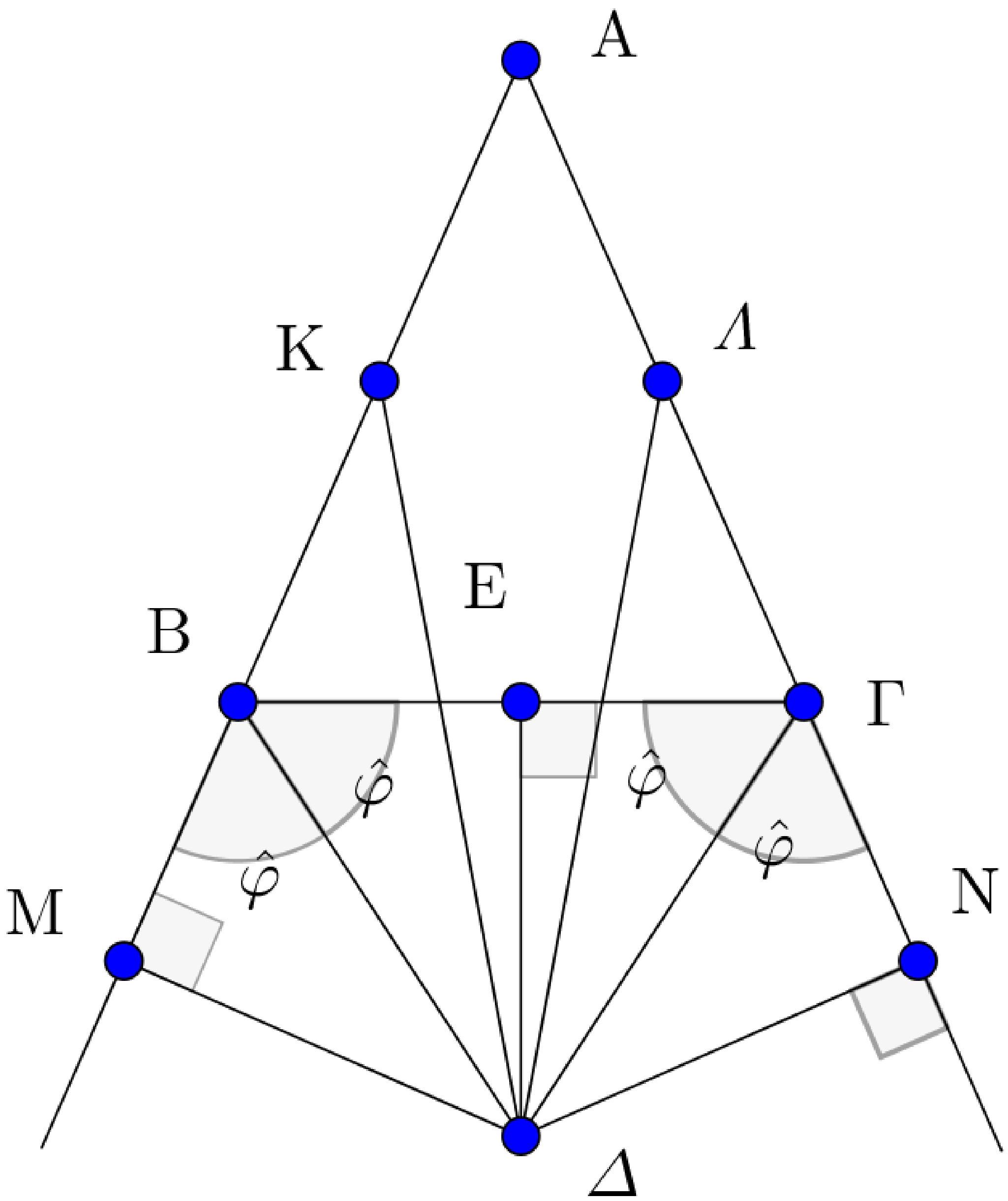
(Γιατί σε δυο ίσα τρίγωνα ή στο ίδιο τρίγωνο απέναντι απο ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές)

Συνεπώς το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΒΓ.

6.

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma\,(AB = A\Gamma)$ και Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι αν οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του Β και Γ τέμνονται στο σημείο Δ, τότε ΔΚΛ είναι ισοσκελές

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$AB = A\Gamma$ $B\Delta$: Διχοτόμος της $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$ $\Gamma\Delta$: Διχοτόμος της $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ K : Μέσο του ΑΒ K : Μέσο του ΑΓ $\Delta M \perp AB, \Delta E \perp B\Gamma, \Delta N \perp A\Gamma$	ΔΚΛ : Ισοσκελές



Ε*πειδή* ΒΔ *διχοτόμος της* $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M}$ *και* $\Delta\mathrm{M} \perp \mathrm{BM}, \Delta\mathrm{E} \perp \mathrm{B}\Gamma$ *θα έχω*:

$$\Delta\mathrm{M} = \Delta\mathrm{E}\,(1)\left(\begin{array}{l}\Gamma\textit{ιατί κάθε σημείο της διχοτόμου μιας ισαπέχει απο τις}\\ \textit{πλευρές της γωνίας}\end{array}\right)$$

Επειδή $\Gamma\Delta$ *διχοτόμος της* $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{N}$ *και* $\Delta\mathrm{E} \perp \mathrm{B}\Gamma, \Delta\mathrm{N} \perp \Gamma\mathrm{N}$ *θα έχω*:

$$\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{N}\,(2)\left(\begin{array}{l}\textit{Γιατί κάθε σημείο της διχοτόμου μιας ισαπέχει απο τις}\\ \textit{πλευρές της γωνίας}\end{array}\right)$$

Απο *τις σχέσεις* $(1),(2)$ *θα έχω*:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\mathrm{M} = \Delta\mathrm{E}\\ \Delta\mathrm{N} = \Delta\mathrm{E}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\mathrm{M} = \Delta\mathrm{N}\,(3)$$

Σ*το ισοσκελές τρίγωνο* $\mathrm{AB}\Gamma\,(\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma)$ *θα έχω* $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}\,(4)$

(Ω*ς προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου*)

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\mathrm{B}}_{\varepsilon\xi} = 180^0 - \hat{\mathrm{B}}\\ \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 180^0 - \hat{\Gamma}\\ \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\mathrm{B}}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}\,(5)\,(\textit{Ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών})$$

Επειδή $\mathrm{B}\Delta$ *διχοτόμος της γωνίας* $\hat{\mathrm{B}}_{\varepsilon\xi}$ *θα έχω*:

$$\mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \frac{\hat{\mathrm{B}}_{\varepsilon\xi}}{2}\,(6)$$

Επειδή $\Gamma\Delta$ *διχοτόμος της γωνίας* $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ *θα έχω*:

$$\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{N} = \frac{\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}}{2}\,(7)$$

Απο *τις σχέσεις* $(5),(6),(7)$ *θα έχω*:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \dfrac{\hat{\mathrm{B}}_{\varepsilon\xi}}{2}\\ \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{N} = \dfrac{\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}}{2}\\ \hat{\mathrm{B}}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{N}\,(8)\,(\textit{Ως μισά ίσων γωνιών})$$

Σ*υγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα* $\Delta\overset{\triangle}{\mathrm{M}}\mathrm{B}$ *και* $\Delta\overset{\triangle}{\mathrm{N}}\Gamma\left(\Delta\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B} = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{N} = 90^0\right)$

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{N}\,(8)\\ (\mathrm{II})\,\Delta\mathrm{M} = \Delta\mathrm{N}\,(3)\end{array}\right\}$$

Ο*πότε* $\Delta\overset{\triangle}{\mathrm{M}}\mathrm{B} = \Delta\overset{\triangle}{\mathrm{N}}\Gamma$. Σ*υνεπώς* $\mathrm{MB} = \Gamma\mathrm{N}\,(9)$

$\text{Επειδή Κ μέσο της ΑΒ θα έχω}: \mathrm{KA} = \mathrm{KB} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2} \,(10)$

$\text{Επειδή Λ μέσο της ΑΓ θα έχω}: \Lambda\mathrm{A} = \Lambda\Gamma = \dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{2} \,(11)$

$\text{Έχω}: \mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma\,(12)\,(\text{Υπόθεση})$

$\text{Απο τις σχέσεις } (10),(11),(12) \text{ θα έχω}:$

$$\left.\begin{cases} \mathrm{KB} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2} \\ \Lambda\Gamma = \dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{2} \\ \mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{KB} = \Lambda\Gamma\,(13) \begin{pmatrix} \text{Ως μισά ίσων ευθυγράμμων} \\ \text{τμημάτων} \end{pmatrix}$$

$\text{Απο τις σχέσεις } (13),(9) \text{ θα έχω}:$

$$\left.\begin{cases} \mathrm{KB} = \Lambda\Gamma \\ \mathrm{MB} = \Gamma\mathrm{N} \end{cases}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} \mathrm{KB} + \mathrm{MB} = \Lambda\Gamma + \Gamma\mathrm{N} \overset{\substack{\mathrm{KB+MB=MK} \\ \Lambda\Gamma+\Gamma\mathrm{N}=\Lambda\mathrm{N}}}{\Longrightarrow}$$

$\mathrm{MK} = \Lambda\mathrm{N}\,(14)\,(\text{Ως άθροισμα ίσων ευθυγράμμων τμημάτων})$

$\text{Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα } \overset{\triangle}{\Delta\mathrm{MK}} \text{ και } \overset{\triangle}{\Delta\mathrm{N}\Lambda} \left(\Delta\hat{\mathrm{M}}\mathrm{K} = \Delta\hat{\mathrm{N}}\Lambda = 90^0 \right)$

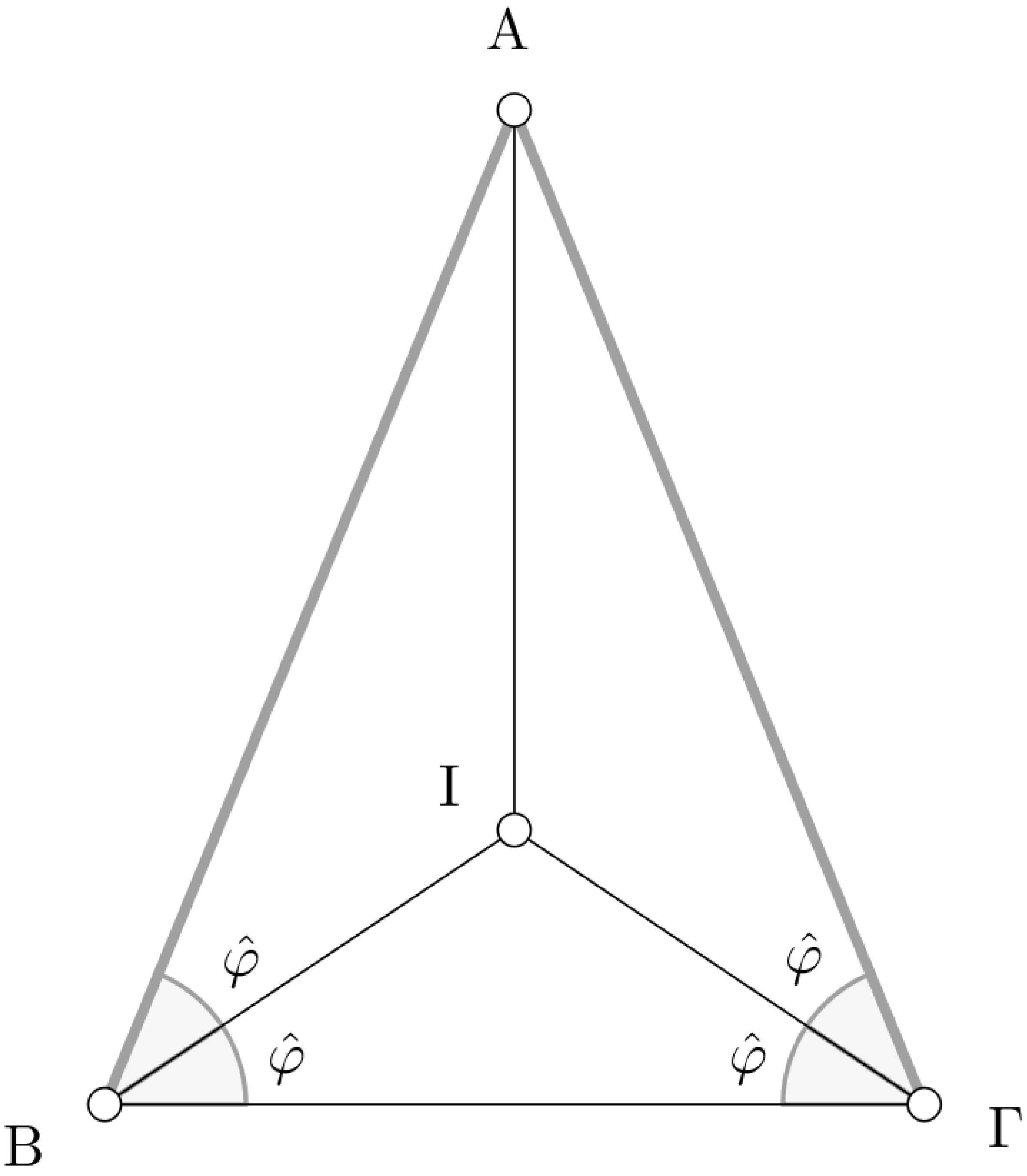
$$\left.\begin{cases} (\mathrm{I})\,\Delta\mathrm{M} = \Delta\mathrm{N}\,(3) \\ \mathrm{MK} = \Lambda\mathrm{N}\,(14) \end{cases}\right\}$$

$\text{Οπότε } \overset{\triangle}{\Delta\mathrm{MK}} = \overset{\triangle}{\Delta\mathrm{N}\Lambda}.\text{Συνεπώς } \Delta\mathrm{K} = \Delta\Lambda.\text{Άρα το τρίγωνο } \Delta\mathrm{K}\Lambda \text{ είναι}$
ισοσκελές

7.

$\text{Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο } \mathrm{AB}\Gamma\,(\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma) \text{ και Ι το σημείο τομής}$ $\text{των διχοτόμων των γωνιών } \hat{\mathrm{B}},\hat{\Gamma}.\text{Να αποδείξετε ότι}:$ $(\mathrm{I})\,\text{Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές}$ $(\mathrm{II})\,\text{Η ΑΙ είναι διχοτόμος της } \hat{\mathrm{A}}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma$ $\mathrm{BI}: \text{Διχοτόμος της } \hat{\mathrm{B}}$ $\Gamma\mathrm{I}: \text{Διχοτόμος της } \hat{\Gamma}$	$(\mathrm{I})\,\mathrm{BI}\Gamma: \text{Ισοσκελές}$ $(\mathrm{II})\,\mathrm{AI}: \text{Διχοτόμος της } \hat{\mathrm{A}}$



$(\mathrm{I})\,\Sigma\textit{το ισοσκελές τρίγωνο}\ \mathrm{AB\Gamma}\,(\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma})\ \textit{έχω}\ \hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}\,(1)$

$(\Omega\textit{ς γωνίες προσκείμενες στην βάση ισοσκελούς τριγώνου})$

$\mathrm{E}\textit{πειδή}\ \mathrm{BI}\ \textit{διχοτόμος της}\ \hat{\mathrm{B}}\ \textit{θα έχω}:\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I}=\mathrm{I}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{2}\,(2)$

$\mathrm{E}\textit{πειδή}\ \Gamma\mathrm{I}\ \textit{διχοτόμος της}\ \hat{\Gamma}\ \textit{θα έχω}:\ \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{I}=\mathrm{I}\hat{\Gamma}\mathrm{B}=\dfrac{\hat{\Gamma}}{2}\,(3)$

$A\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (1),(2),(3)\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{cases} \mathrm{I}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{2} \\ \mathrm{I}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \dfrac{\hat{\Gamma}}{2} \\ \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{I}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{I}\hat{\Gamma}\mathrm{B}\,(4)\,(\Omega\varsigma\ \mu\iota\sigma\acute{\alpha}\ \acute{\iota}\sigma\omega\nu\ \gamma\omega\nu\iota\acute{\omega}\nu)$$

$E\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \mathrm{I}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{I}\hat{\Gamma}\mathrm{B}\ \pi\rho o\kappa\acute{\upsilon}\pi\tau\varepsilon\iota\ \acute{o}\tau\iota\ \tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \overset{\Delta}{\mathrm{BI\Gamma}}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \iota\sigma o\sigma\kappa\varepsilon\lambda\acute{\varepsilon}\varsigma.$

$(\mathrm{II})\ \Sigma\tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \overset{\Delta}{\mathrm{BI\Gamma}}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{I}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{I}\hat{\Gamma}\mathrm{B}\ o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \mathrm{BI} = \mathrm{I\Gamma}\,(5)$

$\left(\begin{matrix}\Gamma\iota\alpha\tau\iota\ \sigma\tau o\ \acute{\iota}\delta\iota o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \acute{\eta}\ \sigma\varepsilon\ \delta\upsilon o\ \acute{\iota}\sigma\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi o \\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa o\nu\tau\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\end{matrix}\right)$

$A\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (1),(2),(3)\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{cases} \mathrm{I}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{2} \\ \mathrm{I}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \dfrac{\hat{\Gamma}}{2} \\ \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{I}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \mathrm{I}\hat{\Gamma}\mathrm{A}\,(5)\,(\Omega\varsigma\ \mu\iota\sigma\acute{\alpha}\ \acute{\iota}\sigma\omega\nu\ \gamma\omega\nu\iota\acute{\omega}\nu)$$

$\Sigma\upsilon\gamma\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\alpha\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\alpha\ \overset{\Delta}{\mathrm{ABI}}\ \kappa\alpha\iota\ \overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma I}}$

$$\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\ \mathrm{BI} = \mathrm{I\Gamma}\,(5) \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}\,(\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta) \\ (\mathrm{III})\ \mathrm{I}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \mathrm{I}\hat{\Gamma}\mathrm{A} \end{Bmatrix}$$

$O\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \overset{\Delta}{\mathrm{ABI}} = \overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma I}}\,(\Pi\Gamma\Pi).\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{I} = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{I}.$

$\acute{A}\rho\alpha\ \eta\ \mathrm{AI}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \hat{\mathrm{A}}$

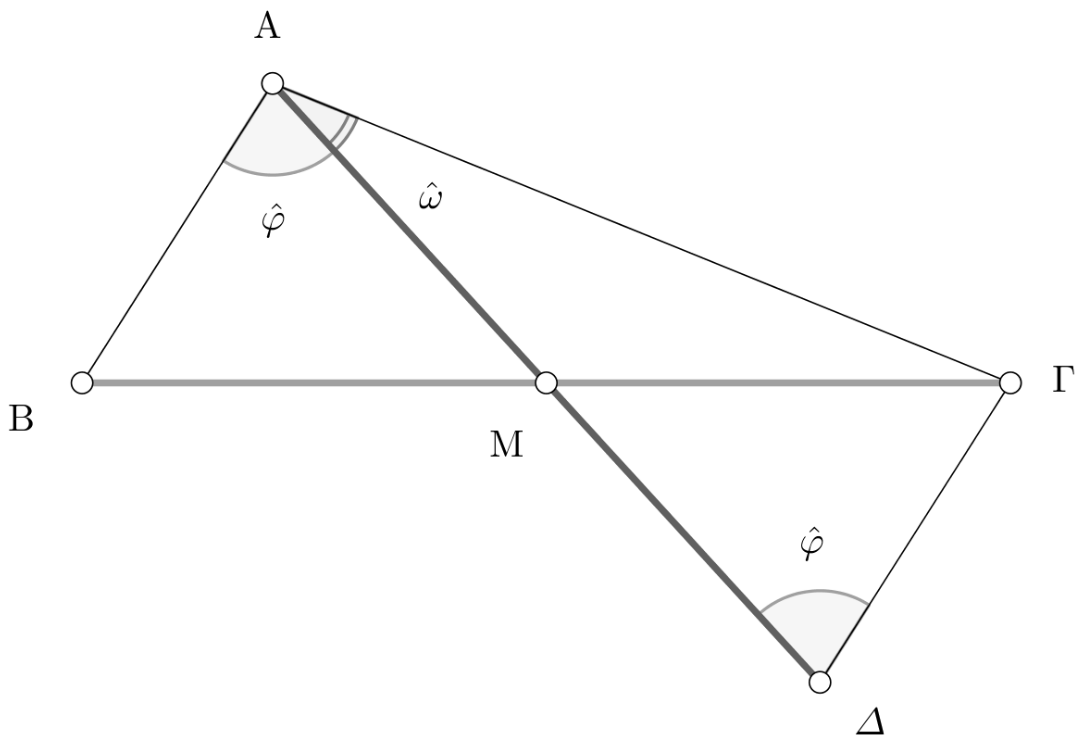
8.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{AB\Gamma}\ \mu\varepsilon\ \mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}\ \kappa\alpha\iota\ \eta\ \delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma\ \mathrm{AM}.\ \mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota:$

$(\mathrm{I})\ \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} > \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$

$(\mathrm{II})\ \dfrac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2}$

$(\mathrm{III})\ \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau,\ \tau = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\ (\tau:\mathrm{H}\mu\iota\pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma)$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}$ M: Το *μέσο της* ΒΓ ΓΙ: *Διχοτόμος της* Γ	$(\mathrm{I})\, \mathrm{M\hat{A}B} > \mathrm{M\hat{A}\Gamma}$ $(\mathrm{II})\, \dfrac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2}$ $(\mathrm{III})\, \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau, \tau = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$

Στην προέκταση του ΑΜ *παίρνω σημείο* Δ *τέτοιο ώστε* $\mathrm{M\Delta} = \mathrm{AM}$

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{AMB}}$ *και* $\overset{\triangle}{\mathrm{\Delta M\Gamma}}$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\, \mathrm{AM} = \mathrm{M\Delta}\,(\text{Απο κατασκευή}) \\ (\mathrm{II})\, \mathrm{BM} = \mathrm{M\Gamma}\,(\text{Γιατί Μ μέσο της ΒΓ}) \\ (\mathrm{III})\, \mathrm{A\hat{M}B} = \mathrm{\Gamma\hat{M}\Delta}\,(\text{Ως κατακοτρυφήν})\end{array}\right\}$$

Οπότε: $\overset{\triangle}{\mathrm{AMB}} = \overset{\triangle}{\mathrm{\Delta M\Gamma}}\,(\Pi\Gamma\Pi)$. *Συνεπώς* $\mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{AB}\,(1)$ *και* $\mathrm{M\hat{A}B} = \mathrm{M\hat{\Delta}\Gamma}\,(2)$

$$\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} \xRightarrow{\mathrm{AB}=\mathrm{\Gamma\Delta}} \mathrm{\Gamma\Delta} < \mathrm{A\Gamma}\,(3)$$

$\Sigma\tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{A\Gamma\Delta}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{\Gamma\Delta} < \mathrm{A\Gamma}\ o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{\Delta}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{\Gamma} < \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{\Gamma}\ (4)$

$\left(\begin{array}{l}\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \sigma\varepsilon\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \mu\varepsilon\gamma\alpha\lambda\acute{\upsilon}\tau\varepsilon\rho\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \mu\varepsilon\gamma\alpha\lambda\acute{\upsilon}\tau\varepsilon\rho\eta\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\end{array}\right)$

$$\mathrm{\Delta}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{\Gamma} < \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{\Gamma} \overset{\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{\Gamma}=\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}}{\Longrightarrow} \mathrm{\Delta}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{\Gamma} < \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$$

Τριγωνική ανισότητα
(I) Σε κάθε τρίγωνο η διαφορά δυο πλευρών είναι μικρότερη απο την τρίτη πλευρα
(II) Σε κάθε τρίγωνο κάθε πλευρά είναι μικρότερη απο το άθροισμα των δυο άλλων

Οπότε απο την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Gamma M}}$ θα έχω:

$\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{\Gamma\Delta} < \mathrm{A\Delta} < \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma\Delta}\ (5)$

Επειδή $\mathrm{AM} = \mathrm{M\Delta} = \mu_\alpha$ θα έχω:

$$\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AM} + \mathrm{M\Delta} \overset{\mathrm{AM}=\mathrm{M\Delta}=\mu_\alpha}{=} \mu_\alpha + \mu_\alpha = 2\mu_\alpha$$

Οπότε: $\mathrm{A\Delta} = 2\mu_\alpha\ (6)$

Έχω: $\mathrm{A\Gamma} = \beta\ (7)$

Έχω: $\mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{AB} = \gamma \Rightarrow \mathrm{\Gamma\Delta} = \gamma\ (8)$

Απο τις σχέσεις (5),(6),(7),(8) θα έχω:

$$\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{\Gamma\Delta} < \mathrm{A\Delta} < \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma\Delta} \overset{\substack{\mathrm{A\Delta}=2\mu_\alpha\\ \mathrm{A\Gamma}=\beta\\ \mathrm{\Gamma\Delta}=\gamma}}{\Longrightarrow} \beta-\gamma < 2\mu_\alpha < \beta+\gamma \Rightarrow$$

$$\frac{\beta-\gamma}{2} < \frac{2\mu_\alpha}{2} < \frac{\beta+\gamma}{2} \Rightarrow \frac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$$

(III) Ομοίως ισχύει $\mu_\beta < \dfrac{\alpha+\gamma}{2}, \mu_\gamma < \dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$$\underline{\left.\begin{cases}\mu_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2}\\ \mu_\beta < \dfrac{\alpha+\gamma}{2}\\ \mu_\gamma < \dfrac{\alpha+\beta}{2}\end{cases}\right\}}(+)$$

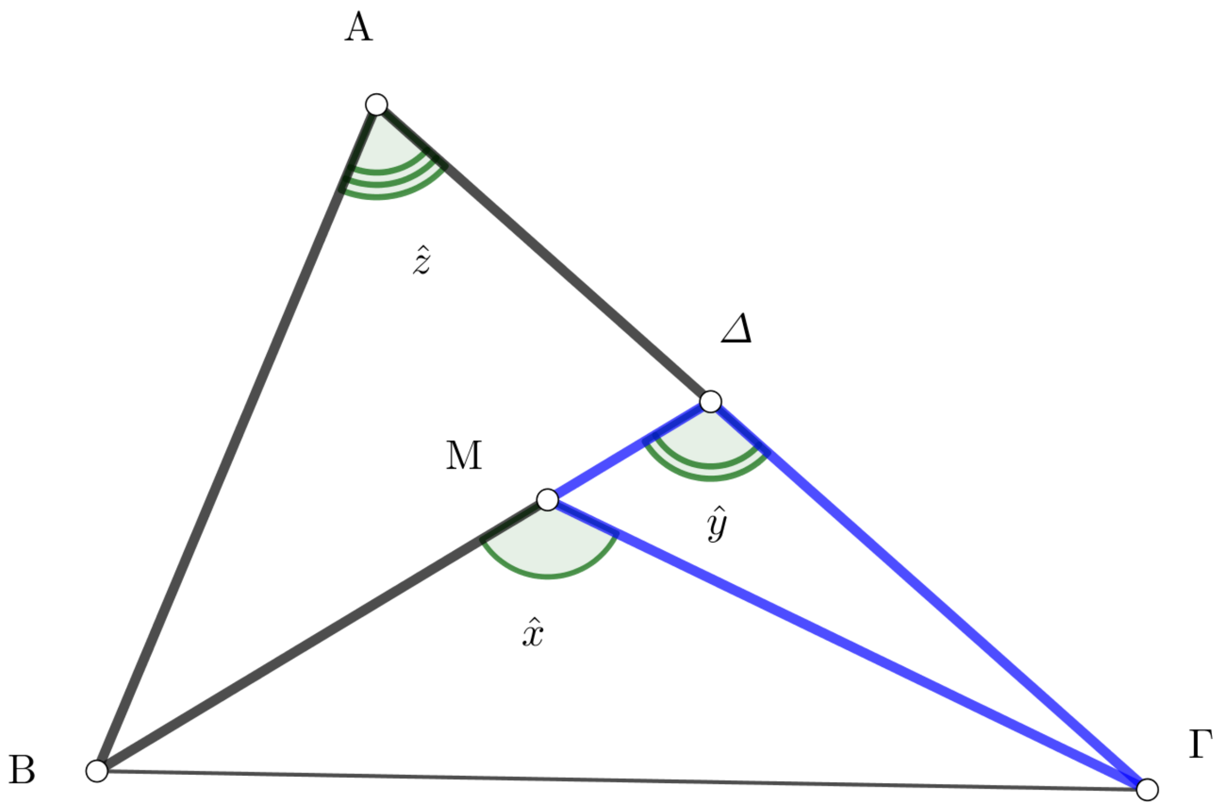
$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow$$

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \frac{2\alpha+2\beta+2\gamma}{2} \Rightarrow \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \frac{\cancel{2}(\alpha+\beta+\gamma)}{\cancel{2}} \Rightarrow$$

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \alpha+\beta+\gamma \overset{\alpha+\beta+\gamma=2\tau}{\Longrightarrow} \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$$

9.

Αν Μ *ένα εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου* ΑΒΓ, *να αποδειχτεί ότι*:
$(\mathrm{I})\, \mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma > \hat{\mathrm{A}}$ $(\mathrm{II})\, \mathrm{MB} + \mathrm{M}\Gamma < \mathrm{AB} + \mathrm{A}\Gamma$



(I) *Θέτω*: $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = \hat{x},\ \mathrm{M}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{y},\ \hat{\mathrm{A}} = \hat{z}$

Η *γωνία* $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$ *είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου* $\mathrm{M}\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$. *Συνεπώς θα μεγαλύτερη απο τις δυο απέναντι εσωτερικές γωνίες του τριγώνου.*
Ο*πότε θα ισχύει*:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma > \mathrm{M}\hat{\Delta}\Gamma \overset{\substack{\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = \hat{x} \\ \mathrm{M}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{y}}}{\Longrightarrow} \hat{x} > \hat{y}\,(1)$$

Η *γωνία* $\mathrm{M}\hat{\Delta}\Gamma$ *είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου* $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Delta$. *Συνεπώς θα μεγαλύτερη απο τις δυο απέναντι εσωτερικές γωνίες του τριγώνου.*
Ο*πότε θα ισχύει*:

$$\mathrm{M}\hat{\Delta}\Gamma > \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta \overset{\substack{\mathrm{M}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{y} \\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \hat{\mathrm{A}} = \hat{z}}}{\Longrightarrow} \hat{y} > \hat{z}\,(2)$$

$\text{Απο } \textit{τις σχέσεις } (1),(2) \textit{ θα έχω}:$

$\hat{x} > \hat{y} > \hat{z} \Rightarrow \hat{x} > \hat{z} \overset{\substack{\text{B}\hat{\text{M}}\Gamma = \hat{x} \\ \hat{\text{A}} = \hat{z}}}{\Longrightarrow} \text{B}\hat{\text{M}}\Gamma > \hat{\text{A}}$

(ΙΙ) Γ*νωρίζω απο την τριγωνική ανισότητα σε* <u>*κάθε τρίγωνο κάθε πλευρά είναι μικρότερη απο το άθροισμα των δυο άλλων*</u>

Ο*πότε εφαρμόζω την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο* $\overset{\triangle}{\text{ABΔ}}$ *για την πλευρά* ΒΔ:

$\text{BΔ} < \text{AB} + \text{BΔ} \overset{\text{BΔ}=\text{BM}+\text{MΔ}}{\Longrightarrow} \boxed{\text{BM} + \text{MΔ} < \text{AB} + \text{AΔ}}\ (1)$

Ε*φαρμόζω την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο* $\overset{\triangle}{\text{MΔΓ}}$ *για την πλευρά* ΜΓ:

$\boxed{\text{MΓ} < \text{MΔ} + \text{ΔΓ}}\ (2)$

Π*ροσθέτω κατα μέλη τις σχέσεις* (1),(2):

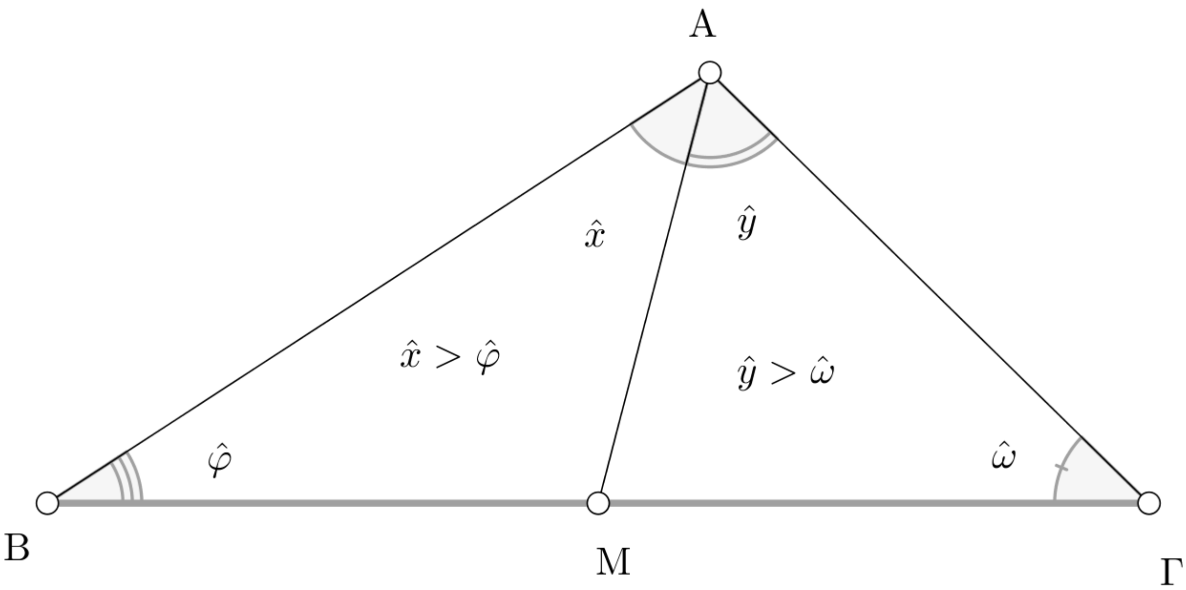
$$\left.\begin{cases} \text{BM} + \text{MΔ} < \text{AB} + \text{AΔ} \\ \text{MΓ} < \text{MΔ} + \text{ΔΓ} \end{cases}\right\}(+)$$

$$\text{BM} + \cancel{\text{MΔ}} + \text{MΓ} < \text{AB} + \text{AΔ} + \cancel{\text{MΔ}} + \text{ΔΓ} \Rightarrow \text{BM} + \text{MΓ} < \text{AB} + \text{AΔ} + \text{ΔΓ}$$

$$\overset{\text{AΔ}+\text{ΔΓ}=\text{AΓ}}{\Longrightarrow} \text{BM} + \text{MΓ} < \text{AB} + \text{AΓ}$$

10.

Α*ν σε ένα τρίγωνο* ΑΒΓ *ισχύει* $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$, *να αποδείξετε ότι* $\hat{\text{A}} > \hat{\text{B}} + \hat{\Gamma}$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AM} < \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ M : Το *μέσο της* $\mathrm{B\Gamma}$ $\mathrm{A\hat{B}M} = \hat{\varphi}, \mathrm{B\hat{A}M} = \hat{x}, \mathrm{M\hat{A}\Gamma} = \hat{y}, \mathrm{A\hat{\Gamma}M} = \hat{\omega}$	$\hat{\mathrm{A}} > \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}$

Θέτω: $\mathrm{A\hat{B}M} = \hat{\varphi}, \mathrm{B\hat{A}M} = \hat{x}, \mathrm{M\hat{A}\Gamma} = \hat{y}, \mathrm{A\hat{\Gamma}M} = \hat{\omega}$

Ε*πειδή* Μ *μέσο της* ΒΓ *θα έχω*:

$$\mathrm{BM} = \mathrm{M\Gamma} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} \quad (1)$$

$$\acute{E}\chi\omega: \mu_\alpha < \frac{\alpha}{2} \xRightarrow[\alpha=\mathrm{B\Gamma}]{\mu_\alpha=\mathrm{AM}} \mathrm{AM} < \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} \xRightarrow{\mathrm{M\Gamma}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}} \mathrm{AM} < \mathrm{M\Gamma} \quad (2)$$

$$\acute{E}\chi\omega: \mu_\alpha < \frac{\alpha}{2} \xRightarrow{\mu_\alpha=\mathrm{AM}} \mathrm{AM} < \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} \xRightarrow{\mathrm{MB}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}} \mathrm{AM} < \mathrm{MB} \quad (3)$$

Γ*νωρίζω οτι* <u>*σε ένα τρίγωνο απέναντι απο την μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία*</u>

Σ*το τρίγωνο* $\overset{\triangle}{\mathrm{ABM}}$ *έχω* ΑΜ < ΜΓ. Ο*πότε ισχύει*:

$$\mathrm{B\hat{A}M} > \mathrm{A\hat{B}M} \overset{\substack{\mathrm{B\hat{A}M}=\hat{x} \\ \mathrm{A\hat{B}M}=\hat{\varphi}}}{\Rightarrow} \boxed{\hat{x} > \hat{\varphi}} \quad (4)$$

Σ*το τρίγωνο* $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Gamma M}}$ *έχω* ΑΜ < ΜΓ. Ο*πότε ισχύει*:

$$\mathrm{M\hat{A}\Gamma} > \mathrm{A\hat{\Gamma}M} \overset{\substack{\mathrm{B\hat{A}M}=\hat{x} \\ \mathrm{A\hat{B}M}=\hat{\varphi}}}{\Rightarrow} \boxed{\hat{y} > \hat{\omega}} \quad (5)$$

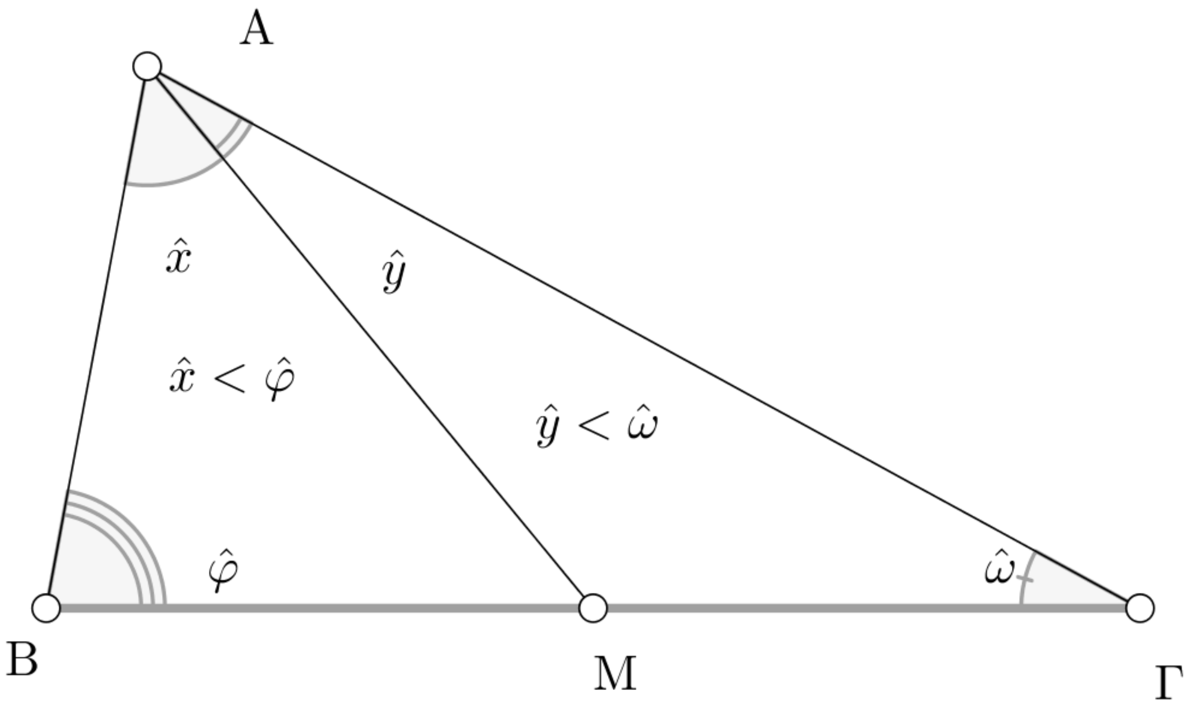
Π*ροσθέτω κατα μέλη τις σχέσεις* (4),(5):

$$\left.\begin{cases} \hat{x} > \hat{\varphi} \\ \hat{y} > \hat{\omega} \end{cases}\right\} (+)$$

$$\hat{x} + \hat{y} > \hat{\varphi} + \hat{\omega} \xRightarrow{\substack{\hat{x}+\hat{y}=\hat{\mathrm{A}} \\ \hat{\varphi}=\hat{\mathrm{B}} \\ \hat{\omega}=\hat{\Gamma}}} \hat{\mathrm{A}} > \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}$$

11.

Α*ν σε ένα τρίγωνο* ΑΒΓ *ισχύει* $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$, *να αποδείξετε ότι* $\hat{\mathrm{A}} < \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AM} > \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ M : Το *μέσο της* ΒΓ $\mathrm{A\hat{B}M} = \hat{\varphi}, \mathrm{B\hat{A}M} = \hat{x}, \mathrm{M\hat{A}\Gamma} = \hat{y}, \mathrm{A\hat{\Gamma}M} = \hat{\omega}$	$\hat{\mathrm{A}} < \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega: \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M} = \hat{\varphi}, \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M} = \hat{x}, \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \hat{y}, \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{M} = \hat{\omega}$

Επειδή Μ *μέσο της* ΒΓ *θα έχω*:

$$\mathrm{BM} = \mathrm{M}\Gamma = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{2} (1)$$

$$\acute{E}\chi\omega: \mu_\alpha > \frac{\alpha}{2} \overset{\substack{\mu_\alpha = \mathrm{AM} \\ \alpha = \mathrm{B}\Gamma}}{\Longrightarrow} \mathrm{AM} > \frac{\mathrm{B}\Gamma}{2} \overset{\mathrm{M}\Gamma = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{2}}{\Longrightarrow} \mathrm{AM} > \mathrm{M}\Gamma (2)$$

$$\acute{E}\chi\omega: \mu_\alpha > \frac{\alpha}{2} \overset{\mu_\alpha = \mathrm{AM}}{\Longrightarrow} \mathrm{AM} > \frac{\mathrm{B}\Gamma}{2} \overset{\mathrm{MB} = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{2}}{\Longrightarrow} \mathrm{AM} > \mathrm{MB} (3)$$

Γ*νωρίζω οτι* <u>*σε ένα τρίγωνο απέναντι απο την μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία*</u>

Σ*το τρίγωνο* $\overset{\triangle}{\mathrm{ABM}}$ *έχω* ΑΜ > ΜΓ. Ο*πότε ισχύει*:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M} < \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M} \overset{\substack{\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M} = \hat{x} \\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M} = \hat{\varphi}}}{\Rightarrow} \boxed{\hat{x} < \hat{\varphi}} (4)$$

Σ*το τρίγωνο* $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Gamma M}}$ *έχω* ΑΜ > ΜΓ. Ο*πότε ισχύει*:

$$\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Gamma < \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{M} \overset{\substack{\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M} = \hat{x} \\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M} = \hat{\varphi}}}{\Rightarrow} \boxed{\hat{y} < \hat{\omega}} (5)$$

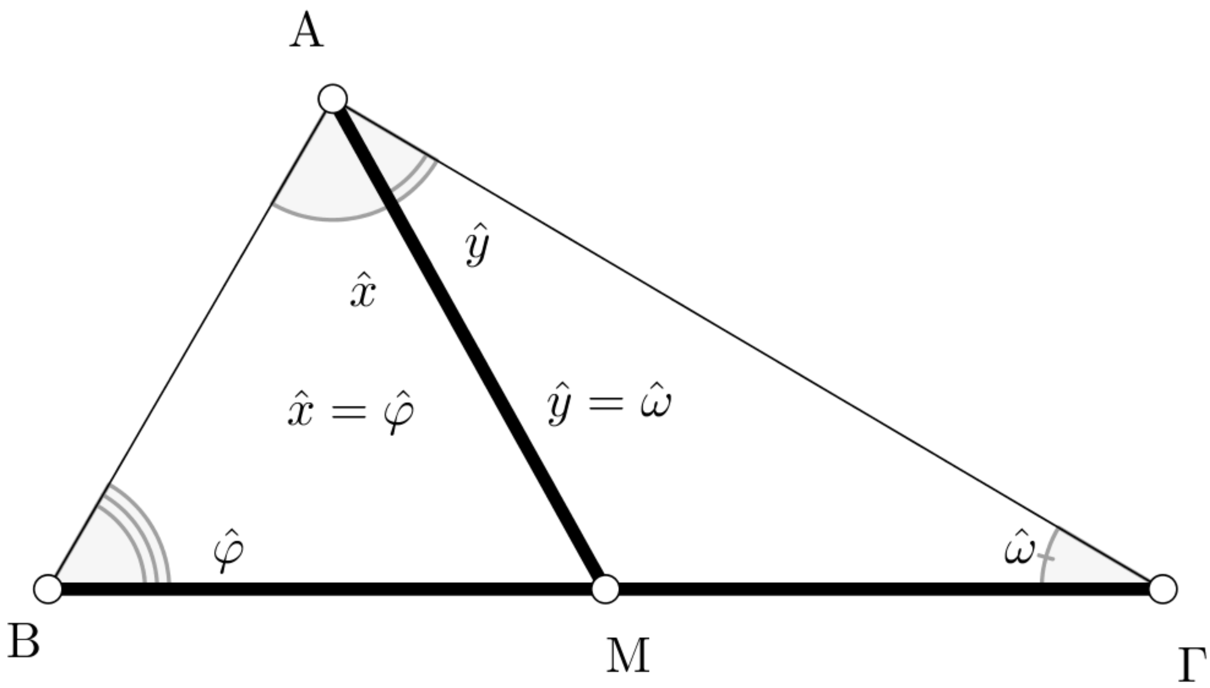
Π*ροσθέτω κατα μέλη τις σχέσεις* (4),(5):

$$\left.\begin{cases} \hat{x} < \hat{\varphi} \\ \hat{y} < \hat{\omega} \end{cases}\right\} (+)$$

$$\hat{x} + \hat{y} < \hat{\varphi} + \hat{\omega} \overset{\substack{\hat{x}+\hat{y} = \hat{\mathrm{A}} \\ \hat{\varphi} = \hat{\mathrm{B}} \\ \hat{\omega} = \hat{\Gamma}}}{\Longrightarrow} \hat{\mathrm{A}} < \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}$$

12.

Α*ν σε ένα τρίγωνο* ΑΒΓ *ισχύει* $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$, *να αποδείξετε ότι* $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ Μ : Το *μέσο της* ΒΓ $\mathrm{A\hat{B}M} = \hat{\varphi}, \mathrm{B\hat{A}M} = \hat{x}, \mathrm{M\hat{A}\Gamma} = \hat{y}, \mathrm{A\hat{\Gamma}M} = \hat{\omega}$	$\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega: \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M} = \hat{\varphi}, \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M} = \hat{x}, \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \hat{y}, \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{M} = \hat{\omega}$

Επειδή Μ μέσο της ΒΓ θα έχω:

$$\mathrm{BM} = \mathrm{M\Gamma} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} \quad (1)$$

$$\text{Έχω}: \mu_\alpha = \frac{\alpha}{2} \xRightarrow[\alpha=\mathrm{B\Gamma}]{\mu_\alpha=\mathrm{AM}} \mathrm{AM} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} \xRightarrow{\mathrm{M\Gamma}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}} \mathrm{AM} = \mathrm{M\Gamma} \quad (2)$$

$$\text{Έχω}: \mu_\alpha = \frac{\alpha}{2} \xRightarrow{\mu_\alpha=\mathrm{AM}} \mathrm{AM} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} \xRightarrow{\mathrm{MB}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}} \mathrm{AM} = \mathrm{MB} \quad (3)$$

Γνωρίζω οτι <u>σε ένα τρίγωνο απέναντι απο ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες</u>

Στο τρίγωνο $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\mathrm{M}\ (\mathrm{AM} = \mathrm{M\Gamma})$ θα έχω:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M} \begin{pmatrix} \text{Ως γωνίες προσκείμενες στην βάση} \\ \text{ισοσκελούς τριγώνου} \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow[\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M}=\hat{\varphi}]{\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M}=\hat{x}} \boxed{\hat{x} = \hat{\varphi}} \quad (4)$$

Στο τρίγωνο $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\Gamma}\mathrm{M}\ (\mathrm{AM} = \mathrm{M\Gamma})$ θα έχω:

$$\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{M} \begin{pmatrix} \text{Ως γωνίες προσκείμενες στην βάση} \\ \text{ισοσκελούς τριγώνου} \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow[\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M}=\hat{\varphi}]{\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M}=\hat{x}} \boxed{\hat{y} = \hat{\omega}} \quad (5)$$

Προσθέτω κατα μέλη τις σχέσεις (4),(5):

$$\left.\begin{cases} \hat{x} = \hat{\varphi} \\ \hat{y} = \hat{\omega} \end{cases}\right\} (+)$$

$$\hat{x} + \hat{y} = \hat{\varphi} + \hat{\omega} \xRightarrow{\hat{x}+\hat{y}=\hat{\mathrm{A}},\ \hat{\varphi}=\hat{\mathrm{B}},\ \hat{\omega}=\hat{\Gamma}} \hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}$$

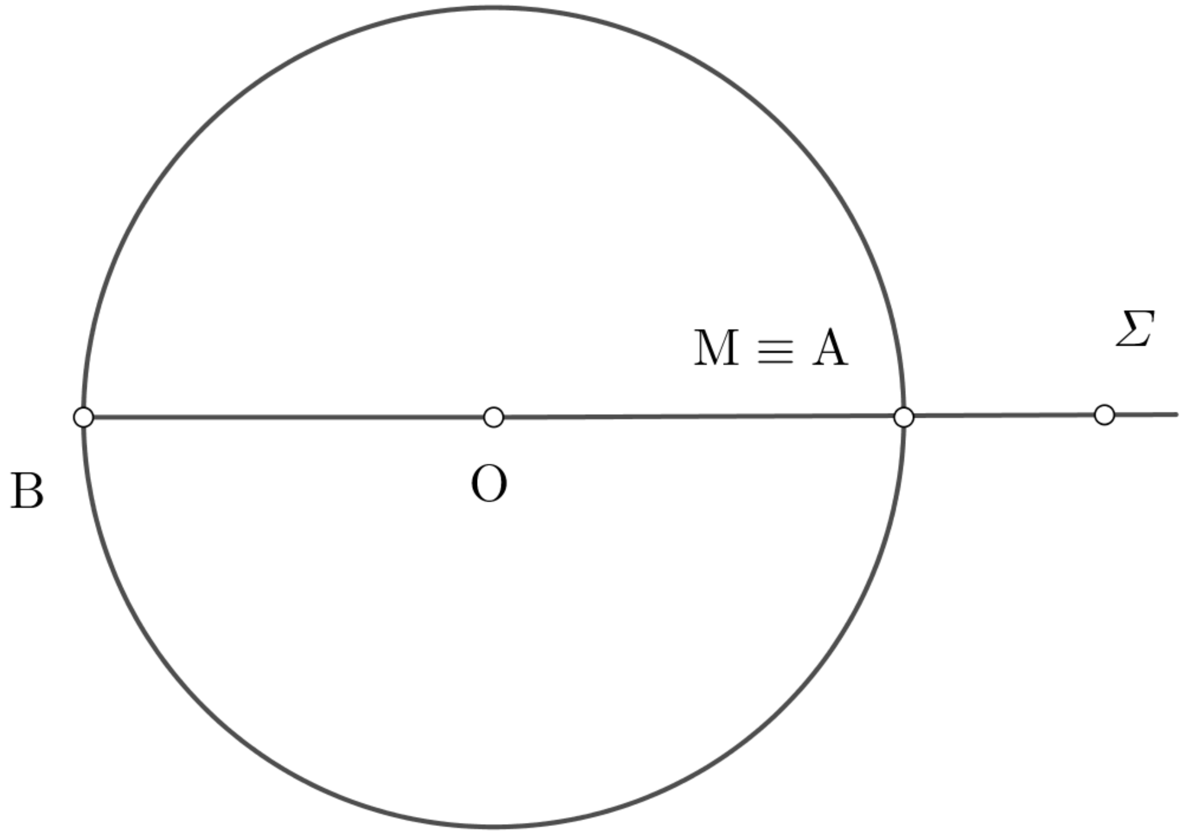
13.

Έστω κύκλος (O, R) διαμέτρου ΑΒ και σημείο Σ της ημιευθείας ΟΑ.
Για κάθε σημείο Μ του κύκλου να αποδειχθεί ότι:

$$\Sigma\mathrm{A} \le \Sigma\mathrm{M} \le \Sigma\mathrm{B} \begin{pmatrix} \text{Το τμημα ΣΑ λέγεται απόσταση του Σ} \\ \text{απο τον κύκλο} \end{pmatrix}$$

$$\Delta\iota\alpha\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\iota\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma: \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{I})\,\mathrm{M} \equiv \mathrm{A} \\ (\mathrm{II})\,\mathrm{M} \equiv \mathrm{B} \\ (\mathrm{III})\,\mathrm{M} \not\equiv \mathrm{A}, \mathrm{M} \not\equiv \mathrm{B} \end{array} \right\}$$

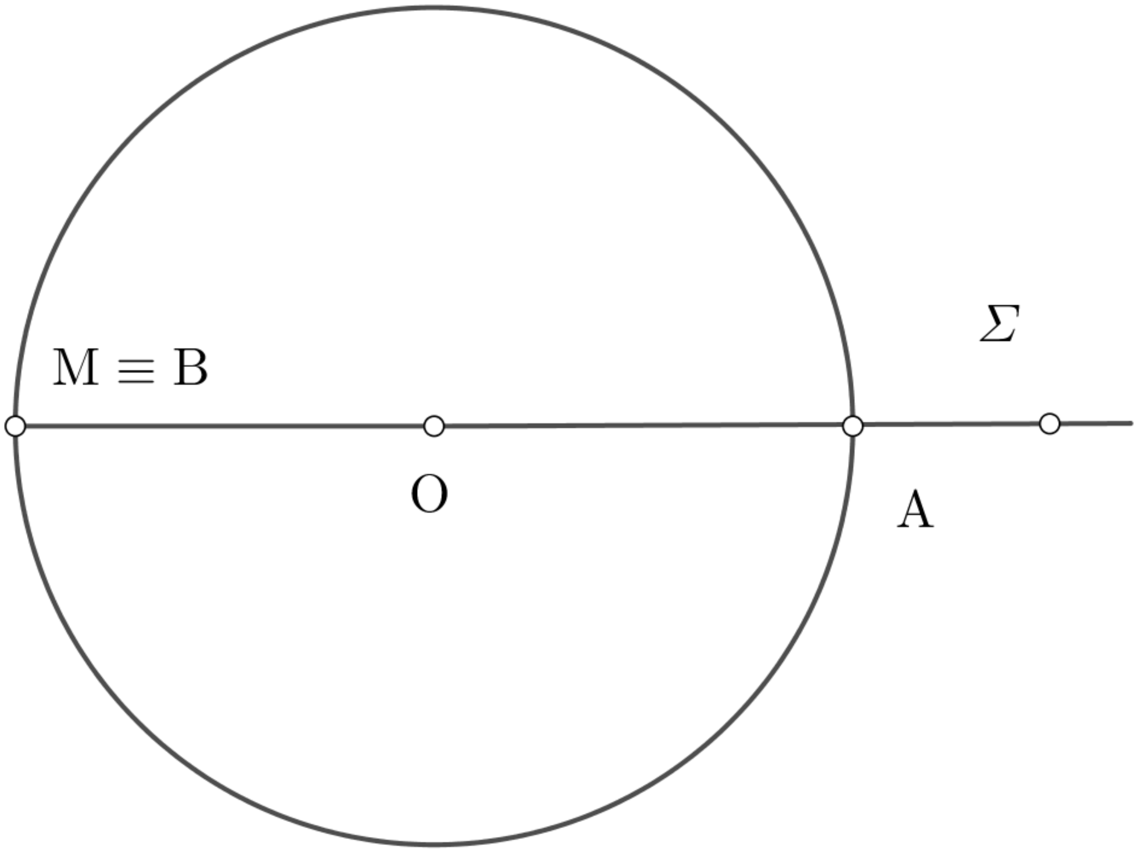
$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\ (\mathrm{I}):$



$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \Sigma \equiv \mathrm{A}\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\Sigma\mathrm{A} = \Sigma\mathrm{M} < \Sigma\mathrm{B}$

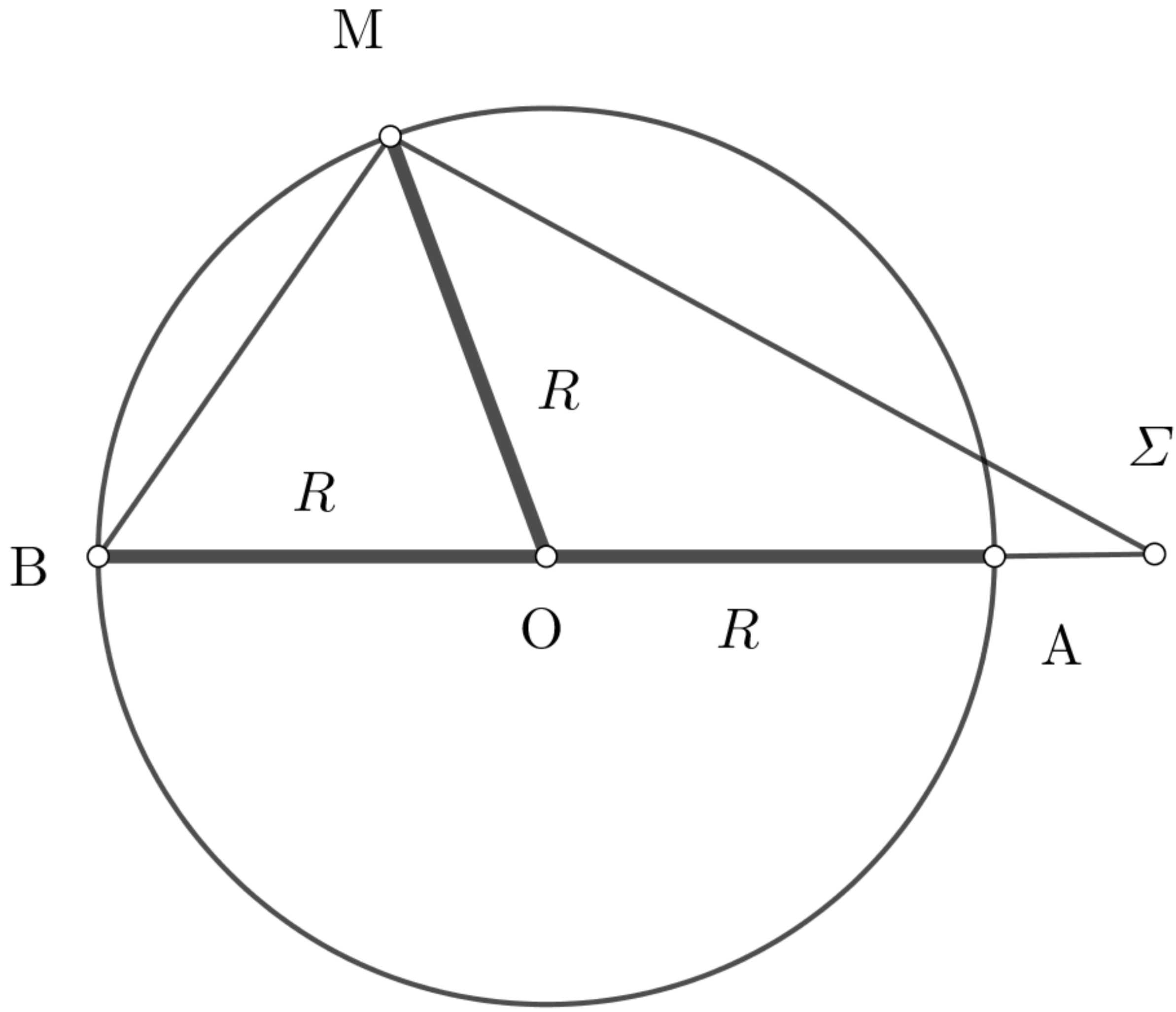
$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\ (\mathrm{II}): \mathrm{M} \equiv \mathrm{B}$



$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \Sigma \equiv \mathrm{B}\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\Sigma\mathrm{A} < \Sigma\mathrm{M} = \Sigma\mathrm{B}$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\ (\mathrm{III}): \mathrm{M} \not\equiv \mathrm{A}, \mathrm{M} \not\equiv \mathrm{B}$


M
R
Σ
R
B
O
R
A

$\Pi\varepsilon\rho \acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\ (\mathrm{III}): \mathrm{M} \not\equiv \mathrm{A}, \mathrm{M} \not\equiv \mathrm{B}$

<u>Τριγωνική ανισότητα</u>
(Ι) Σε κάθε τρίγωνο η διαφορά δυο πλευρών είναι μικρότερη απο την τρίτη πλευρα
(ΙΙ) Σε κάθε τρίγωνο κάθε πλευρά είναι μικρότερη απο το άθροισμα των δυο άλλων

Επειδή Μ σημείο του κύκλου (O, R) θα έχω:

$\mathrm{OB} = \mathrm{OM} = \mathrm{OA}\ (1)$

Στο τρίγωνο $\Sigma \overset{\triangle}{\mathrm{O}} \mathrm{M}$ απο την τριγωνική ανισότητα θα έχω:

$|\Sigma\mathrm{O} - \mathrm{OM}| < \Sigma\mathrm{M} < \Sigma\mathrm{O} + \mathrm{OM}$

$\Sigma\mathrm{M} < \Sigma\mathrm{O} + \mathrm{OM} \overset{\mathrm{OM=OB}}{\Longrightarrow} \Sigma\mathrm{M} < \Sigma\mathrm{O} + \mathrm{OB} \overset{\Sigma\mathrm{O+OB}=\Sigma\mathrm{B}}{\Longrightarrow} \Sigma\mathrm{M} < \Sigma\mathrm{B}\ (2)$

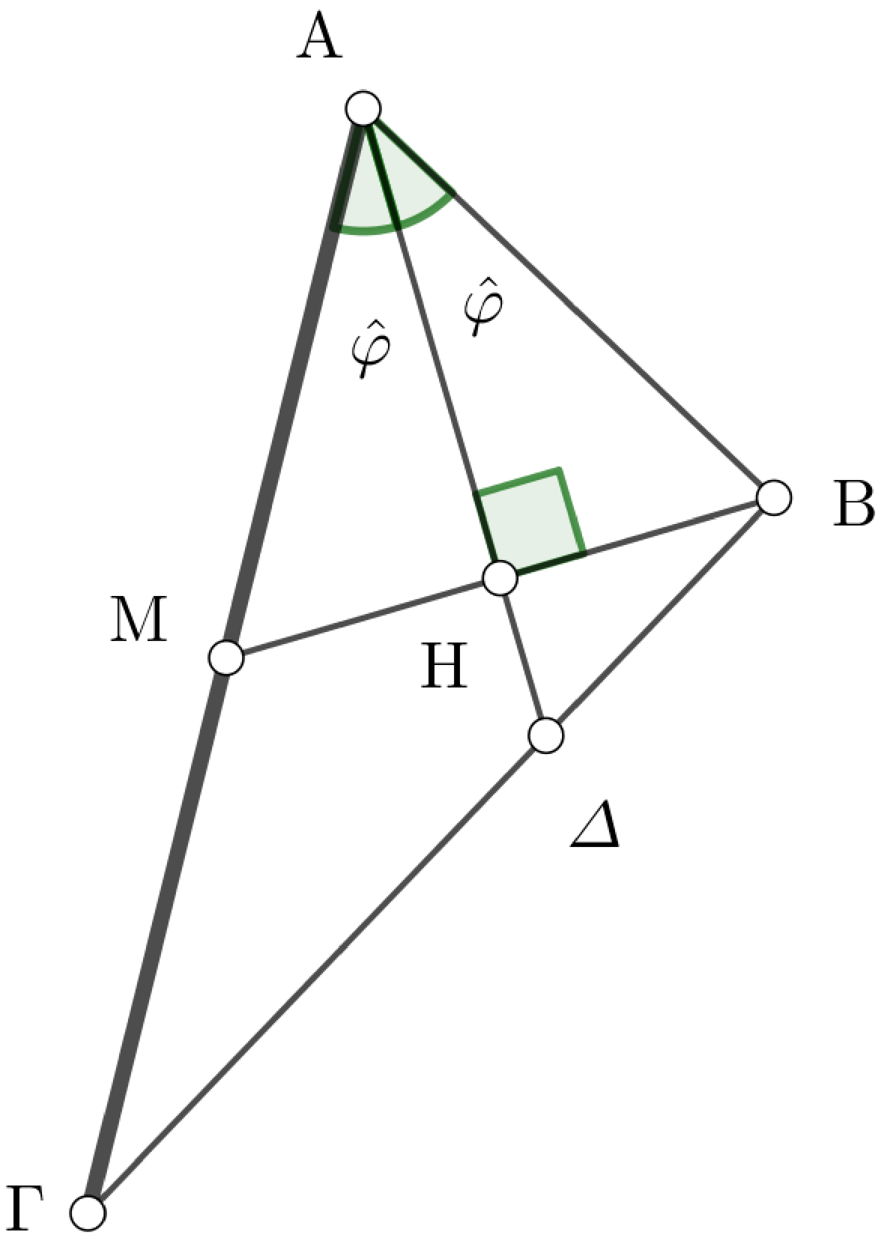
$|\Sigma\mathrm{O} - \mathrm{OM}| < \Sigma\mathrm{M} \overset{\mathrm{OM=OA}}{\Longrightarrow} |\Sigma\mathrm{O} - \mathrm{OA}| < \Sigma\mathrm{M} \overset{|\Sigma\mathrm{O-OA}|=\Sigma\mathrm{A}}{\Longrightarrow} \Sigma\mathrm{A} < \Sigma\mathrm{M}\ (3)$

Απο τις σχέσεις (1),(2),(3) θα έχω:

$\Sigma\mathrm{A} < \Sigma\mathrm{M} < \Sigma\mathrm{B}$

14.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Αν η διχοτόμος δ_α τέμνει κάθετα τη διάμεσο μ_β, να αποδείξετε ότι:
(Ι) $\mathrm{A\Gamma} = 2\mathrm{AB}$
(ΙΙ) $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$A\Delta$: *Διχοτόμος της* $\hat{A}$ M : Το *μέσο της* $A\Gamma$ $A\Delta \perp BM$	$(I)\ A\Gamma = 2AB$ $(II)\ AB < A\Gamma$

(I) *Στο τρίγωνο* MAB *η* AH *είναι ύψος και διχοτόμος που αντιστοιχεί στην πλευρά* MB. Ο*πότε το τρίγωνο* MAB *είναι ισοσκελές με βάση* BM. Ο*πότε θα έχω*:

$\mathrm{AM} = \mathrm{AB}\,(1)$

Ε*πειδή* M *μέσο της* $\mathrm{A\Gamma}$ *θα έχω*:

$\mathrm{A\Gamma} = 2\mathrm{AM}\,(2)$

Α*πο τις σχέσεις* $(1),(2)$ *έχω*:

$\mathrm{A\Gamma} = 2\mathrm{AM} \overset{\mathrm{AM}=\mathrm{AB}}{=} 2\mathrm{AB}$

(II) Η *γωνία* $\mathrm{A\hat{M}B}$ *είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο* $\mathrm{BM\Delta}$. Ο*πότε θα είναι μεγαλύτερη απο τις δυο απέναντι εσωτερικές. Άρα θα έχω*:

$\mathrm{A\hat{M}B} > \hat{\Gamma}\,(3)$

Σ*το ισοσκελές τρίγωνο* $\mathrm{MAB}\,(\mathrm{AB} = \mathrm{AM})$ *θα έχω*:

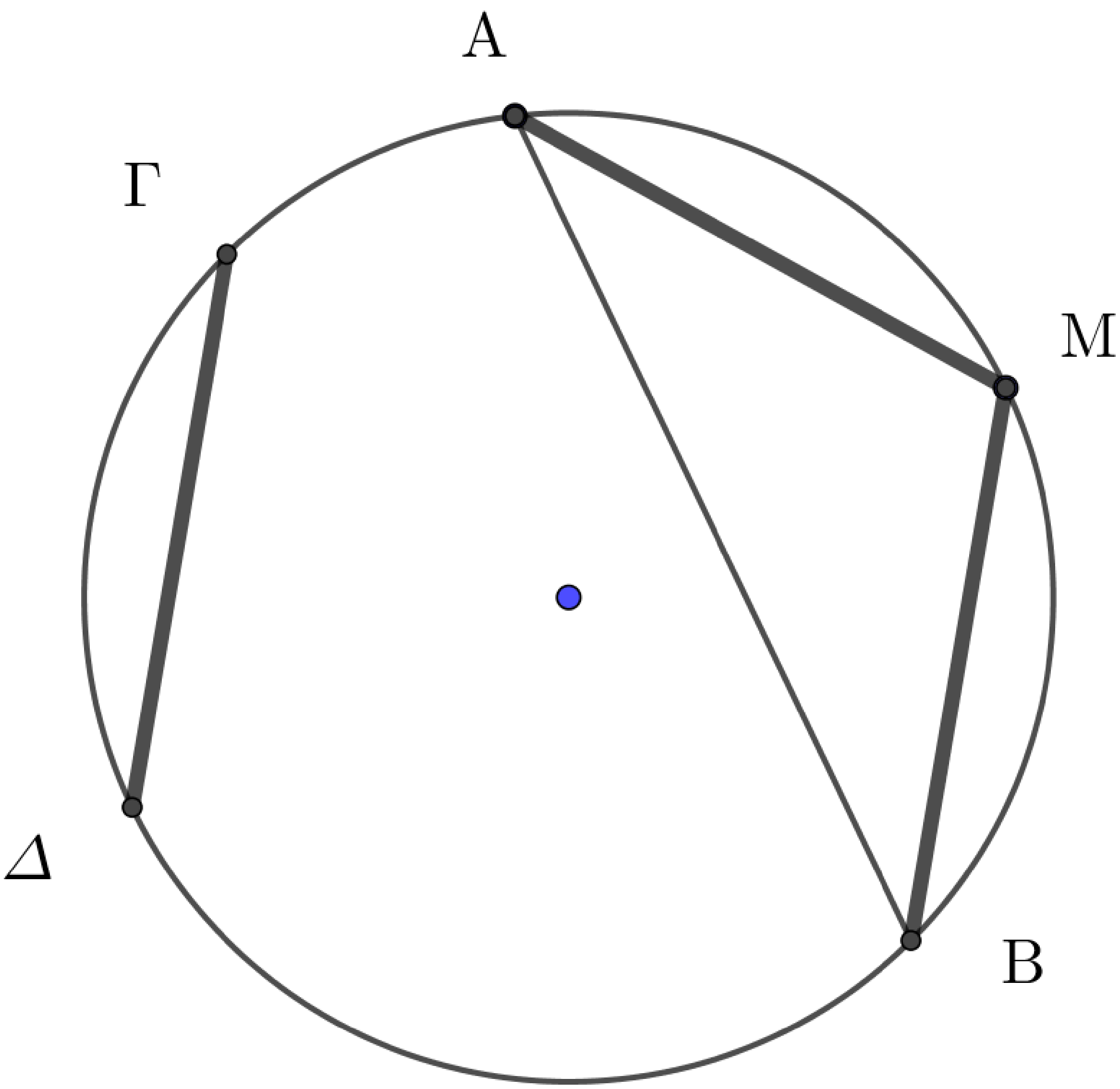
$\mathrm{A\hat{M}B} = \mathrm{A\hat{B}M}\,(4)\left(\begin{array}{l}\text{Ως προσκείμενες γωνίες στη βάση} \\ \text{ισοσκελούς τριγώνου}\end{array}\right)$

Έχω: $\hat{\mathrm{B}} > \mathrm{A\hat{B}M} \overset{\mathrm{A\hat{M}B}=\mathrm{A\hat{B}M}}{\Longrightarrow} \hat{\mathrm{B}} > \mathrm{A\hat{M}B} \overset{\mathrm{A\hat{M}B}>\hat{\Gamma}}{\Rightarrow} \hat{\mathrm{B}} > \hat{\Gamma}$

Γ*νωρίζω ότι <u>στο ίδιο τρίγωνο ή σε δυο ίσα τρίγωνα απέναντι απο την μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά</u>.* Σ*το τρίγωνο* $\mathrm{AB\Gamma}$ *έχω* $\hat{\mathrm{B}} > \hat{\Gamma}$. Ο*πότε* $\mathrm{A\Gamma} > \mathrm{AB}$. Σ*υνεπώς* $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}$.

15.

Έστω κύκλος (O,R) *και δυο τόξα* $\mathrm{AB},\mathrm{\Gamma\Delta}$. Α*ν* $\mathrm{AB} = 2\mathrm{\Gamma\Delta}$ *να αποδείξετε ότι* $\mathrm{AB} < 2\mathrm{\Gamma\Delta}$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$ΑΒ = 2ΓΔ$ Μ : Μέσο του τόξου ΑΒ Μ : Το μέσο της ΑΓ $ΑΔ \perp ΒΜ$	$ΑΒ < 2ΓΔ$

$$AB = 2\Gamma\Delta \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{AB}{2} (1)$$

Έστω M *το μέσο του τόξου* AB, Τότε *θα έχω*:

$$AM = MB = \frac{AB}{2} (2)$$

Α*πο τις σχέσεις* (1),(2) *θα έχω*:

$$\left.\begin{cases} \Gamma\Delta = \dfrac{AB}{2} \\ AM = MB = \dfrac{AB}{2} \end{cases}\right\} \Rightarrow \Gamma\Delta = AM = MB$$

Ο*πότε θα έχω*: $\Gamma\Delta = AM = MB (3)\left(\begin{matrix}\text{Γιατί σε ίσα τόξα αντιστοιχούν} \\ \text{ίσες χορδές}\end{matrix}\right)$

Σ*το τρίγωνο* AMB *απο την τριγωνική ανισότητα θα έχω*:

$$AB < AM + MB \overset{AM=MB=\Gamma\Delta}{\Longrightarrow} AB < \Gamma\Delta + \Gamma\Delta \Rightarrow AB < 2\Gamma\Delta$$

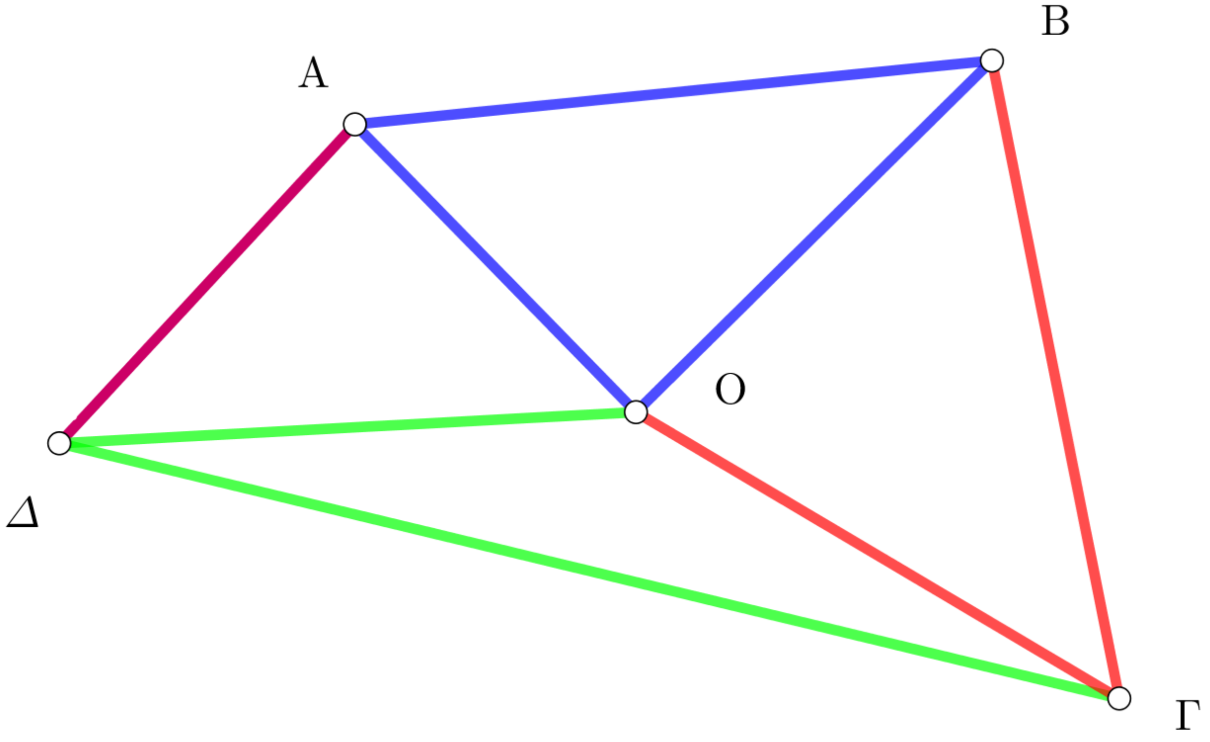
16.

Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ *και* Ο *εσωτερικό σημείο του.*

(I) Ν*α αποδείξετε ότι*:

$$OA + OB + O\Gamma + O\Delta > \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2}$$

(II) Γ*ια ποιά θέση του* Ο *το άθροισμα* $OA + OB + O\Gamma + O\Delta$ *γίνεται ελάχιστο*



(I) Απο την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο OAB θα έχω:

$\mathrm{AB} < \mathrm{OA} + \mathrm{OB}\ (1)$

Απο την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $\mathrm{OB\Gamma}$ θα έχω:

$\mathrm{B\Gamma} < \mathrm{OB} + \mathrm{O\Gamma}\ (2)$

Απο την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $\mathrm{O\Gamma\Delta}$ θα έχω:

$\Gamma\Delta < \mathrm{O\Gamma} + \mathrm{O\Delta}\ (3)$

Απο την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $\mathrm{O\Delta A}$ θα έχω:

$\Delta\mathrm{A} < \mathrm{OA} + \mathrm{O\Delta}\ (4)$

Προσθέτω κατα μέλη τις σχέσεις $(1),(2),(3),(4)$:

$$\left.\begin{cases}\mathrm{AB} < \mathrm{OA} + \mathrm{OB} \\ \mathrm{B\Gamma} < \mathrm{OB} + \mathrm{O\Gamma} \\ \Gamma\Delta < \mathrm{O\Gamma} + \mathrm{O\Delta} \\ \Delta\mathrm{A} < \mathrm{OA} + \mathrm{O\Delta}\end{cases}\right\}(+)$$

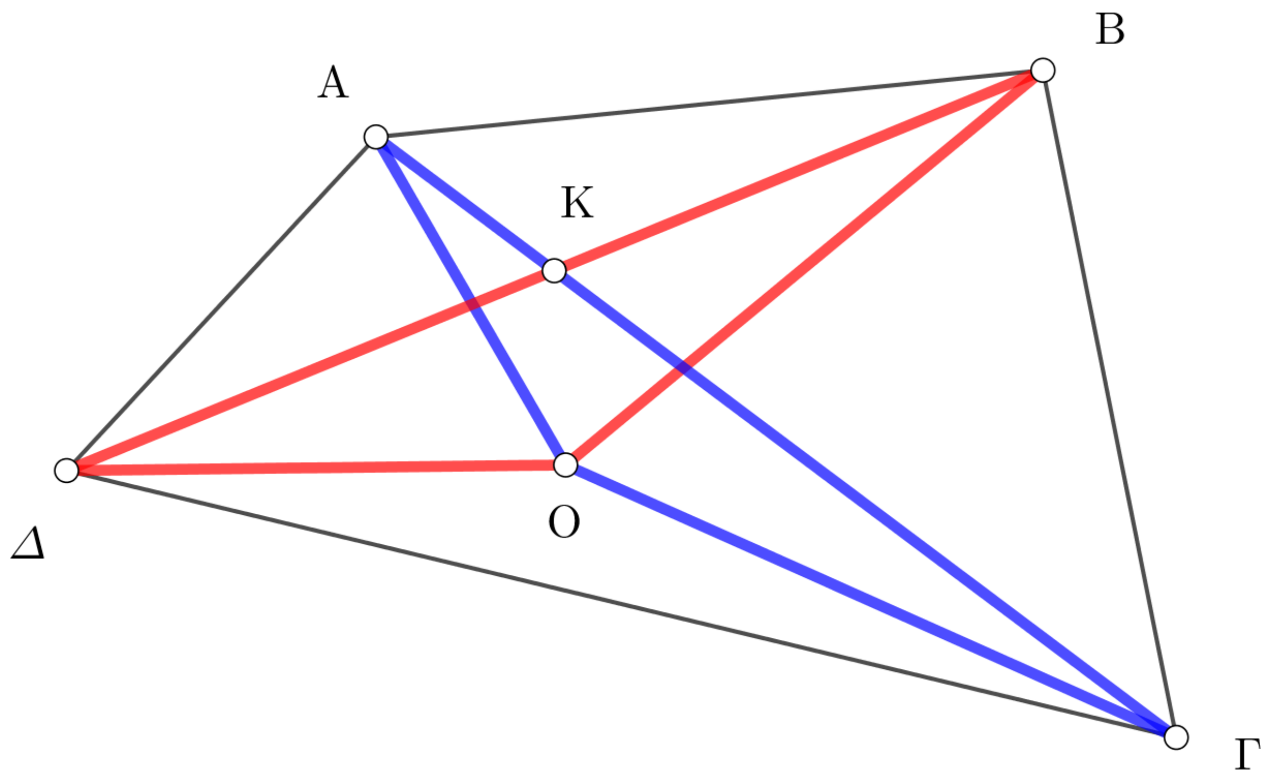
$$\mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \Gamma\Delta + \Delta\mathrm{A} < \mathrm{OA} + \mathrm{OB} + \mathrm{OB} + \mathrm{O\Gamma} + \mathrm{O\Gamma} + \mathrm{O\Delta} + \mathrm{OA} + \mathrm{O\Delta} \Rightarrow$$

$$\mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \Gamma\Delta + \Delta\mathrm{A} < 2\mathrm{OA} + 2\mathrm{OB} + 2\mathrm{O\Gamma} + 2\mathrm{O\Delta} \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \Gamma\Delta + \Delta\mathrm{A}}{2} < \frac{2(\mathrm{OA} + \mathrm{OB} + \mathrm{O\Gamma} + \mathrm{O\Delta})}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \Gamma\Delta + \Delta\mathrm{A}}{2} < \mathrm{OA} + \mathrm{OB} + \mathrm{O\Gamma} + \mathrm{O\Delta} \Rightarrow$$

$$\mathrm{OA} + \mathrm{OB} + \mathrm{O\Gamma} + \mathrm{O\Delta} > \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \Gamma\Delta + \Delta\mathrm{A}}{2}$$



(II)

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

$$\begin{array}{l}\left.\begin{cases}\alpha > \beta \\ \gamma \geq \delta\end{cases}\right\} \\ \hline \alpha + \gamma > \beta + \delta\end{array}$$

Όταν προσθέτω δυο ομόστροφες ανισώσεις κατα μέλη που η μια έχει $\geq$ *και η άλλη έχει μόνο* $>$ *τότε η τελική ανίσωση θα έχει μόνο* $>$!!!

Αν Ο *δεν είναι σημείο του εθυγράμμου τμήματος* ΑΓ

Τότε τα σημεία Α, Ο, Γ *είναι μη συνευθειακά.Τότε τα σημεία* Α, Ο, Γ *ορίζουν τρίγωνο* ΑΟΓ *οπότε απο την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο* ΑΟΓ *θα έχω*:

$AO + O\Gamma > A\Gamma \;(1)$

Αν Ο *είναι σημείο του εθυγράμμου τμήματος* ΑΓ

Τότε ισχύει η σχέση:

$A\Gamma = AO + O\Gamma$

Οπότε για τυχαίο εσωτερικό σημείο Ο *του τετραπλεύρου* ΑΒΓΔ *ισχύει*:

$AO + O\Gamma \geq A\Gamma \;(2)$

<u>Αν Ο *δεν είναι σημείο του εθυγράμμου τμήματος* ΒΔ</u>

Τότε *τα σημεία* Β, Ο, Δ *είναι μη συνευθειακά.*Τότε *τα σημεία* Β, Ο, Δ *ορίζουν τρίγωνο* ΒΟΔ *οπότε απο την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο* ΒΟΔ *θα έχω*:

$$ΒΔ > ΒΟ + ΟΔ (3)$$

<u>Αν Ο *είναι σημείο του εθυγράμμου τμήματος* ΒΔ</u>

Τότε *ισχύει η σχέση*:

$$ΒΔ = ΒΟ + ΟΔ$$

Οπότε *για τυχαίο εσωτερικό σημείο* Ο *του τετραπλεύρου* ΑΒΓΔ *ισχύει*:

$$ΒΟ + ΟΔ \geq ΒΔ (4)$$

Απο *τις σχέσεις* (2), (4) *έχω*:

$$\underline{\left.\begin{cases} ΑΟ + ΟΓ \geq ΑΓ \\ ΒΟ + ΟΔ \geq ΒΔ \end{cases}\right\}} (+)$$

$$ΑΟ + ΟΓ + ΒΟ + ΟΔ \geq ΑΓ + ΒΔ$$

Άρα η ελάχιστη τιμή που παίρνει το άθροισμα ΑΟ + ΟΓ + ΒΟ + ΟΔ *είναι η* ΑΓ + ΒΔ

<u>Αν Ο *δεν είναι σημείο του εθυγράμμου τμήματος* ΑΓ</u>

Τότε *θα έχω*: $ΑΟ + ΟΓ > ΑΓ$

$$\underline{\left.\begin{cases} ΑΟ + ΟΓ > ΑΓ \\ ΒΟ + ΟΔ \geq ΒΔ \end{cases}\right\}} (+)$$

$$ΑΟ + ΟΓ + ΒΟ + ΟΔ > ΑΓ + ΒΔ$$

Οπότε *αν* Ο *δεν είναι σημείο του εθυγράμμου τμήματος* ΑΓ *τότε η παράσταση* ΑΟ + ΟΓ + ΒΟ + ΟΔ *δεν παίρνει ελάχιστη τιμή*!!!

Οπότε *η παράσταση* ΑΟ + ΟΓ + ΒΟ + ΟΔ *για να παίρνει ελάχιστη τιμή θα πρέπει το* Ο *να είναι σημείο του εθυγράμμου τμήματος* ΑΓ

<u>Αν Ο *δεν είναι σημείο του εθυγράμμου τμήματος* ΒΔ</u>

Τότε *θα έχω*: $ΟΒ + ΟΔ > ΒΔ$

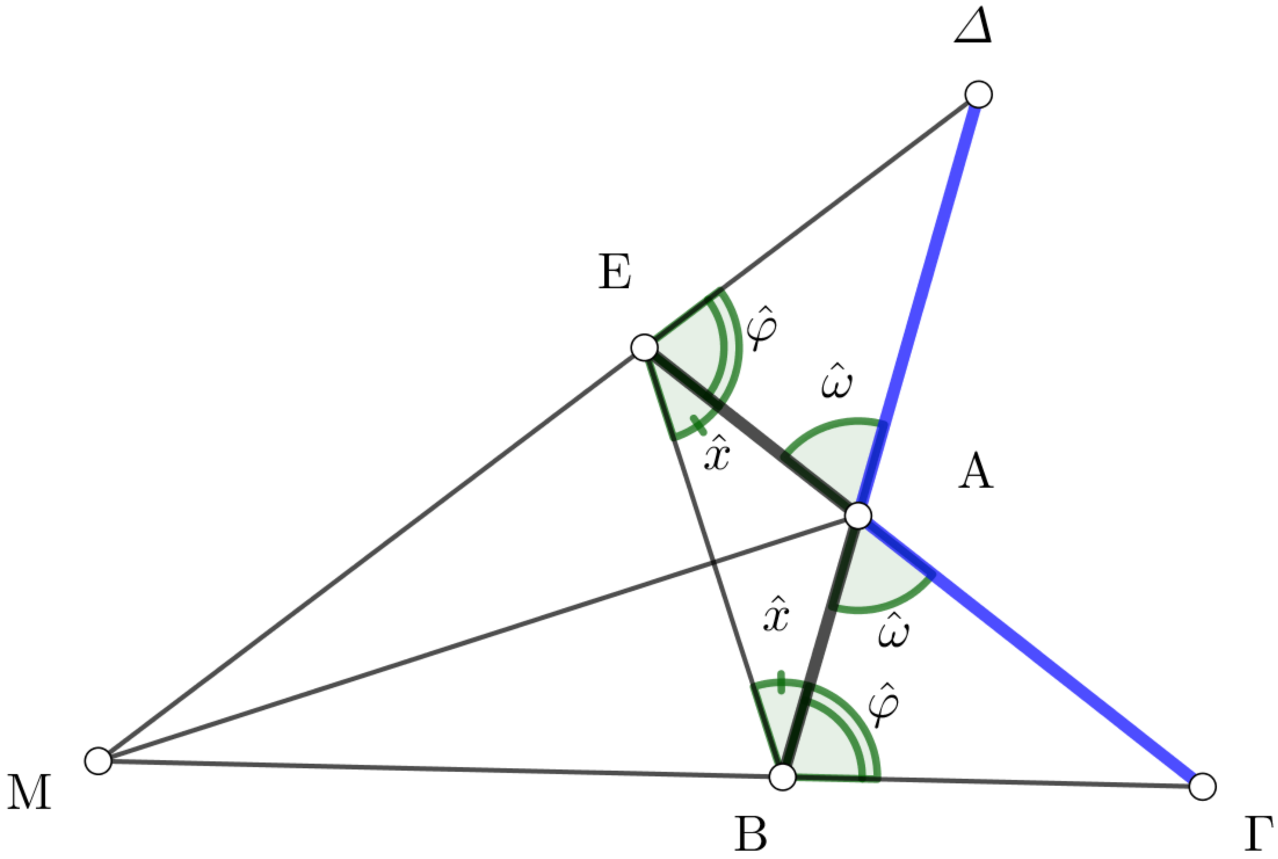
$$\underline{\left.\begin{cases} ΑΟ + ΟΓ \geq ΑΓ \\ ΒΟ + ΟΔ > ΒΔ \end{cases}\right\}} (+)$$

$$ΑΟ + ΟΓ + ΒΟ + ΟΔ > ΑΓ + ΒΔ$$

Οπότε αν Ο *δεν είναι σημείο του εθυγράμμου τμήματος* ΒΔ *τότε η παράσταση* $ΑΟ+ΟΓ+ΒΟ+ΟΔ$ *δεν παίρνει ελάχιστη τιμή*!!!
Άρα η παράσταση $ΑΟ+ΟΓ+ΒΟ+ΟΔ$ *για να παίρνει ελάχιστη τιμή θα πρέπει το* Ο *να είναι σημείο του εθυγράμμου τμήματος* ΒΔ
Συνεπώς η παράσταση $ΑΟ+ΟΓ+ΒΟ+ΟΔ$ *παίρνει ελάχιστη τιμή όταν το* Ο *είναι σημείο του εθυγράμμου τμήματος* ΑΓ *και σημείο του εθυγράμμου τμήματος* ΒΔ.*Οπότε* Ο *είναι το κοινό σημείο των* ΒΔ *και* ΑΓ.*Άρα* $Ο \equiv Κ$!!!

17.

Σε τρίγωνο $ΑΒΓ\left(ΑΒ<ΑΓ\right)$ *προεκτείνουμε τις πλευρές* ΒΑ *και* ΓΑ *προς το μέρος του* Α *κατα τμήμα* $ΑΔ=ΑΓ$ *και* $ΑΕ=ΑΒ$ *αντίστοιχα.*
Η *ευθεία* ΔΕ *τέμνει την ευθεία* ΒΓ *στο σημείο* Μ.Ν*α αποδείξετε ότι*:
(I) *το τρίγωνο* ΜΒΕ *είναι ισοσκελές*
(II) *η διχοτόμος της* $Β\hat{Μ}Ε$ *διέρχεται απο το σημείο* Α



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AB}=\mathrm{AE}$ $\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{A\Delta}$	$(\mathrm{I})\ \mathrm{ME}=\mathrm{MB}$ $(\mathrm{II})\ \mathrm{MA}: \Delta\iota\chi o\tau \acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{E}$

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ *και* $\overset{\triangle}{\mathrm{AE\Delta}}$. *Αυτά έχουν*:

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ \mathrm{AB}=\mathrm{AE}\ (\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\ \mathrm{A\Gamma}=\mathrm{A\Delta}\ (\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{III})\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{\Gamma}=\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}\ (\Omega\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\nu)\end{cases}\right\}$$

Οπότε $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}=\overset{\triangle}{\mathrm{AE\Delta}}$ (ΠΓΠ). *Συνεπώς θα έχω* $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{\Gamma}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{\Delta}=\hat{\varphi}\ (1)$

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΕΒ (ΑΕ = ΑΒ) *θα έχω* $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}=\hat{x}\ (2)$

(Ως γωνίες που είναι προσκείμενες στην βάση ισοσκελούς τριγώνου)

$$\mathrm{M}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B}=180^0-\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B}-\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{\Delta}\ \overset{\substack{\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B}=\hat{x}\\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{\Delta}=\hat{\varphi}}}{=}\ 180^0-\hat{x}-\hat{\varphi}$$

Οπότε: $\mathrm{M}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B}=180^0-\hat{x}-\hat{\varphi}\ (3)$

$$\mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}=180^0-\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}-\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{\Gamma}\ \overset{\substack{\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}=\hat{x}\\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{\Gamma}=\hat{\varphi}}}{=}\ 180^0-\hat{x}-\hat{\varphi}$$

Οπότε: $\mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}=180^0-\hat{x}-\hat{\varphi}\ (4)$

Απο τις σχέσεις (3),(4) *θα έχω*:

$\mathrm{M}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B}=\mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}\ (5)$

Στο τρίγωνο ΜΕΒ *έχω* $\mathrm{M}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B}=\mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$. *Οπότε θα ισχύει* ΜΕ = ΜΒ (6)

(Γιατί στο ίδιο τρίγωνο ή σε δυο ίσα τρίγωνα απέναντι απο ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές)

Συνεπώς το τρίγωνο ΜΕΒ *είναι ισοσκελές*

(ΙΙ) *Συγκρίνω τα τρίγωνα* $\overset{\triangle}{\mathrm{MEA}}$ *και* $\overset{\triangle}{\mathrm{MBA}}$. *Αυτά έχουν*:

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ \mathrm{AE}=\mathrm{AB}\ (\Upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta)\\(\mathrm{II})\ \mathrm{ME}=\mathrm{MB}\ (6)\\(\mathrm{III})\ \mathrm{AM}=\mathrm{AM}\ (\Omega\varsigma\ \kappa o\iota\nu\acute{\eta}\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha})\end{cases}\right\}$$

Οπότε: $\overset{\triangle}{\mathrm{MEA}}=\overset{\triangle}{\mathrm{MBA}}$ (ΠΠΠ), *Συνεπώς* $\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{A}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{A}$.

Άρα η ημιευθεία ΜΑ *είναι διχοτόμος της η διχοτόμος της* $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{E}$.

18.

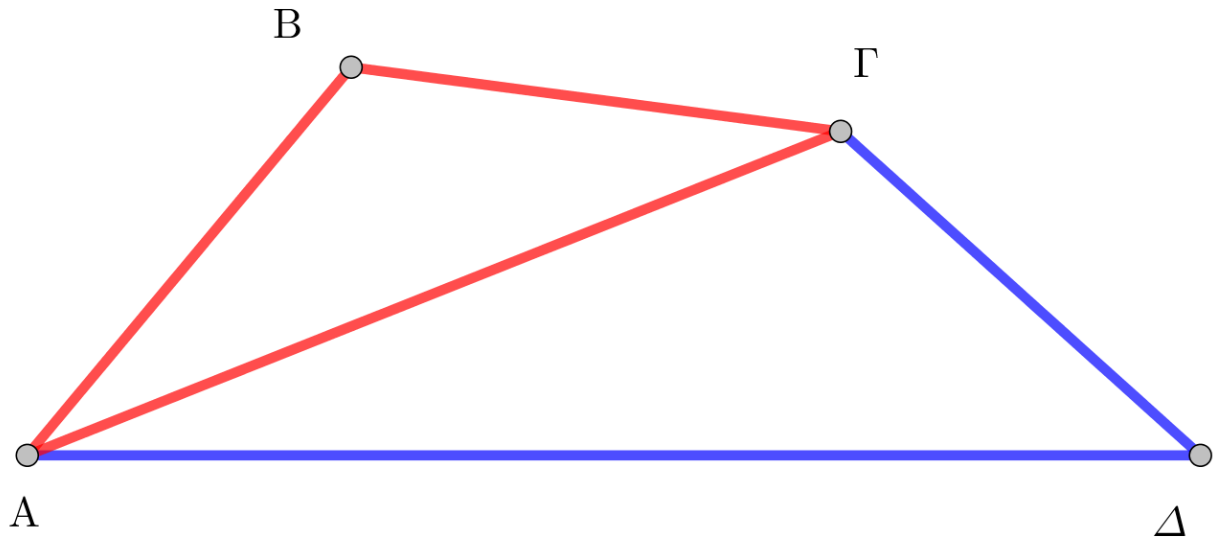
Έστω O *το σημείο τομής των διαγωνίων ενός κυρτού τετραπλεύρου* $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$. *Να αποδείξετε ότι:*

(I) *Κάθε διαγώνιος είναι μικρότερη της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου.*

(II) $\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{B\Delta} > \mathrm{AB} + \mathrm{\Gamma\Delta}$ *και*

$\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{B\Delta} > \mathrm{A\Delta} + \mathrm{B\Gamma}$

(III) *Το άθροισμα των διαγωνίων είναι μεγαλύτερο της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου και μικρότερο της περιμέτρου του τετραπλεύρου*



(I) *Στο τρίγωνο* $\mathrm{AB\Gamma}$ *απο την τριγωνική ανισότητα θα έχω:*

$\mathrm{A\Gamma} < \mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} \ (1)$

Στο τρίγωνο $\mathrm{A\Gamma\Delta}$ *απο την τριγωνική ανισότητα θα έχω:*

$\mathrm{A\Gamma} < \mathrm{A\Delta} + \mathrm{\Delta\Gamma} \ (2)$

Προσθέτω κατα μέλη τις σχέσεις $(1),(2)$:

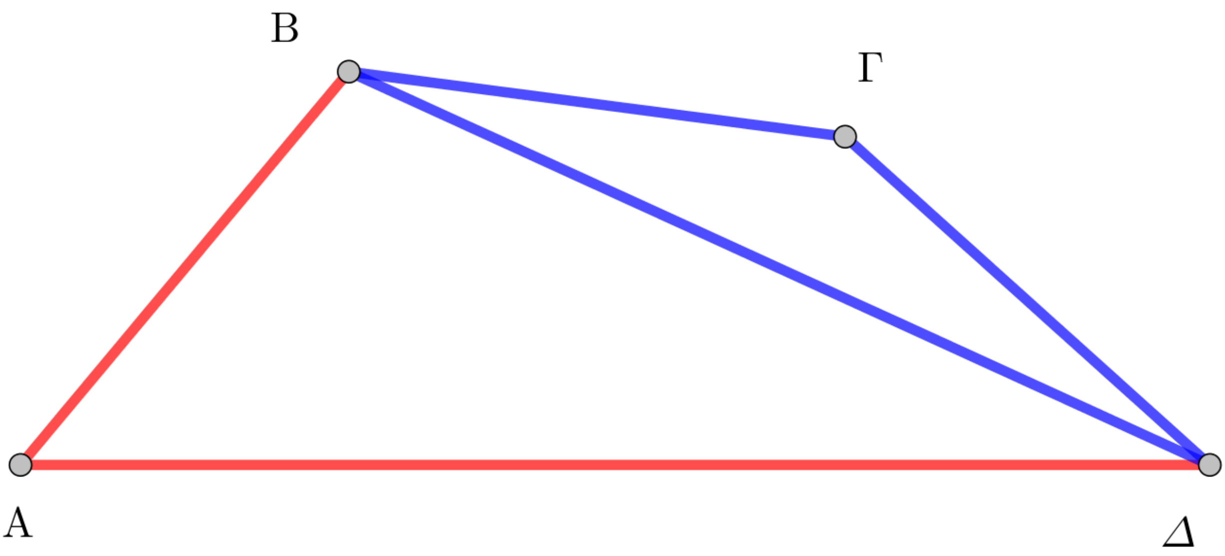
$$\left.\begin{cases} \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} \\ \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{A\Delta} + \mathrm{\Delta\Gamma} \end{cases}\right\} (+)$$

$$\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{A\Delta} + \mathrm{\Delta\Gamma} \Rightarrow 2\mathrm{A\Gamma} < \mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{\Gamma\Delta} + \mathrm{\Delta A}$$

Όταν διαιρώ και τα δυο μέλη μιας ανίσωσης με ένα θετικό αριθμό προκύπτει ομόστροφη ανίσωση

$$\Rightarrow \quad \frac{2\mathrm{A\Gamma}}{2} < \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{\Gamma\Delta} + \mathrm{\Delta A}}{2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{A\Gamma} < \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{\Gamma\Delta} + \mathrm{\Delta A}}{2} \ (3)$$



Σ*το τρίγωνο* ΒΓΔ *απο την τριγωνική ανισότητα θα έχω*:

$$Β\Delta < ΒΓ + Γ\Delta \ (4)$$

Σ*το τρίγωνο* ΒΑΔ *απο την τριγωνική ανισότητα θα έχω*:

$$Β\Delta < ΒΑ + Α\Delta \ (5)$$

Π*ροσθέτω κατα μέλη τις σχέσεις* (4),(5):

$$\left.\begin{cases} Β\Delta < ΒΓ + Γ\Delta \\ Β\Delta < ΒΑ + Α\Delta \end{cases}\right\}(+)$$

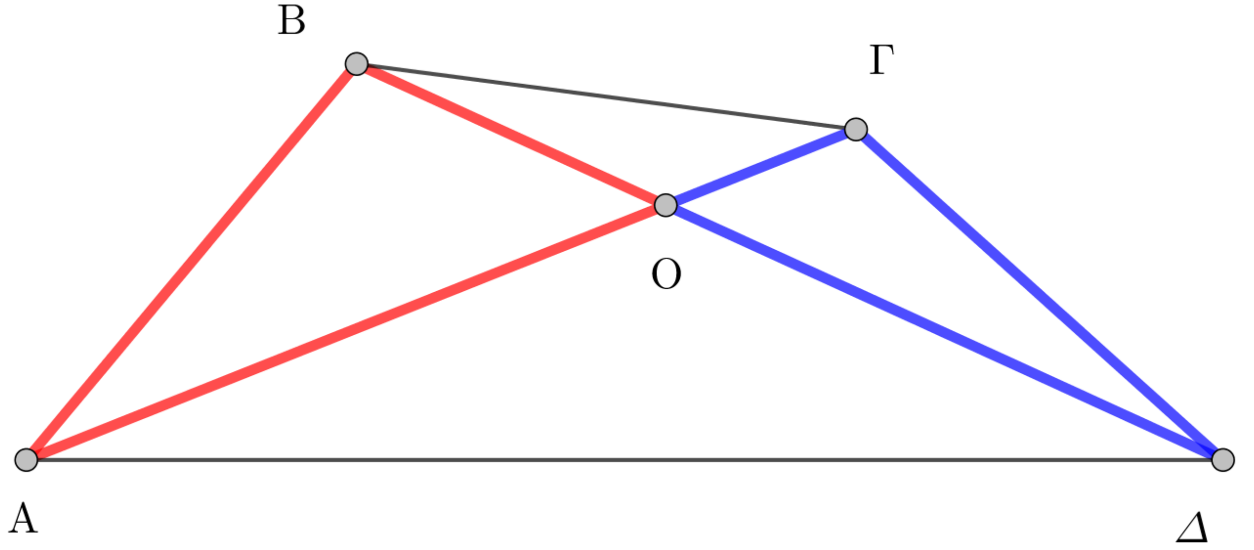
$$Β\Delta + Β\Delta < ΒΓ + Γ\Delta + ΒΑ + Α\Delta \Rightarrow 2Β\Delta < ΑΒ + ΒΓ + Γ\Delta + \DeltaΑ$$

Όταν διαιρώ και τα δυο μέλη μιας ανίσωσης με ένα θετικό αριθμό προκύπτει ομόστροφη ανίσωση

$$\Rightarrow \quad \frac{2Β\Delta}{2} < \frac{ΑΒ + ΒΓ + Γ\Delta + \DeltaΑ}{2} \Rightarrow$$

$$Β\Delta < \frac{ΑΒ + ΒΓ + Γ\Delta + \DeltaΑ}{2} \ (6)$$

(II)



Σ*το τρίγωνο* ΒΟΑ *απο την τριγωνική ανισότητα θα έχω*:

$BO + OA > AB \ (7)$

Σ*το τρίγωνο* ΓΟΔ *απο την τριγωνική ανισότητα θα έχω*:

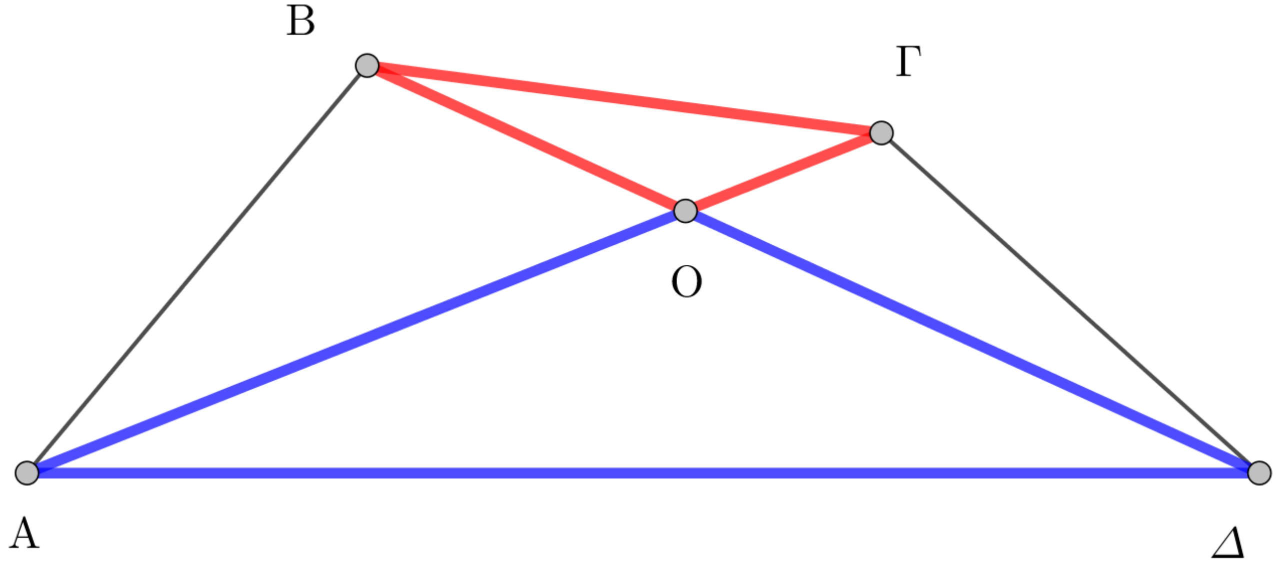
$\Gamma O + O\Delta > \Gamma\Delta \ (8)$

Π*ροσθέτω κατα μέλη τις σχέσεις* (7),(8):

$$\left.\begin{cases} BO + OA > AB \\ \Gamma O + O\Delta > \Gamma\Delta \end{cases}\right\}(+)$$

$$BO + OA + \Gamma O + O\Delta > AB + \Gamma\Delta \Rightarrow (AO + O\Gamma) + (BO + O\Delta) > AB + \Gamma\Delta$$

$$\xRightarrow[\ ]{\substack{AO+O\Gamma=A\Gamma \\ BO+O\Delta=B\Delta}} A\Gamma + B\Delta > AB + \Gamma\Delta \ (9)$$



$\Sigma\tau o\ \tau\rho i\gamma\omega\nu o$ ΒΟΓ $\alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \tau\rho\iota\gamma\omega\nu\iota\kappa\acute{\eta}\ \alpha\nu\iota\sigma\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$\mathrm{BO}+\mathrm{O\Gamma}>\mathrm{B\Gamma}\,(10)$$

$\Sigma\tau o\ \tau\rho i\gamma\omega\nu o$ ΑΟΔ $\alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \tau\rho\iota\gamma\omega\nu\iota\kappa\acute{\eta}\ \alpha\nu\iota\sigma\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$\mathrm{AO}+\mathrm{O\Delta}>\mathrm{A\Delta}\,(11)$$

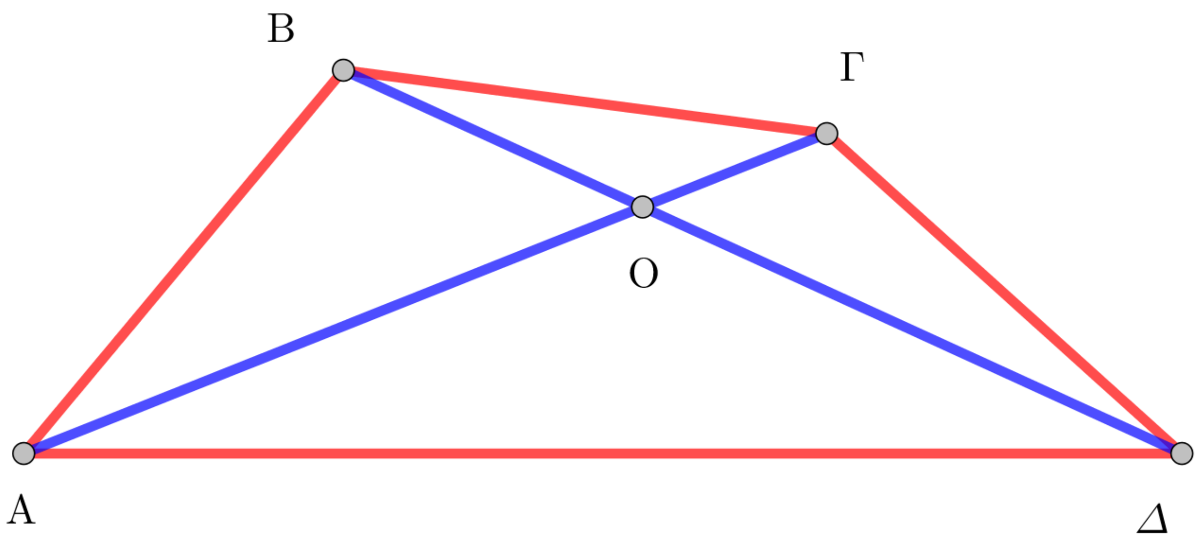
$\Pi\rho o\sigma\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \kappa\alpha\tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma$ (10),(11):

$$\left.\begin{cases}\mathrm{BO}+\mathrm{O\Gamma}>\mathrm{B\Gamma}\\ \mathrm{AO}+\mathrm{O\Delta}>\mathrm{A\Delta}\end{cases}\right\}(+)$$

$$\mathrm{BO}+\mathrm{O\Gamma}+\mathrm{AO}+\mathrm{O\Delta}>\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{A\Delta}\Rightarrow(\mathrm{AO}+\mathrm{O\Gamma})+(\mathrm{BO}+\mathrm{O\Delta})>\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{A\Delta}$$

$$\overset{\substack{\mathrm{AO+O\Gamma=A\Gamma}\\ \mathrm{BO+O\Delta=B\Delta}}}{\Longrightarrow}\ \mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Delta}>\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{A\Delta}\,(12)$$

(ΙΙΙ)



$\Pi\rho o\sigma\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \kappa\alpha\tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma$ (9) $\kappa\alpha\iota$ (12):

$$\left.\begin{cases}\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Delta}>\mathrm{AB}+\mathrm{\Gamma\Delta}\\ \mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Delta}>\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{A\Delta}\end{cases}\right\}(+)$$

$$\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Delta}+\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Delta}>\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{\Delta A}\Rightarrow$$

$$2\mathrm{A\Gamma}+2\mathrm{B\Delta}>\mathrm{AB}+\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{A\Delta}\Rightarrow 2(\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Delta})>\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{\Delta A}\Rightarrow$$

$$\overset{\substack{\text{Όταν διαιρώ και τα δυο μέλη}\\ \text{μιας ανίσωσης με ένα θετικό}\\ \text{αριθμό προκύπτει ομόστροφη}\\ \text{ανίσωση}}}{\Longrightarrow}\ \frac{2(\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Delta})}{2}>\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{\Delta A}}{2}\Rightarrow$$

$$\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Delta}>\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{\Delta A}}{2}\Rightarrow\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{\Delta A}}{2}<\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Delta}\,(13)$$

$\Pi\rho o\sigma\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \kappa\alpha\tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (3)\ \kappa\alpha\iota\ (6):$

$$\left.\begin{cases} \mathrm{A\Gamma} < \dfrac{\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{\Delta A}}{2} \\ \mathrm{B\Delta} < \dfrac{\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{\Delta A}}{2} \end{cases}\right\}(+)$$

$$\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Delta} < \frac{\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{\Delta A}}{2} + \frac{\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{\Delta A}}{2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Delta} < 2\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{\Delta A}}{2} \Rightarrow \mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Delta} < \mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{\Delta A}\,(14)$$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (13),(14)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

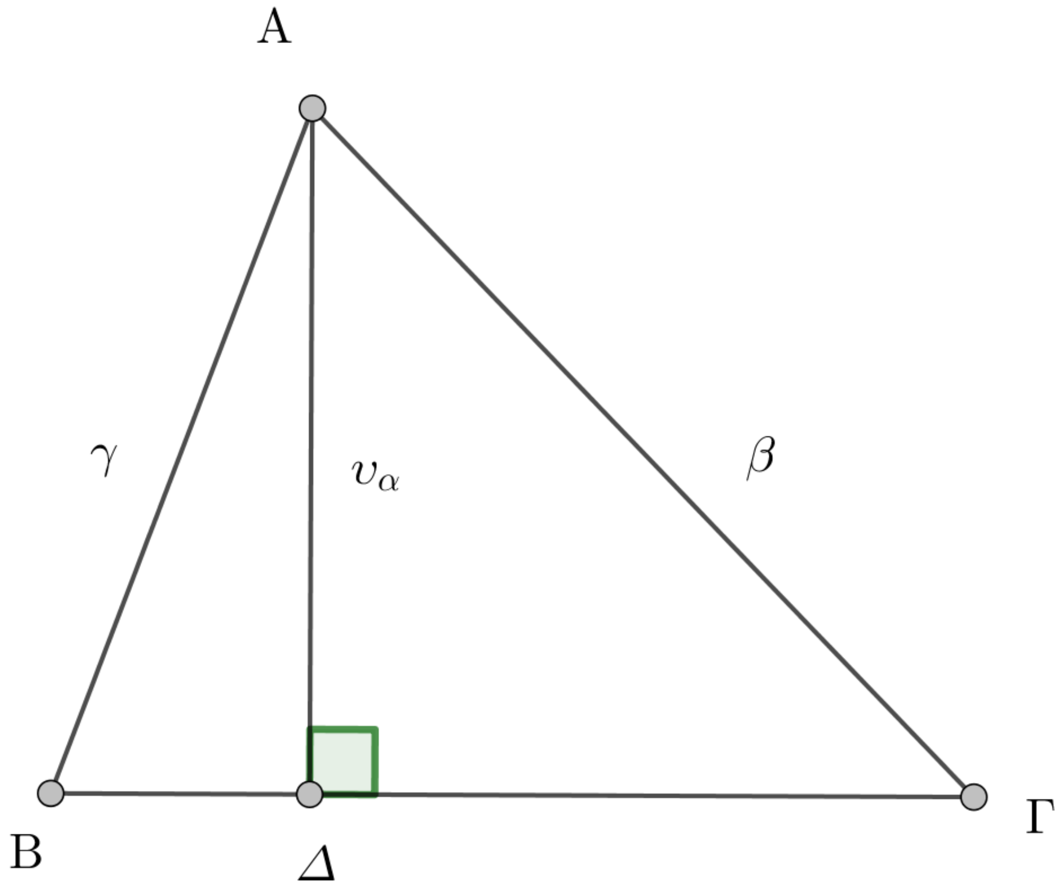
$$\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{\Delta A}}{2} < \mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Delta} < \mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{\Delta A}$$

19.

$\Sigma\varepsilon\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o$ ΑΒΓ $\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota$:

$(\mathrm{I})\upsilon_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$

$(\mathrm{II})\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < 2\tau\left(\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}, \tau : \mathrm{H}\mu\iota\pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma\right)$



$(\mathrm{I})\,\Sigma\varepsilon\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{AB\Gamma}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{A\Delta} \perp \mathrm{B\Gamma}$

$\Sigma\varepsilon\ o\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{AB\Delta}\left(\hat{\Delta} = 90^0\right)\acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{A\Delta} < \mathrm{AB}$

$\left(\begin{array}{l}\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \sigma\varepsilon\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ o\rho\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota o\ o\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\varepsilon\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \mu\iota\kappa\rho\acute{o}\tau\varepsilon\rho\varepsilon\varsigma \\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha\end{array}\right)$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: \upsilon_\alpha < \gamma\,(1)$

$\Sigma\varepsilon\ o\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{A\Gamma\Delta}\left(\hat{\Delta} = 90^0\right)\acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{A\Delta} < \mathrm{A\Gamma}$

$\left(\begin{array}{l}\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \sigma\varepsilon\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ o\rho\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota o\ o\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\varepsilon\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \mu\iota\kappa\rho\acute{o}\tau\varepsilon\rho\varepsilon\varsigma \\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha\end{array}\right)$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: \upsilon_\alpha < \beta\,(2)$

$\Pi\rho o\sigma\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \kappa\alpha\tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (1),(2):$

$$\underline{\left.\begin{cases}\upsilon_\alpha < \gamma \\ \upsilon_\alpha < \beta\end{cases}\right\}}(+)$$

$$\upsilon_\alpha + \upsilon_\alpha < \gamma + \beta \Rightarrow 2\upsilon_\alpha < \gamma + \beta \xRightarrow{\begin{array}{l}\scriptstyle \acute{O}\tau\alpha\nu\ \delta\iota\alpha\iota\rho\acute{\omega}\ \kappa\alpha\iota\ \tau\alpha\ \delta\upsilon o\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta \\ \scriptstyle \mu\iota\alpha\varsigma\ \alpha\nu\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\varsigma\ \mu\varepsilon\ \acute{\varepsilon}\nu\alpha\ \theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{o} \\ \scriptstyle \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\ \pi\rho o\kappa\acute{\upsilon}\pi\tau\varepsilon\iota\ o\mu\acute{o}\sigma\tau\rho o\varphi\eta \\ \scriptstyle \alpha\nu\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\end{array}} \frac{2\upsilon_\alpha}{2} < \frac{\beta+\gamma}{2} \Rightarrow$$

$$\upsilon_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}(3)$$

$(\mathrm{II})\,\mathrm{O}\mu o\acute{\iota}\omega\varsigma\ \upsilon_\beta < \frac{\alpha+\gamma}{2}(4)\ \kappa\alpha\iota\ \upsilon_\gamma < \frac{\alpha+\beta}{2}(5)$

$\Pi\rho o\sigma\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \kappa\alpha\tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (3),(4),(5):$

$$\underline{\left.\begin{cases}\upsilon_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2} \\ \upsilon_\beta < \dfrac{\alpha+\gamma}{2} \\ \upsilon_\gamma < \dfrac{\alpha+\beta}{2}\end{cases}\right\}}(+)$$

$$\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow$$

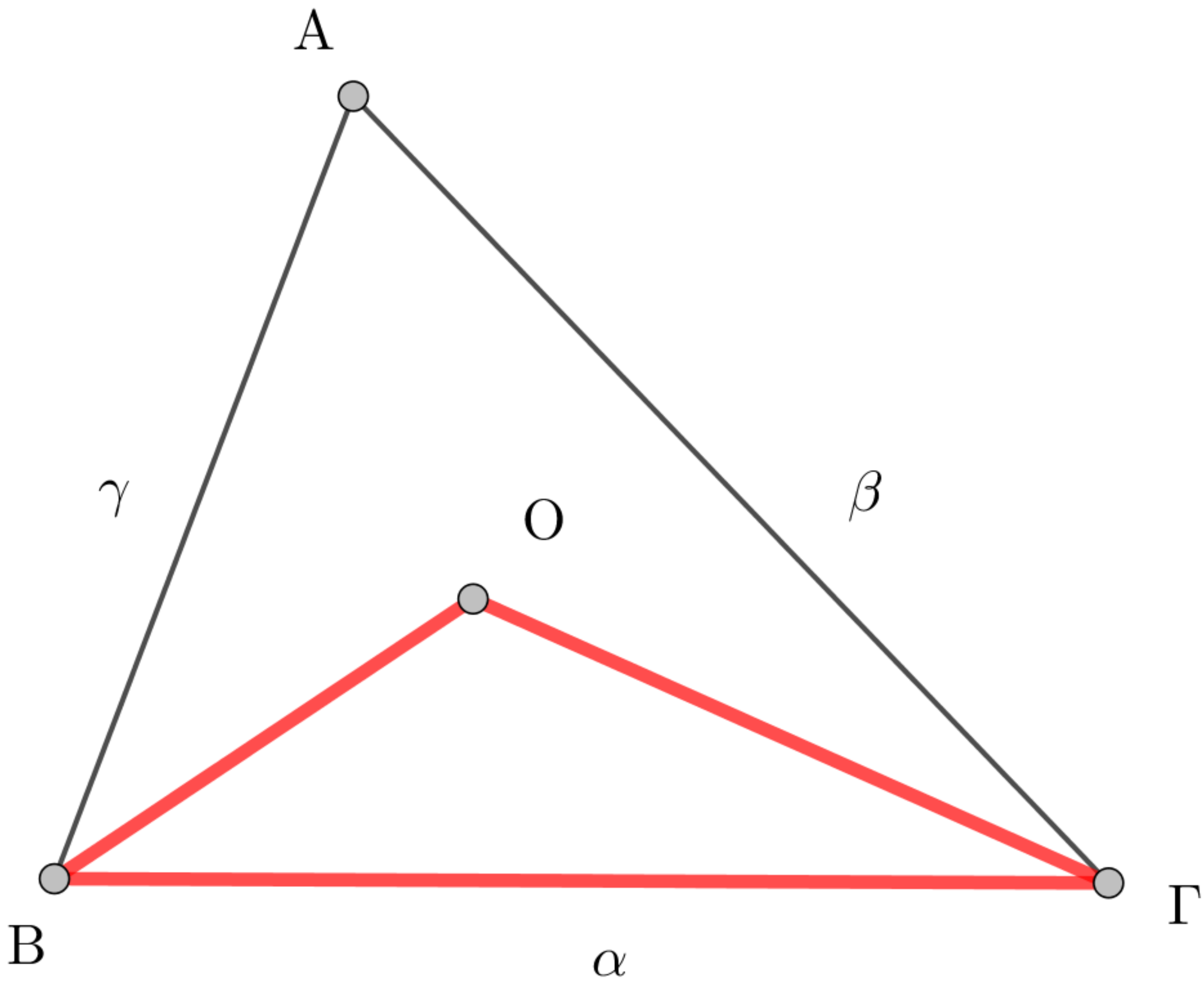
$$\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \frac{\beta+\gamma+\alpha+\gamma+\alpha+\beta}{2} \Rightarrow$$

$$\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \frac{2\alpha+2\beta+2\gamma}{2} \Rightarrow \upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \frac{2(\alpha+\beta+\gamma)}{2} \Rightarrow$$

$$\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \alpha + \beta + \gamma \xRightarrow{\alpha+\beta+\gamma=2\tau} \upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < 2\tau$$

20.

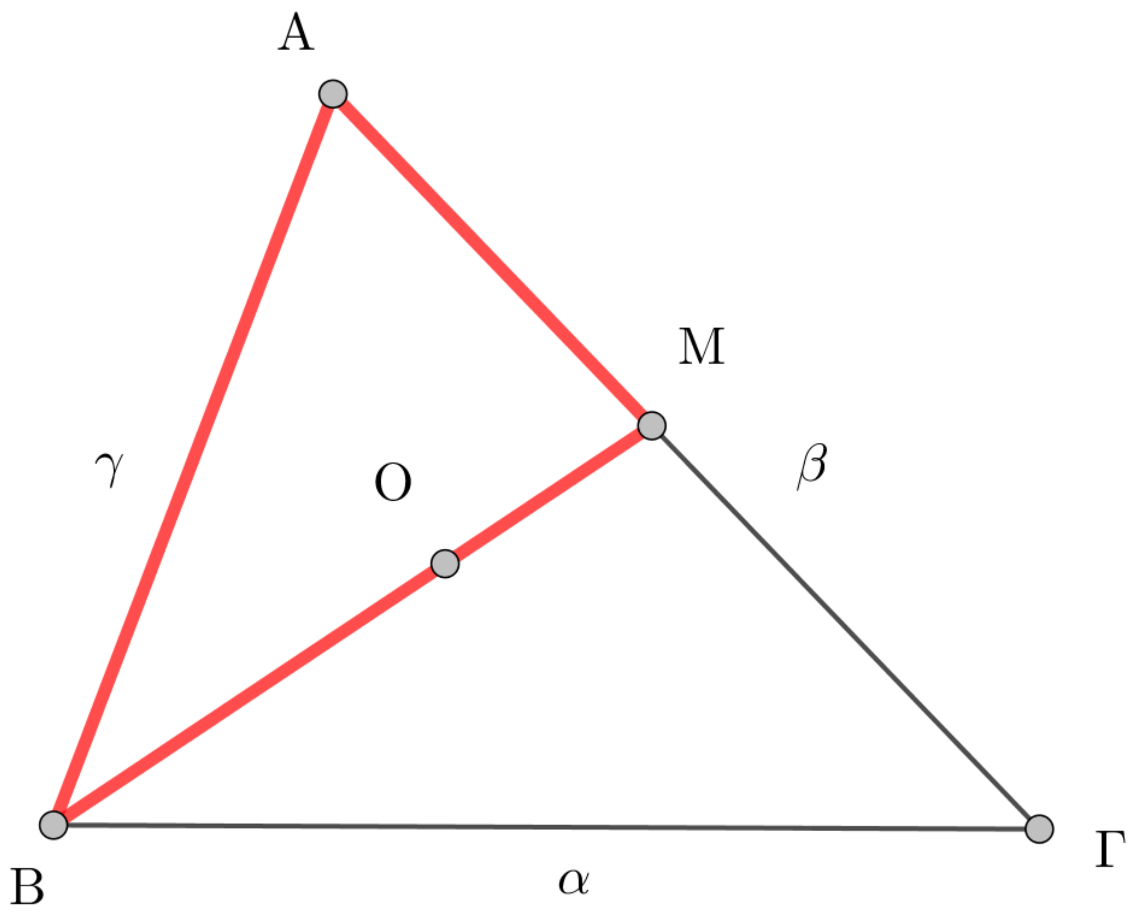
Έστω Ο *εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου* ΑΒΓ.Ν*α αποδείξετε ότι*:
$(\mathrm{I})\,\alpha < \mathrm{OB} + \mathrm{O\Gamma} < 2(\beta + \gamma)$
$(\mathrm{II})\,\tau < \mathrm{OA} + \mathrm{OB} + \mathrm{O\Gamma} < 4\tau\left(\tau = \tau\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}, \tau : \mathrm{H}\mu\iota\pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\,\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma\right)$



(I) Σ*το τρίγωνο* ΟΒΓ *απο την τριγωνική ανισότητα θα έχω*:

$$\mathrm{OB} + \mathrm{O\Gamma} > \mathrm{B\Gamma} \overset{\mathrm{B\Gamma}=\alpha}{\Longrightarrow} \mathrm{OB} + \mathrm{O\Gamma} > \alpha \Rightarrow \alpha < \mathrm{OB} + \mathrm{O\Gamma}\,(1)$$

Φέρνω την ημιευθεία ΒΟ *που την τέμνει* ΑΓ *στο σημείο* Μ.



$A\pi o\ \tau\eta\nu\ \tau\rho\iota\gamma\omega\nu\iota\kappa\acute{\eta}\ \alpha\nu\iota\sigma\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \sigma\tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o$ ABM $\acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$\mathrm{BM} < \mathrm{BA} + \mathrm{AM}\,(2)$

$\acute{E}\chi\omega$: $\mathrm{AM} < \mathrm{A\Gamma} \Rightarrow \mathrm{BA} + \mathrm{AM} < \mathrm{BA} + \mathrm{A\Gamma}\,(3)$

$A\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma$ $(2),(3)$ $\acute{\varepsilon}\chi\omega$:

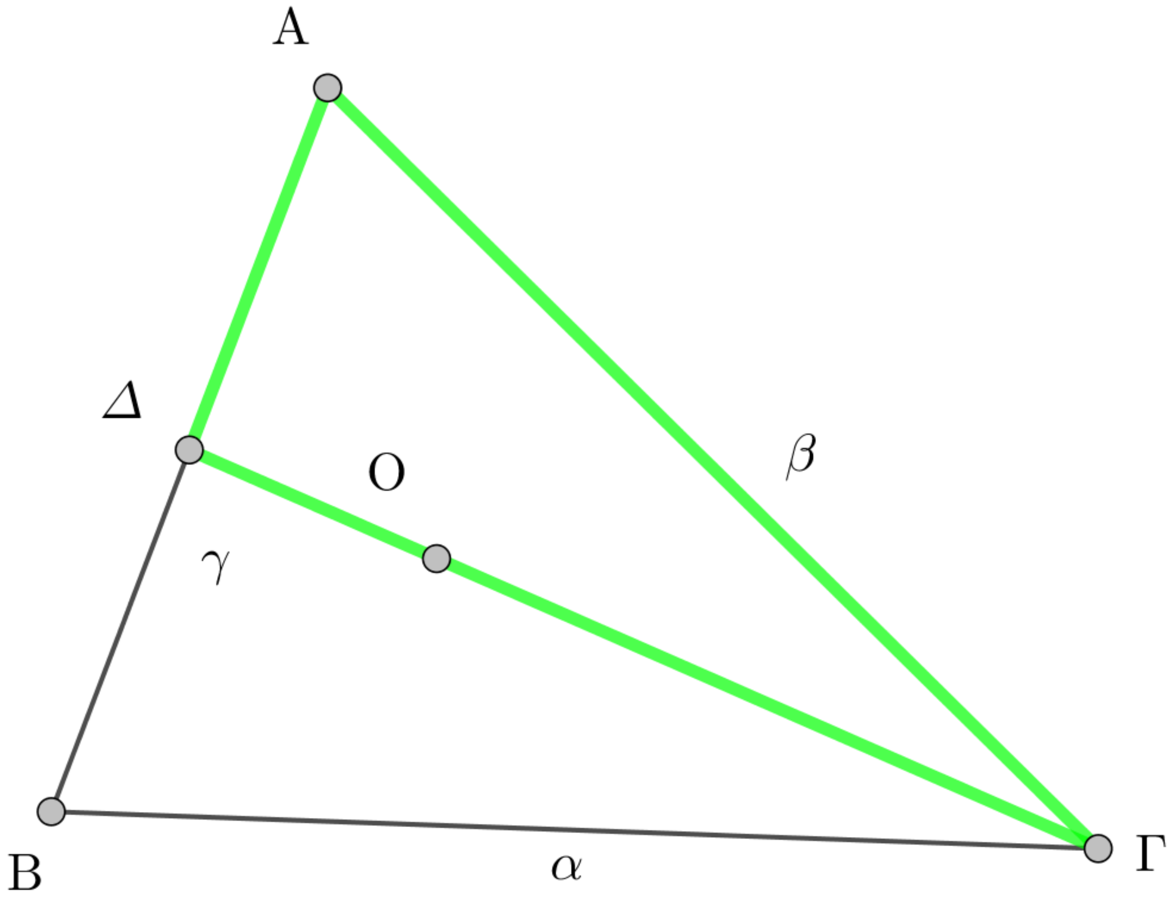
$\mathrm{BM} < \mathrm{BA} + \mathrm{AM} < \mathrm{BA} + \mathrm{A\Gamma} \Rightarrow \mathrm{BM} < \mathrm{BA} + \mathrm{A\Gamma} \overset{\mathrm{BA}=\gamma,\mathrm{A\Gamma}=\beta}{\Longrightarrow}$

$\mathrm{BM} < \beta + \gamma\,(4)$

E$\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}$ $\mathrm{OB} < \mathrm{BM}$ $\alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta$ (4) $\theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$\mathrm{OB} < \mathrm{BM} < \beta + \gamma \Rightarrow \mathrm{OB} < \beta + \gamma\,(5)$

$\Phi\acute{\varepsilon}\rho\nu\omega\ \tau\eta\nu\ \eta\mu\iota\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha$ ΓO $\pi o\upsilon\ \tau\eta\nu\ \tau\acute{\varepsilon}\mu\nu\varepsilon\iota$ AB $\sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o$ Δ.



$Απο\ την\ τριγωνική\ ανισότητα\ στο\ τρίγωνο\ ΓΔΑ\ έχω:$

$ΓΔ < ΔΑ + ΑΓ\ (6)$

$Έχω: ΔΑ < ΑΒ \Rightarrow ΔΑ + ΑΓ < ΑΒ + ΑΓ\ (7)$

$Απο\ τις\ σχέσεις\ (6),(7)\ έχω:$

$ΓΔ < ΔΑ + ΑΓ < ΑΒ + ΑΓ \Rightarrow ΓΔ < ΑΒ + ΑΓ \overset{ΑΒ=\gamma,ΑΓ=\beta}{\Longrightarrow}$

$ΓΔ < \beta + \gamma\ (8)$

$Επειδή\ ΟΓ < ΓΔ\ απο\ την\ σχέση\ (8)\ θα\ έχω:$

$ΟΓ < ΓΔ < \beta + \gamma \Rightarrow ΟΓ < \beta + \gamma\ (9).$

$Απο\ τις\ σχέσεις\ (5),(9)\ θα\ έχω:$

$$\underline{\left.\begin{cases} ΟΒ < \beta + \gamma \\ ΟΓ < \beta + \gamma \end{cases}\right\}} (+)$$

$ΟΒ + ΟΓ < \beta + \gamma + \beta + \gamma \Rightarrow ΟΒ + ΟΓ < 2\beta + 2\gamma \Rightarrow$

$ΟΒ + ΟΓ < 2(\beta + \gamma)\ (10)$

$\text{Απο τις σχέσεις } (1),(10) \text{ έχω}:$

$\alpha < \text{ΟΒ} + \text{ΟΓ} < 2(\beta + \gamma)(11)$

$(\text{ΙΙ})\text{Ομοίως } \gamma < \text{ΟΑ} + \text{ΟΒ} < 2(\alpha + \beta)(12) \text{ και } \beta < \text{ΟΑ} + \text{ΟΓ} < 2(\alpha + \gamma)(13)$

$\text{Απο τις σχέσεις } (11),(12),(13) \text{ θα έχω}:$

$$\underline{\left.\begin{cases} \alpha < \text{ΟΒ} + \text{ΟΓ} < 2\beta + 2\gamma \\ \gamma < \text{ΟΑ} + \text{ΟΒ} < 2\alpha + 2\beta \\ \beta < \text{ΟΑ} + \text{ΟΓ} < 2\alpha + 2\gamma \end{cases}\right\}(+)}$$

$$\alpha + \gamma + \beta < \text{ΟΒ} + \text{ΟΓ} + \text{ΟΑ} + \text{ΟΒ} + \text{ΟΑ} + \text{ΟΓ} < 2\alpha + 2\beta + 2\beta + 2\gamma + 2\alpha + 2\gamma$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < 2\text{ΟΑ} + 2\text{ΟΒ} + 2\text{ΟΓ} < 4\alpha + 4\beta + 4\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < 2(\text{ΟΑ} + \text{ΟΒ} + \text{ΟΓ}) < 4(\alpha + \beta + \gamma) \overset{\alpha+\beta+\gamma=2\tau}{\Longrightarrow}$$

$$\cancel{2} \bullet \tau < \cancel{2} \bullet (\text{ΟΑ} + \text{ΟΒ} + \text{ΟΓ}) < 4 \bullet \cancel{2} \bullet \tau \Rightarrow \tau < \text{ΟΑ} + \text{ΟΒ} + \text{ΟΓ} < 4\tau$$