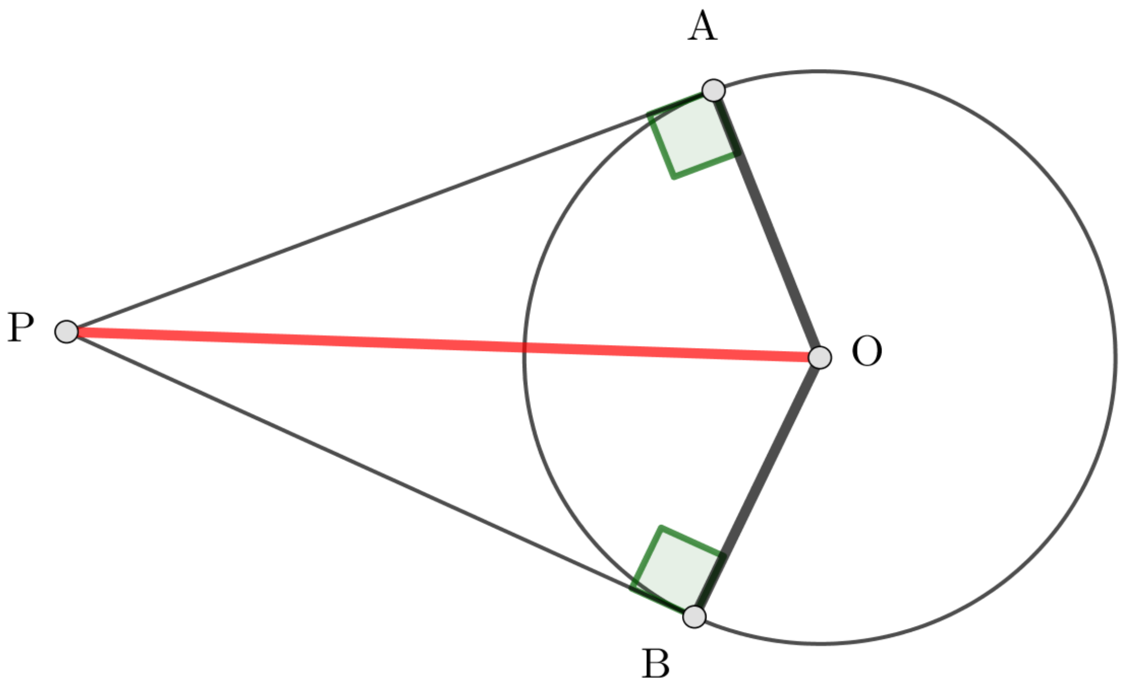
<u>ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ</u>

1.

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται απο το σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{PA}:$ *Εφαπτόμενο τμήμα στον κύκλο* (O,ρ) $\mathrm{PB}:$ *Εφαπτόμενο τμήμα στον κύκλο* (O,ρ)	$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$

Έστω κύκλος (O,ρ) *και* P *εξωτερικό του σημείο.Απο το* P *φέρνω εφαπτόμενα τμήματα* PA,PB *στον κύκλο* (O,ρ).

Θα αποδείξω ότι $\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$

Γνωρίζω ότι <u>η ακτίνα επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη του κύκλου</u>. Επειδή PA,PB *εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο* (O,ρ) *θα έχω* $\mathrm{PA}\perp\mathrm{OA},\mathrm{PB}\perp\mathrm{OB}$

Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{PAO}}$ *και* $\overset{\triangle}{\mathrm{PBO}}$ $\left(\widehat{\mathrm{PAO}}=\widehat{\mathrm{PBO}}=90^0\right)$

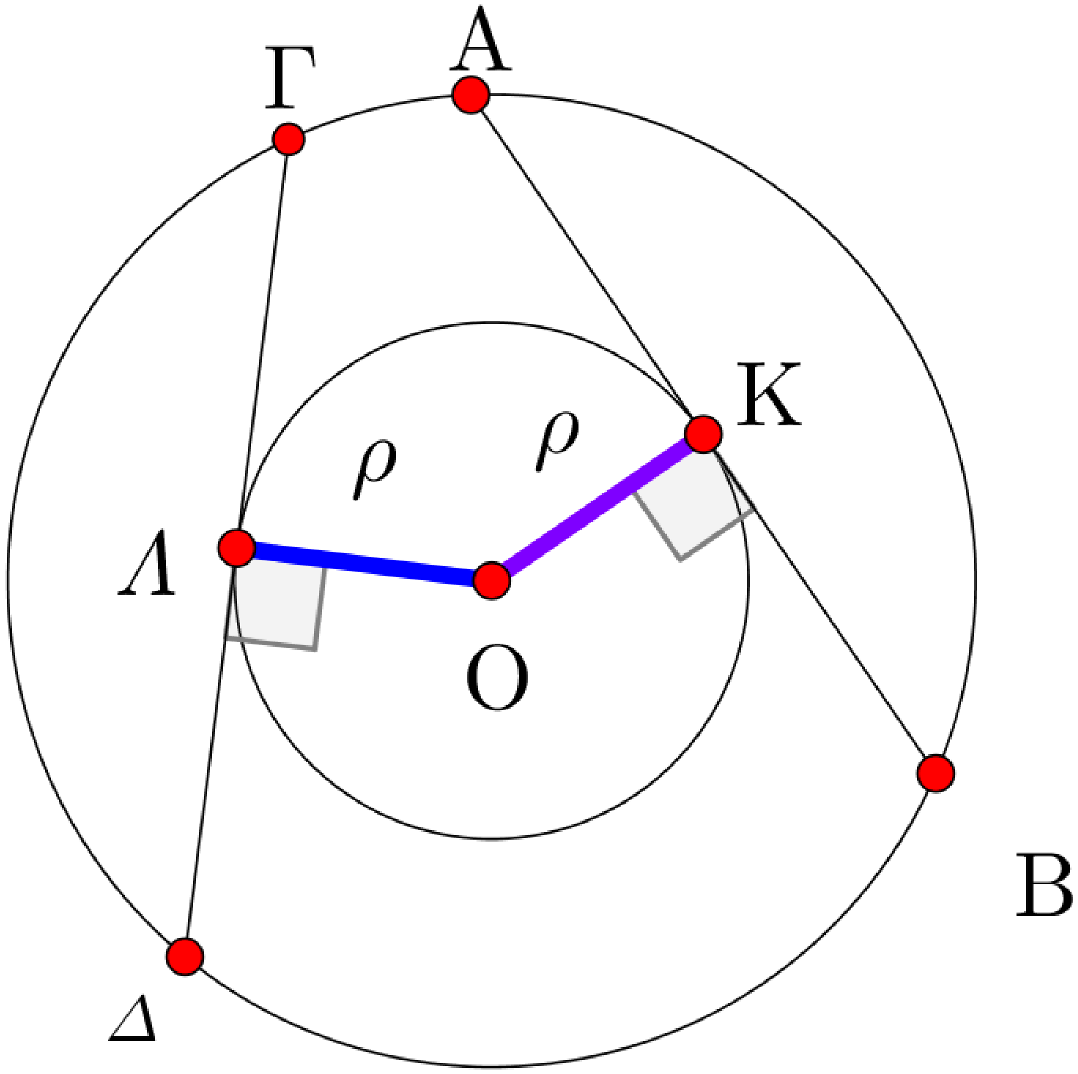
$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{PO}=\mathrm{PO}\,(\textit{Ως κοινή πλευρά})\\(\mathrm{II})\,\mathrm{OA}=\mathrm{OB}\,(\textit{Ως ακτίνες του ίδιου κύκλου})\end{array}\right\}$$

Οπότε $:\overset{\triangle}{\mathrm{PAO}}=\overset{\triangle}{\mathrm{PBO}}$

Συνεπώς θα έχω $:\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$

2.

Αν έχουμε δυο ομόκεντρους κύκλους να εξηγήσετε γιατί όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στον μικρό κύκλο είναι ίσες.



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
ΓΔ : *Εφαπτομένη του κύκλο* (O,ρ) *στο σημείο επαφής* Λ ΑΒ : *Εφαπτομένη του κύκλο* (O,ρ) *στο σημείο επαφής* Κ	ΡΑ = ΡΒ

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \Gamma\Delta\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\ (\mathrm{O},\rho)\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma\ \Lambda\ \theta\alpha$

$\acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{O}\Lambda \perp \Gamma\Delta \begin{pmatrix} \Gamma\iota\alpha\tau\iota\ \eta\ \alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha\ \varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta \\ \sigma\tau\eta\nu\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta \end{pmatrix}$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \mathrm{AB}\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\ (\mathrm{O},\rho)\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma\ \mathrm{K}\ \theta\alpha$

$\acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{OK} \perp \mathrm{AB} \begin{pmatrix} \Gamma\iota\alpha\tau\iota\ \eta\ \alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha\ \varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta \\ \sigma\tau\eta\nu\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta \end{pmatrix}$

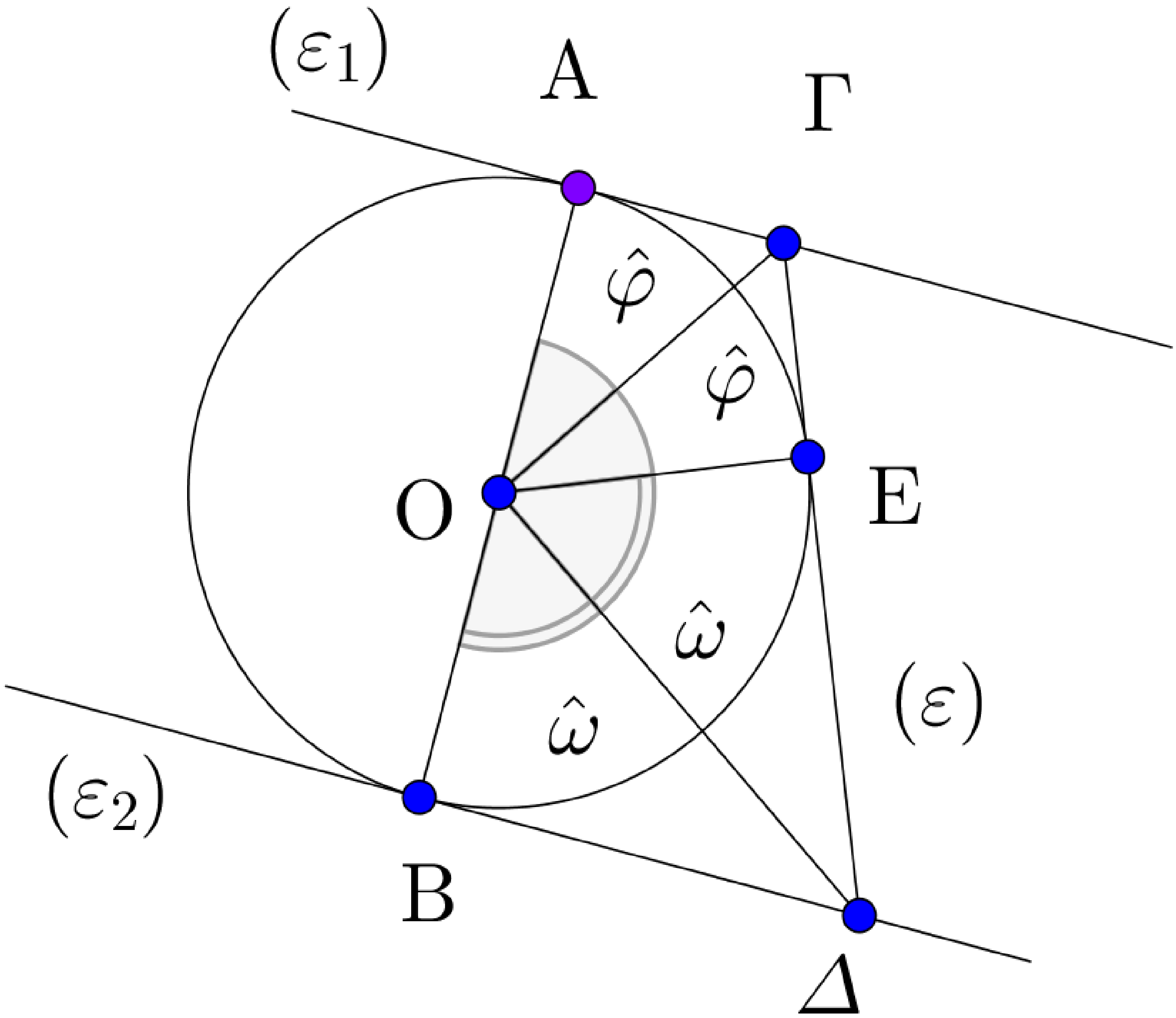
Έχω: $\mathrm{O}\Lambda = \mathrm{OK}$ (*Ως ακτίνες του ίδιου κύκλου*)

Γνωρίζω ότι αν <u>*δυο χορδές έχουν ίσα αποστήματα τότε είναι ίσες*</u>

Οι AB *και* $\Gamma\Delta$ *οι χορδές του κύκλου* (O,OA) *με αντίστοιχα αποστήματα* OK *και* $\mathrm{O}\Lambda$.*Επειδή* $\mathrm{OK} = \mathrm{O}\Lambda$ *προκύπτει οτι οι χορδές* AB *και* $\Gamma\Delta$ *έχουν ίσα αποστήματα*.*Οπότε* $\mathrm{AB} = \Gamma\Delta$ *ως χορδές που έχουν ίσα αποστήματα.*

3.εφαπτόμενες

Δίνεται κύκλος (O,ρ), *μια διάμετρος του* AB *και οι εφαπτόμενες* $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ *του κύκλου στα σημεία* A,B. *Αν μια τρίτη εφαπτόμενη* (ε) *τέμνει τις* $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ *στα* Γ,Δ, *να αποδείξετε ότι* $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta = 90^0$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
(ε_1): Ε*φαπτόμενη του κύκλου* (Ο,ΟΑ) *στο σημείο επαφής* Α (ε_2): Ε*φαπτόμενη του κύκλου* (Ο,ΟΒ) *στο σημείο επαφής* Β (ε_3): Ε*φαπτόμενη του κύκλου* (Ο,ΟΕ) *στο σημείο επαφής* Ε ΑΒ: Δ*ιάμετρος του κύκλου*	$\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta = 90^0$

Γ*νωρίζω ότι η* <u>*διακεντρική ευθεία διχοτομεί την γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής*</u>

Ε*πειδή* ΓΑ, ΓΕ *εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο* $(\mathrm{O}, \mathrm{OA})$ *η* ΓΟ *διχοτομεί την γωνία* $\mathrm{A\hat{O}E}$. Ο*πότε θα έχω*:

$$\mathrm{A\hat{O}\Gamma} = \mathrm{\Gamma\hat{O}E} = \hat{\varphi} \ (1)$$

Ε*πειδή* ΔΒ, ΔΕ *εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο* $(\mathrm{O}, \mathrm{OB})$ *η* ΔΟ *διχοτομεί την γωνία* $\mathrm{E\hat{O}B}$. Ο*πότε θα έχω*:

$$\mathrm{E\hat{O}\Delta} = \mathrm{\Delta\hat{O}B} = \hat{\omega} \ (2)$$

Ε*πειδή τα σημεία* Α, Ο, Β *είναι συνευθειακά θα έχω*:

$$\mathrm{A\hat{O}B} = 180^0 \Rightarrow \mathrm{A\hat{O}\Gamma} + \mathrm{\Gamma\hat{O}E} + \mathrm{E\hat{O}\Delta} + \mathrm{\Delta\hat{O}B} = 180^0 \overset{\substack{\mathrm{A\hat{O}\Gamma}=\mathrm{\Gamma\hat{O}E}=\hat{\varphi} \\ \mathrm{E\hat{O}\Delta}=\mathrm{\Delta\hat{O}B}=\hat{\omega}}}{\Longrightarrow}$$

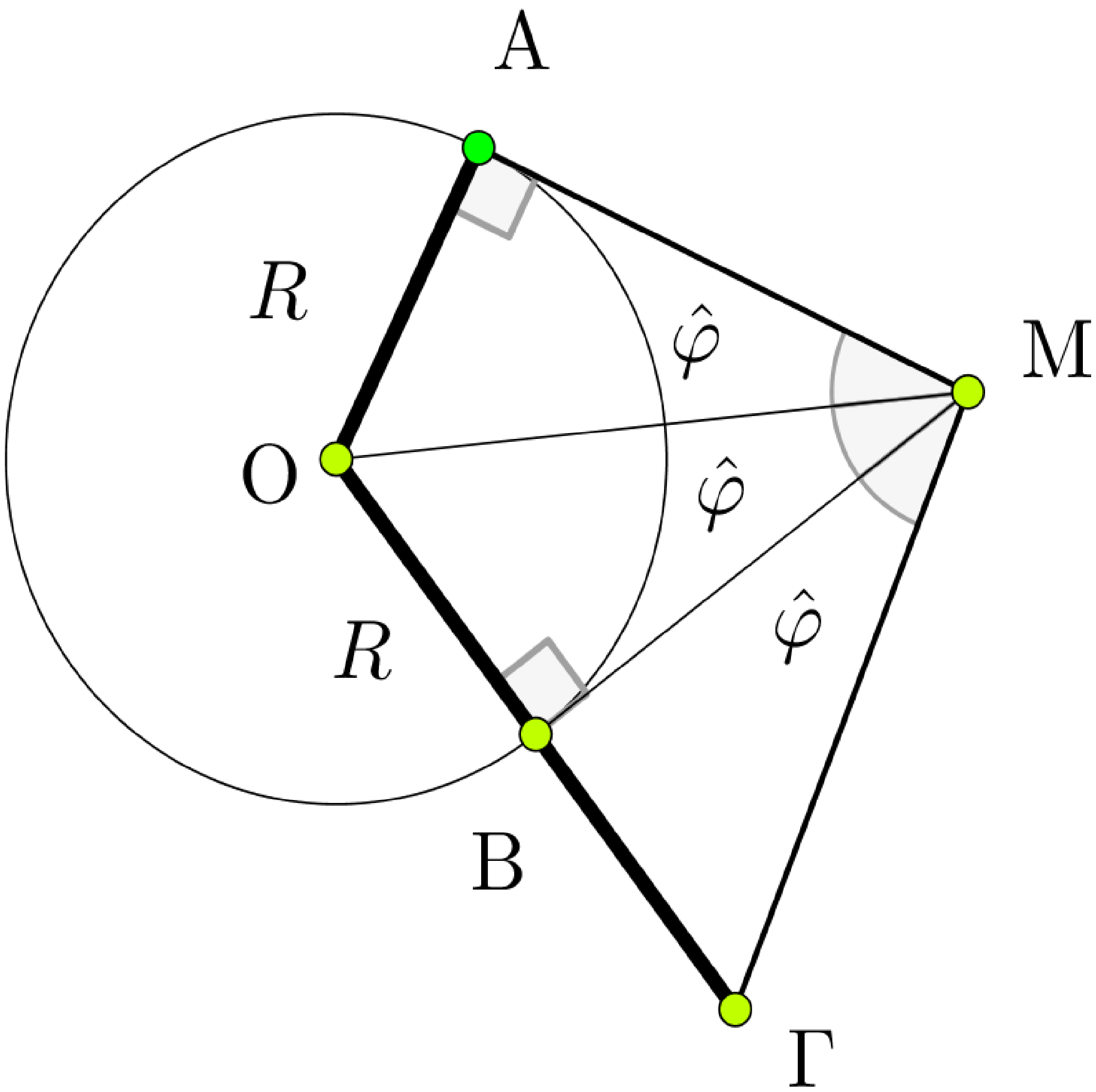
$$\hat{\varphi} + \hat{\varphi} + \hat{\omega} + \hat{\omega} = 180^0 \Rightarrow 2\hat{\varphi} + 2\hat{\omega} = 180^0 \Rightarrow 2\left(\hat{\varphi} + \hat{\omega}\right) = 180^0 \Rightarrow$$

$$\hat{\varphi} + \hat{\omega} = \frac{180^0}{2} \Rightarrow \hat{\varphi} + \hat{\omega} = 90^0$$

$$\mathrm{\Gamma\hat{O}\Delta} = \mathrm{\Gamma\hat{O}E} + \mathrm{E\hat{O}\Delta} \overset{\substack{\mathrm{\Gamma\hat{O}E}=\hat{\varphi} \\ \mathrm{E\hat{O}\Delta}=\hat{\omega}}}{=} \hat{\varphi} + \hat{\omega} = 90^0$$

4.

Α*πο σημείο* Μ *εξωτερικό του κύκλου* (O, R) *φέρουμε τις εφαπτόμενες* ΜΑ, ΜΒ *του κλυκλου*. Π*ροεκτείνουμε το* ΟΒ *κατά ίσο τμήμα* ΒΓ. Ν*α αποδείξετε ότι η γωνία* $\mathrm{A\hat{M}\Gamma}$ *είναι τριπλάσια της* $\mathrm{B\hat{M}\Gamma}$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
MA, MB : *Εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου* (O, R) $\mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma}$	$\mathrm{A\hat{M}\Gamma} = 3\mathrm{B\hat{M}\Gamma}$

Γ*νωρίζω ότι η* <u>*διακεντρική ευθεία διχοτομεί την γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων*</u>

Ε*πειδή* MA, MB *εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου* (O, R) *η* OM *διχοτομεί την γωνία* $\mathrm{A\hat{M}B}$. *Άρα θα έχω*:

$$\mathrm{A\hat{M}O} = \mathrm{O\hat{M}B} \quad (1)$$

Επειδή ΜΒ εφαπτομένη του κύκλου θα είναι κάθετη στην ακτυίνα επαφής.Οπότε θα έχω $\text{MB} \perp \text{OB}$
Στο τρίγωνο ΟΜΓ η ΜΒ είναι διάμεσος και ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΟΓ.Συνεπώς το τρίγωνο ΟΜΓ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΟΓ.Στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΟΓ $(\text{MO}=\text{M}\Gamma)$ η ΜΒ είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση ΟΓ. Οπότε η ΜΒ είναι διχοτόμος της $\text{M}\hat{\text{O}}\Gamma$
(Ως ύψος που αντιστοιχεί στην βάση ισοσκελούς τριγώνου)
Άρα θα έχω:

$$\text{O}\hat{\text{M}}\text{B} = \text{B}\hat{\text{M}}\Gamma \ (2)$$

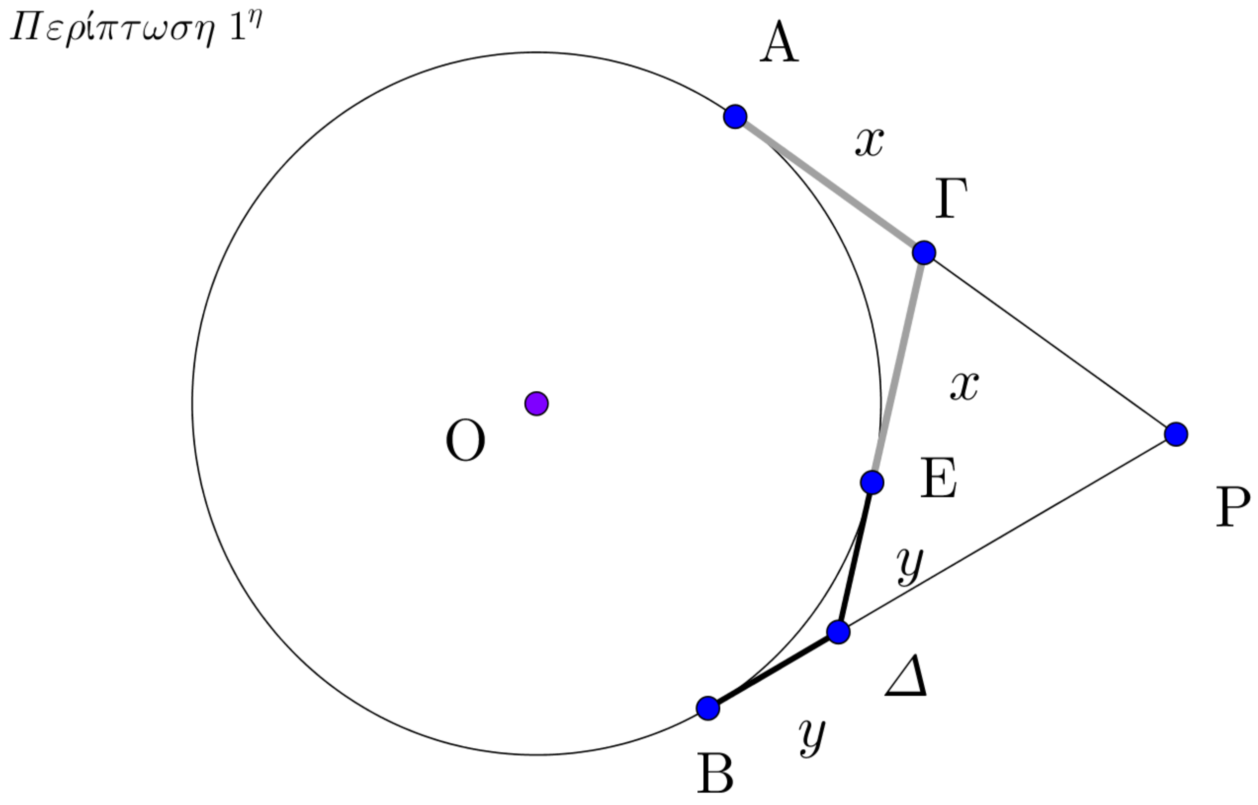
Απο τις σχέσεις (1),(2) θα έχω:

$$\left.\begin{cases} \text{A}\hat{\text{M}}\text{O} = \text{O}\hat{\text{M}}\text{B} \\ \text{O}\hat{\text{M}}\text{B} = \text{B}\hat{\text{M}}\Gamma \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{A}\hat{\text{M}}\text{O} = \text{O}\hat{\text{M}}\text{B} = \text{B}\hat{\text{M}}\Gamma$$

$$\text{A}\hat{\text{M}}\Gamma = \text{A}\hat{\text{M}}\text{O} + \text{O}\hat{\text{M}}\text{B} + \text{B}\hat{\text{M}}\Gamma \overset{\text{A}\hat{\text{M}}\text{O}=\text{O}\hat{\text{M}}\text{B}=\text{B}\hat{\text{M}}\Gamma}{=} \text{B}\hat{\text{M}}\Gamma + \text{B}\hat{\text{M}}\Gamma + \text{B}\hat{\text{M}}\Gamma = 3\text{B}\hat{\text{M}}\Gamma$$

5.

Απο εξωτερικό σημείο Ρ του κύκλου (O, R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ.Μια τρίτη εφαπτομένη στο σημείο Ε του κύκλου τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ,Δ αντίστοιχα.Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ ως συνάρτηση των τμημάτων ΡΑ και ΓΔ



Περίπτωση (Ι): Το Ε είναι σημείο του κυρτού τόξου ΑΒ

Γνωρίζω ότι <u>τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται απο το σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους</u>

Επειδή ΡΑ, ΡΒ εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (O,ρ) θα είναι ίσα μεταξύ τους. Οπότε θα έχω:

$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$

Επειδή ΓΑ, ΓΕ εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (O,ρ) θα είναι ίσα μεταξύ τους. Οπότε θα έχω:

$\Gamma\mathrm{A}=\Gamma\mathrm{E}=x$

Επειδή ΔΒ, ΔΕ εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (O,ρ) θα είναι ίσα μεταξύ τους. Οπότε θα έχω:

$\Delta\mathrm{B}=\Delta\mathrm{E}=y$

Έχω: $\Gamma\Delta=\Gamma\mathrm{E}+\mathrm{E}\Delta\overset{\substack{\Gamma\mathrm{E}=x\\ \mathrm{E}\Delta=y}}{=}x+y$

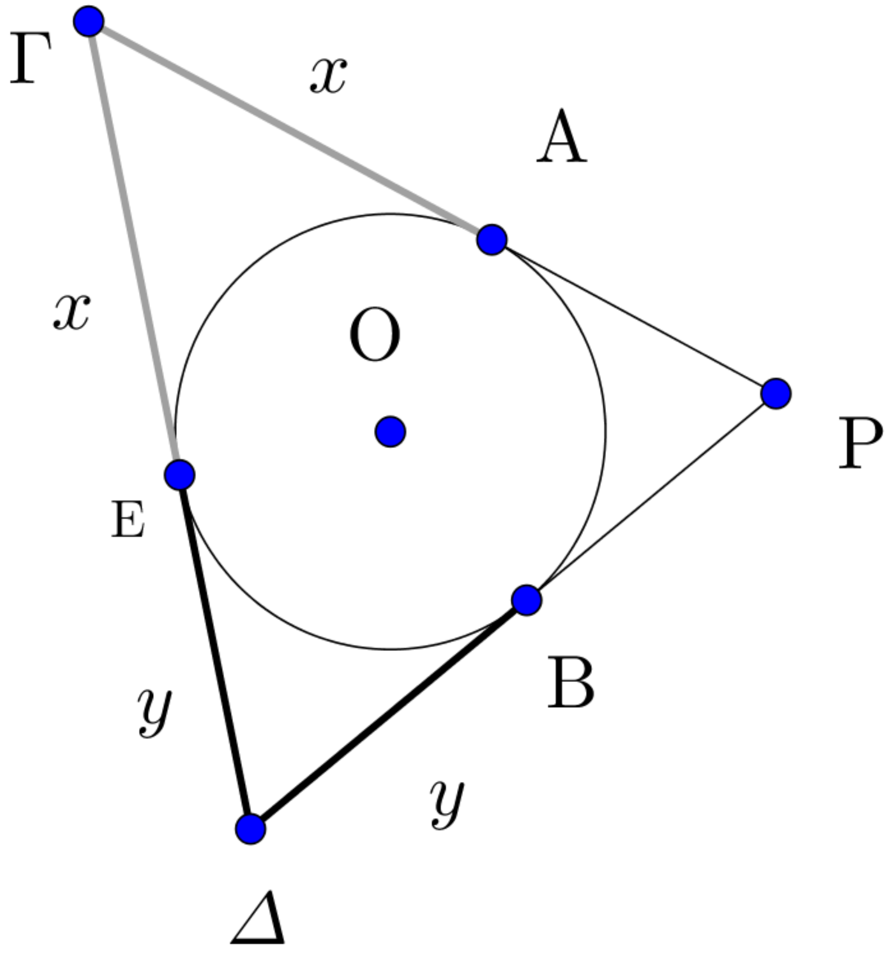
$$\textit{Έχω}: \mathrm{P\Gamma} = \mathrm{PA} - \mathrm{A\Gamma} \overset{\mathrm{A\Gamma}=x}{=} \mathrm{PA} - x$$

$$\textit{Έχω}: \mathrm{P\Delta} = \mathrm{PB} - \mathrm{B\Delta} \overset{\mathrm{B\Delta}=y}{=} \mathrm{PB} - y$$

Η *περίμετρος του* ΡΓΔ *θα είναι*:

$$\mathrm{P\Gamma} + \mathrm{P\Delta} + \Gamma\Delta \overset{\substack{\mathrm{P\Gamma}=\mathrm{PA}-x \\ \mathrm{P\Delta}=\mathrm{PB}-y \\ \Gamma\Delta=x+y}}{=} \mathrm{PA} - x + \mathrm{PB} - y + x + y = \mathrm{PA} + \mathrm{PB} \overset{\mathrm{PA}=\mathrm{PB}}{=} 2\mathrm{PA}$$

Περίπτωση 2^{η}



$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\left(\mathrm{II}\right):\mathrm{T}o\ \mathrm{E}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \tau o\upsilon\ \mu\eta\ \kappa\upsilon\rho\tau o\acute{\upsilon}\ \tau\acute{o}\xi o\upsilon\ \mathrm{AB}$

$\Gamma\nu\omega\rho\acute{\iota}\zeta\omega\ \acute{o}\tau\iota$ $\underline{\tau\alpha\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau\acute{o}\mu\varepsilon\nu\alpha\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon\ \pi o\upsilon\ \acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\alpha\iota\ \alpha\pi o\ \tau o}$

$\underline{\sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \varepsilon\kappa\tau\acute{o}\varsigma\ \alpha\upsilon\tau o\acute{\upsilon}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma\alpha\ \mu\varepsilon\tau\alpha\xi\acute{\upsilon}\ \tau o\upsilon\varsigma}$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \ \mathrm{PA},\mathrm{PB}\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau\acute{o}\mu\varepsilon\nu\alpha\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon\left(\mathrm{O},\rho\right)\theta\alpha$

$\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma\alpha\ \mu\varepsilon\tau\alpha\xi\acute{\upsilon}\ \tau o\upsilon\varsigma.\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \ \Gamma\mathrm{A},\Gamma\mathrm{E}\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau\acute{o}\mu\varepsilon\nu\alpha\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon\left(\mathrm{O},\rho\right)\theta\alpha$

$\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma\alpha\ \mu\varepsilon\tau\alpha\xi\acute{\upsilon}\ \tau o\upsilon\varsigma.\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\Gamma\mathrm{A}=\Gamma\mathrm{E}=x$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \ \Delta\mathrm{B},\Delta\mathrm{E}\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau\acute{o}\mu\varepsilon\nu\alpha\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon\left(\mathrm{O},\rho\right)\theta\alpha$

$\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma\alpha\ \mu\varepsilon\tau\alpha\xi\acute{\upsilon}\ \tau o\upsilon\varsigma.\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\Delta\mathrm{B}=\Delta\mathrm{E}=y$

$\acute{E}\chi\omega:\Gamma\Delta=\Gamma\mathrm{E}+\mathrm{E}\Delta\overset{\substack{\Gamma\mathrm{E}=x\\ \mathrm{E}\Delta=y}}{=}x+y$

$\acute{E}\chi\omega:\mathrm{P}\Gamma=\mathrm{PA}+\mathrm{A}\Gamma\overset{\mathrm{A}\Gamma=x}{=}\mathrm{PA}+x$

$\acute{E}\chi\omega:\mathrm{P}\Delta=\mathrm{PB}+\mathrm{B}\Delta\overset{\mathrm{B}\Delta=y}{=}\mathrm{PB}+y$

$\mathrm{H}\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma\ \tau o\upsilon\ \mathrm{P}\Gamma\Delta\ \theta\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota:$

$$\mathrm{P}\Gamma+\mathrm{P}\Delta+\Gamma\Delta\overset{\substack{\mathrm{P}\Gamma=\mathrm{PA}+x\\ \mathrm{P}\Delta=\mathrm{PB}+y}}{=}\mathrm{PA}+x+\mathrm{PB}+y+\Gamma\Delta=\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+x+y\overset{\substack{\mathrm{PA}=\mathrm{PB}\\ \Gamma\Delta=x+y}}{=}2\mathrm{PA}+\Gamma\Delta$$