ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

1.

$$\Sigma\varepsilon\ o\rho\theta o\gamma\omega\nu\acute{\iota}o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mu\iota\alpha\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\ \tau o\upsilon\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma\eta\ \mu\varepsilon\ \tau\alpha\ \frac{2}{3}\ \tau\eta\varsigma\ \acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\varsigma\ \tau o\upsilon.$$

Να υπολογιστούν οι γωνίες του.

Διακρίνω τις περιπτώσεις

$$\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\ \text{Μια οξεία γωνία είναι ίση με τα } \frac{2}{3} \text{ της ορθής} \\ (\mathrm{II})\ \text{Μια οξεία γωνία είναι ίση με τα } \frac{2}{3} \text{ της άλλης οξείας γωνίας} \end{Bmatrix}$$

<u>Περίπτωση (I):</u>

Έστω έχω το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}\left(\hat{\mathrm{A}}=90^0\right)$ *με* $\hat{\mathrm{B}}=\frac{2}{3}\hat{\mathrm{A}}$.

$$\hat{\mathrm{B}}=\frac{2}{3}\hat{\mathrm{A}}\overset{\hat{\mathrm{A}}=90^0}{=}\frac{2}{\cancel{3}}\bullet\overset{30}{\cancel{90}}=2\bullet 30=60^0$$

$$\text{Έχω}: \hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=90^0\ \left(\text{Ως άθροισμα οξειών γωνιών ορθογωνίου τριγώνου}\right)$$

$$\hat{\Gamma}=90^0-\hat{\mathrm{B}}\overset{\hat{\mathrm{B}}=60^0}{\Longleftrightarrow}\hat{\Gamma}=90^0-60^0\Leftrightarrow\hat{\Gamma}=30^0$$

<u>Περίπτωση (II):</u>

Έστω έχω το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}\left(\hat{\mathrm{A}}=90^0\right)$ *με* $\hat{\mathrm{B}}=\frac{2}{3}\hat{\Gamma}$.

$$\text{Έχω}: \hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=90^0\ \left(\text{Ως άθροισμα οξειών γωνιών ορθογωνίου τριγώνου}\right)$$

$$\frac{2}{3}\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=90^0\Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{3}\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}\right)=3\bullet 90^0\Leftrightarrow 3\frac{2}{3}\hat{\Gamma}+3\hat{\Gamma}=3\bullet 90^0\Leftrightarrow$$

Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με το 2 έτσι ώστε στον παρονομαστή να εμφανιστεί ο αριθμός 10.

$$2\hat{\Gamma}+3\hat{\Gamma}=3\bullet 90^0 \Leftrightarrow 5\hat{\Gamma}=270^0 \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=\frac{270^0}{5} \Leftrightarrow$$

$$\hat{\Gamma}=\frac{270^0\bullet 2}{5\bullet 2} \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=\frac{540^0}{10} \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=54^0$$

$$\acute{E}\chi\omega: \hat{B}=\frac{2}{3}\hat{\Gamma} \overset{\hat{\Gamma}=54^0}{=} \frac{2}{\cancel{3}}\bullet \overset{18}{\cancel{54}}=36^0$$

2.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ *είναι* $\hat{B}_{\varepsilon\xi}=90^0+\frac{\hat{A}}{2}$. *Να αποδείξετε ότι* ΑΒ = ΑΓ

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
ΑΒ = ΑΓ, ΔΕ / /ΒΓ	ΑΔ = ΑΕ

Γνωρίζω ότι κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών γωνιών. Επειδή $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$ *είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου* ΑΒΓ *θα έχω*:

$$\hat{B}_{\varepsilon\xi}=\hat{A}+\hat{B}$$

$$\hat{B}_{\varepsilon\xi}=90^0+\frac{\hat{A}}{2} \overset{\hat{B}_{\varepsilon\xi}=\hat{A}+\hat{B}}{\Longrightarrow} \hat{A}+\hat{B}=90^0+\frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \hat{A}-\frac{\hat{A}}{2}+\hat{B}=90^0 \Rightarrow \frac{2\hat{A}}{2}-\frac{\hat{A}}{2}+\hat{B}=90^0$$

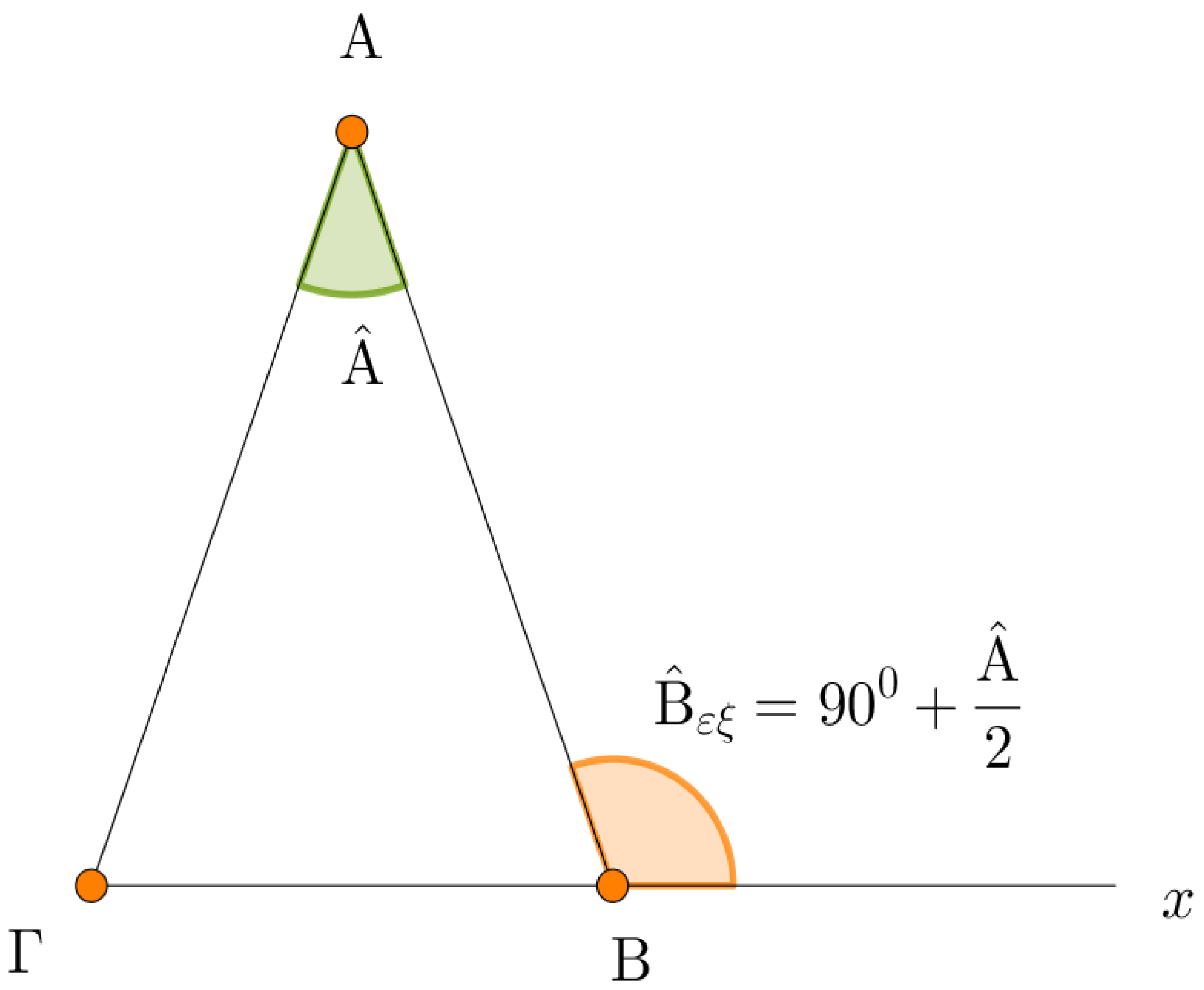
$$\Rightarrow \frac{\hat{A}}{2}+\hat{B}=90^0$$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ *το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο με* 180^0

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^0 \Rightarrow \hat{A}=180^0-\hat{B}-\hat{\Gamma}$$

$$\frac{\hat{A}}{2}+\hat{B}=90^0 \overset{\hat{A}=180^0-\hat{B}-\hat{\Gamma}}{\Longrightarrow} \frac{180^0-\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}+\hat{B}=90^0 \Rightarrow \frac{180^0}{2}-\frac{\hat{B}}{2}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\hat{B}=90^0$$

$$\Rightarrow \cancel{90^0}+\frac{2\hat{B}}{2}-\frac{\hat{B}}{2}=\cancel{90^0}+\frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2}=\frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow \hat{B}=\hat{\Gamma}$$



$\Sigma\tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o$ ΑΒΓ $\acute{\varepsilon}\chi\omega\ \hat{B} = \hat{\Gamma}$. Οπότε θα ισχύει ΑΒ = ΑΓ

(Γιατί στο ίδιο τρίγωνο απέναντι απο ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές)

3.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος του ΑΔ.

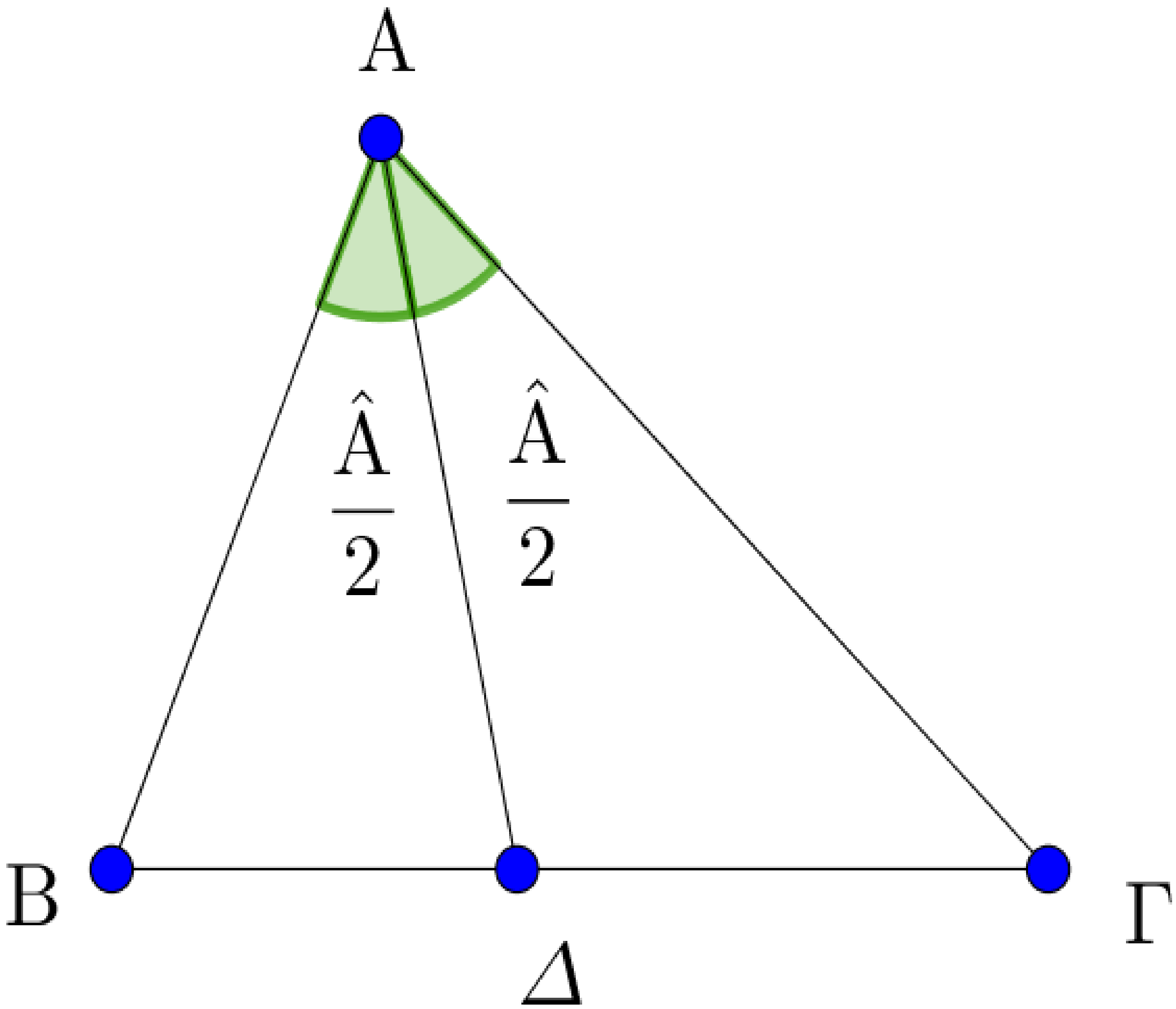
Να αποδείξετε ότι:

$(I)\ A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

$(II)\ A\hat{\Delta}B = 90^0 - \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$

$A\hat{\Delta}\Gamma = 90^0 + \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{A\Delta}: \Delta\iota\chi o\tau \acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \hat{\mathrm{A}}$	$(\mathrm{I})\ \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma - \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma}$ $(\mathrm{II})\ \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 90^0 - \frac{\hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma}}{2}$ $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = 90^0 + \frac{\hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma}}{2}$



(I) Επειδή ΑΔ *διχοτόμος της* $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ *θα έχω*:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} \quad (1)$$

Γ*νωρίζω ότι* <u>*κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών γωνιών*</u>. Ε*πειδή* $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ *είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου* ΑΔΒ *θα έχω*:

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta + \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta \overset{\substack{\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta=\hat{\mathrm{B}}}}{\Longrightarrow} \boxed{\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} + \hat{\mathrm{B}}} \,(1)$$

Ε*πειδή* $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ *είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου* ΑΔΓ *θα έχω*:

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma + \mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta \overset{\substack{\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\\ \mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=\hat{\Gamma}}}{\Longrightarrow} \boxed{\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} + \hat{\Gamma}} \,(2)$$

Α*πο τις σχέσεις* $(1),(2)$ *θα έχω*:

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma - \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} \overset{\substack{\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\hat{\mathrm{B}}\\ \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\hat{\Gamma}}}{=} \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} + \hat{\mathrm{B}} - \left(\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} + \hat{\Gamma}\right) = \cancel{\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}} + \hat{\mathrm{B}} - \cancel{\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}} - \hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma}$$

(II) *Έχω*: $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma + \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 180^0$

$$\underline{\left.\begin{cases} \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma - \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma} \\ \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma + \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 180^0 \end{cases}\right\}}(+)$$

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma - \cancel{\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}} + \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma + \cancel{\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}} = 180^0 + \hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma} \Rightarrow$$

$$2\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = 180^0 + \hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma} \Rightarrow \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = \frac{180^0 + \hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = \frac{180^0}{2} + \frac{\hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = 90^0 + \frac{\hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma}}{2}$$

$\acute{E}\chi\omega: \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma + \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 180^0 \Rightarrow \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 180^0 - \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma \overset{\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = 90^0 + \frac{\hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma}}{2}}{\Longrightarrow}$

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 180^0 - \left(90^0 + \frac{\hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma}}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 180^0 - 90^0 - \frac{\hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 90^0 - \frac{\hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma}}{2}$$

4.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ *με* $\hat{\mathrm{B}} > \hat{\Gamma}$ *φέρουμε το ύψος* ΑΔ *και τη διχοτόμο* ΑΕ. Ν*α αποδείξετε ότι*: $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \frac{\hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma}}{2}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
ΑΕ : *Διχοτόμος της* $\hat{\mathrm{A}}$ $\mathrm{A}\Delta \perp \mathrm{B}\Gamma$	$\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \frac{\hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma}}{2}$

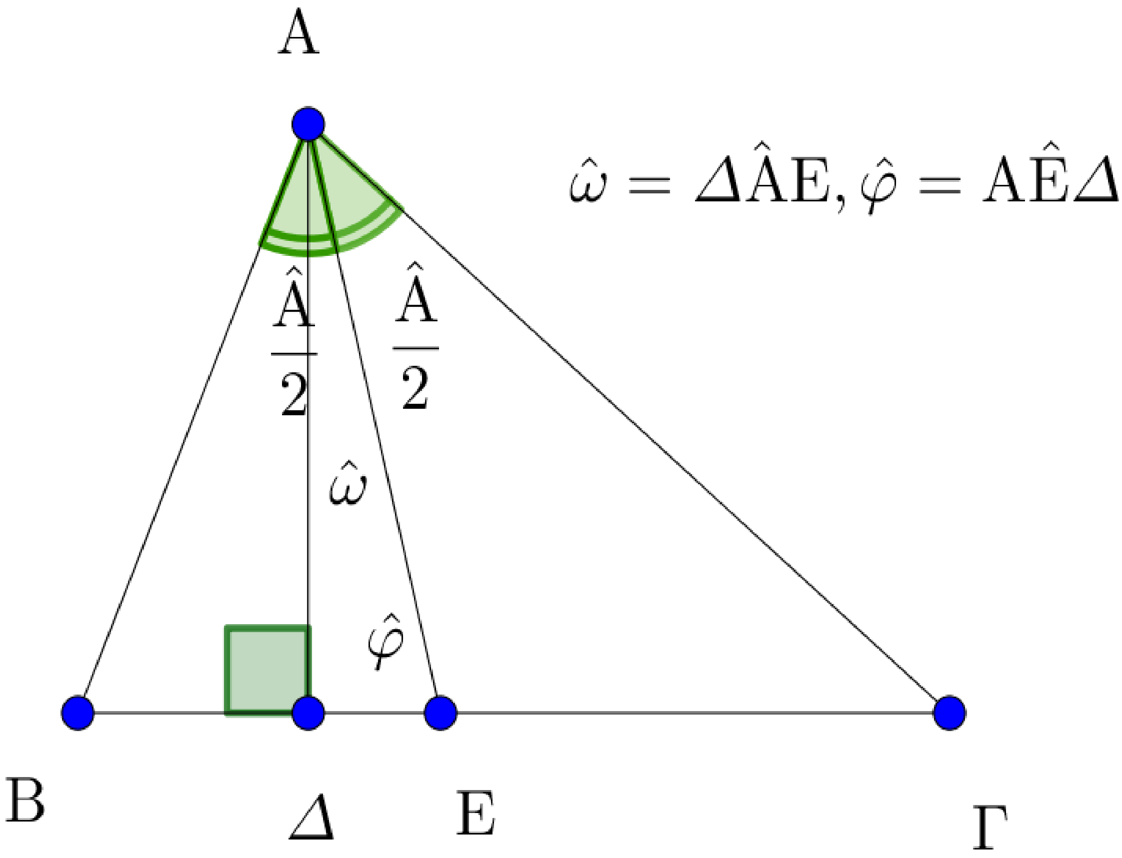
Θ*έτω*: $\hat{\omega} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E},\ \hat{\varphi} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta$

Ε*πειδή* ΑΕ *διχοτόμος της* $\hat{\mathrm{A}}$ *θα έχω*:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} \quad (1)$$

Γ*νωρίζω ότι* <u>*κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών γωνιών*</u>. Ε*πειδή* $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta$ *είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου* ΑΕΓ *θα έχω*:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta = \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma + \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{E} \overset{\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta = \hat{\varphi},\ \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2},\ \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{E} = \hat{\Gamma}}{\Longrightarrow} \hat{\varphi} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} + \hat{\Gamma} \quad (2)$$



$\Sigma\tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o$ ΑΒΓ <u>*το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο με* 180^0</u>

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^0 \Rightarrow \hat{A}=180^0-\hat{B}-\hat{\Gamma}\,(3)$

Α*πο τις σχέσεις* $(2),(3)$ *θα έχω*:

$$\hat{\varphi}=\frac{\hat{A}}{2}+\hat{\Gamma} \overset{\hat{A}=180^0-\hat{B}-\hat{\Gamma}}{\Longrightarrow} \hat{\varphi}=\frac{180^0-\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}+\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\varphi}=\frac{180^0}{2}-\frac{\hat{B}}{2}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\frac{2\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow$$

$$\hat{\varphi}=90^0-\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}\,(4)$$

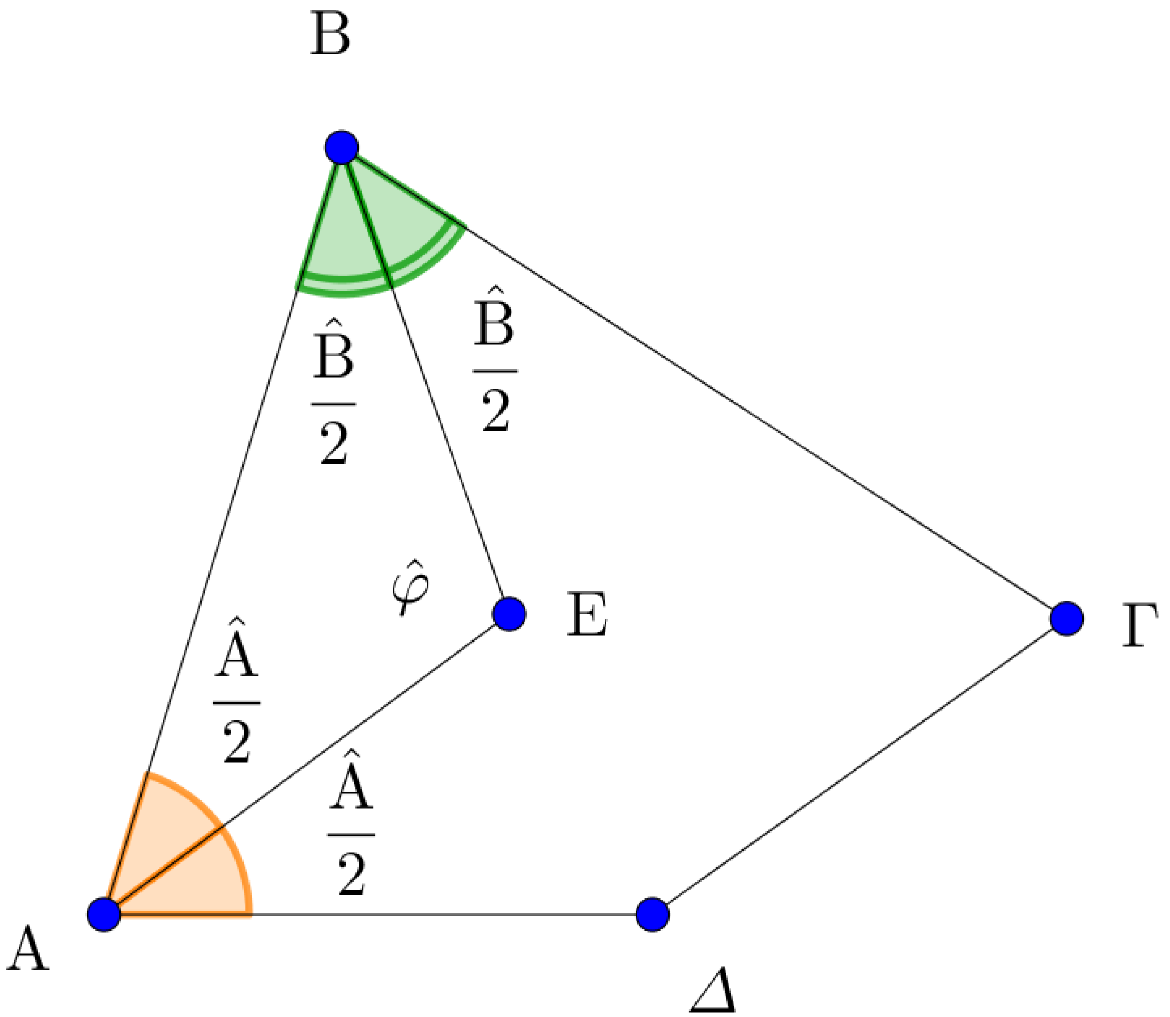
Σ*το ορθογώνιο τρίγωνο* ΑΔΕ $\left(A\hat{\Delta}E=90^0\right)$ <u>*το άθροισμα των οξειών γωνιών του είναι ίσο με* 90^0</u>. Ο*πότε θα έχω*:

$$\Delta\hat{A}E + A\hat{E}\Delta = 90^0 \overset{\hat{\omega}=\Delta\hat{A}E,\ \hat{\varphi}=A\hat{E}\Delta}{\Longrightarrow} \hat{\omega} + \hat{\varphi} = 90^0 \Rightarrow \hat{\omega} = 90^0 - \hat{\varphi} \overset{\hat{\varphi}=90^0-\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}}{\Longrightarrow}$$

$$\hat{\omega} = 90^0 - \left(90^0 - \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2}\right) \Rightarrow \hat{\omega} = \cancel{90^0} - \cancel{90^0} + \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow \hat{\omega} = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$$

5.

Αν οι διχοτόμοι των γωνιών κυρτού τετραπλεύρου τέμνονται σε σημείο Ε, *να αποδείξετε ότι* : $A\hat{E}B = \frac{\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}}{2}$



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\mathrm{AE}: \Delta\iota\chi o\tau \acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \hat{\mathrm{A}}$ $\mathrm{BE}: \Delta\iota\chi o\tau \acute{o}\mu o\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \hat{\mathrm{B}}$	$\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = \dfrac{\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}}{2}$

Επειδή ΑΕ *διχοτόμος της* $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ *θα έχω*:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} \quad (1)$$

Επειδή ΒΕ *διχοτόμος της* $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ *θα έχω*:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} \quad (2)$$

Σ*το τρίγωνο* ΑΒΕ <u>*το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο με* 180^0</u>

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} + \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} + \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = 180^0 \xRightarrow[\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}=\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}]{\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}} \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} + \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = 180^0 \Rightarrow$$

$$\frac{\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}}{2} + \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = 180^0 \Rightarrow \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = 180^0 - \frac{\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}}{2} \quad (3)$$

Γ*νωρίζω ότι* <u>*το άθροισμα των γωνιών κυρτού τεραπλεύρου είναι ίσο με* 360^0</u>. Ο*πότε στο τετράπλευρο* ΑΒΓΔ *θα έχω*:

$$\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^0 \Rightarrow \hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} = 360^0 - \hat{\Gamma} - \hat{\Delta} \quad (4)$$

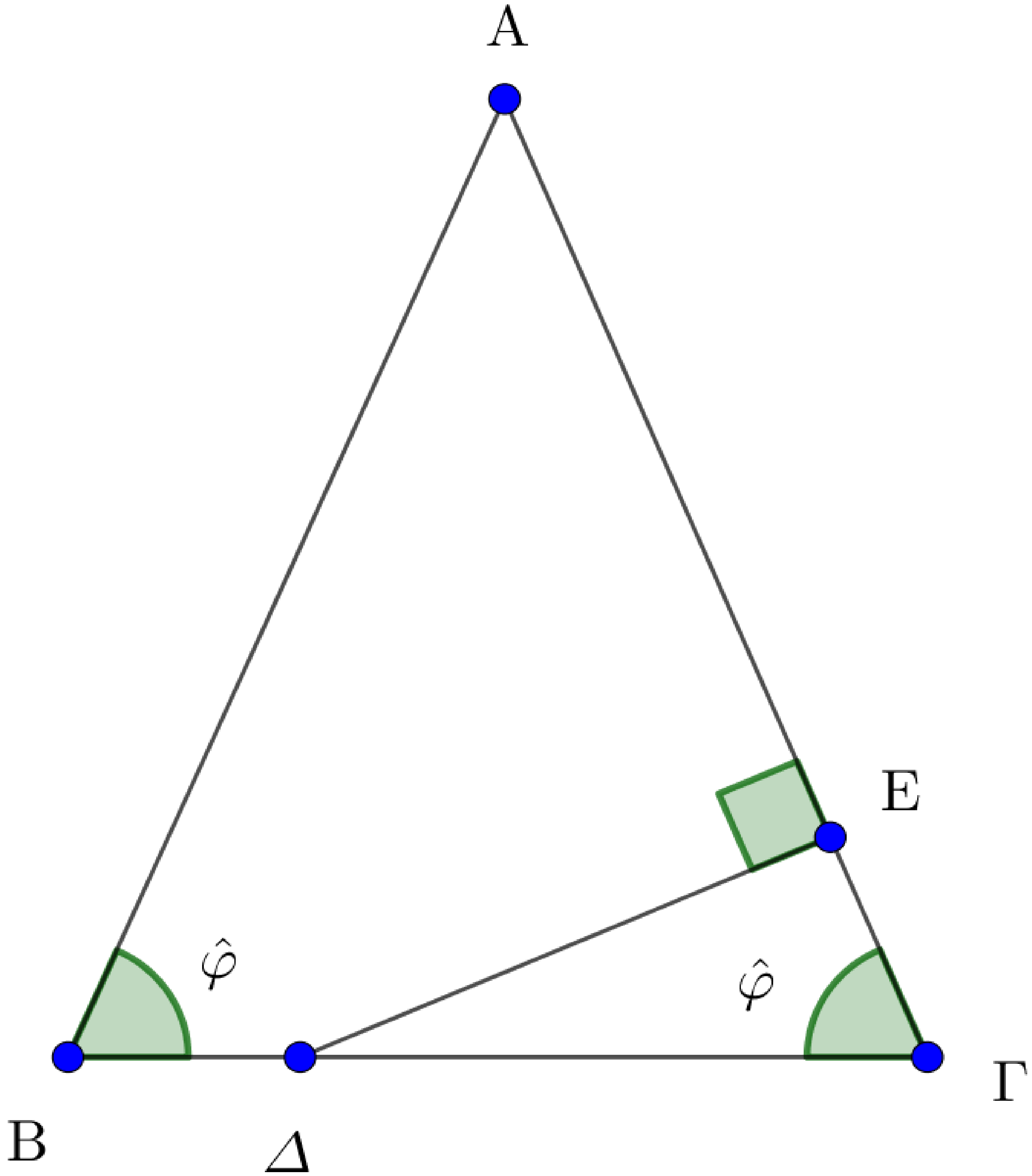
Α*πο τις σχέσεις* (3),(4) *θα έχω*:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = 180^0 - \frac{\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}}{2} \overset{\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}=360^0-\hat{\Gamma}-\hat{\Delta}}{=} 180^0 - \frac{360^0 - \hat{\Gamma} - \hat{\Delta}}{2} = 180^0 - \left(\frac{360^0}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{\Delta}}{2}\right)$$

$$= 180^0 - \left(180^0 - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{\Delta}}{2}\right) = \cancel{180^0} - \cancel{180^0} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{\Delta}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}}{2}$$

6.

Απο τυχαίο σημείο Δ της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τη $\mathrm{\Delta E} \perp \mathrm{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{\mathrm{A}} = 2\,\mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma$.



ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$AB = A\Gamma$ $\Delta E \perp A\Gamma$	$\hat{A} = 2E\hat{\Delta}\Gamma$

$\Sigma\textit{το ισοσκελές τρίγωνο } AB\Gamma\left(AB = A\Gamma\right) \textit{ έχω}:$

$A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = \hat{\varphi}\,(1)$

$\Sigma\textit{το τρίγωνο } AB\Gamma$ $\underline{\textit{το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο με } 180^0}$

$$A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B + \hat{A} = 180^0 \overset{A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = \hat{\varphi}}{\Longrightarrow} \hat{\varphi} + \hat{\varphi} + \hat{A} = 180^0 \Rightarrow \boxed{\hat{A} = 180^0 - 2\hat{\varphi}}\,(2)$$

$\Sigma\textit{το ορθογώνιο τρίγωνο } \Delta E\Gamma\left(\Delta\hat{E}\Gamma = 90^0\right)$ $\underline{\textit{το άθροισμα των οξειών γωνιών του είναι ίσο με } 90^0}$. $O\textit{πότε θα έχω}:$

$$E\hat{\Delta}\Gamma + E\hat{\Gamma}\Delta = 90^0 \overset{E\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\varphi}}{\Longrightarrow} E\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\varphi} = 90^0 \Rightarrow \boxed{E\hat{\Delta}\Gamma = 90^0 - \hat{\varphi}}\,(3)$$

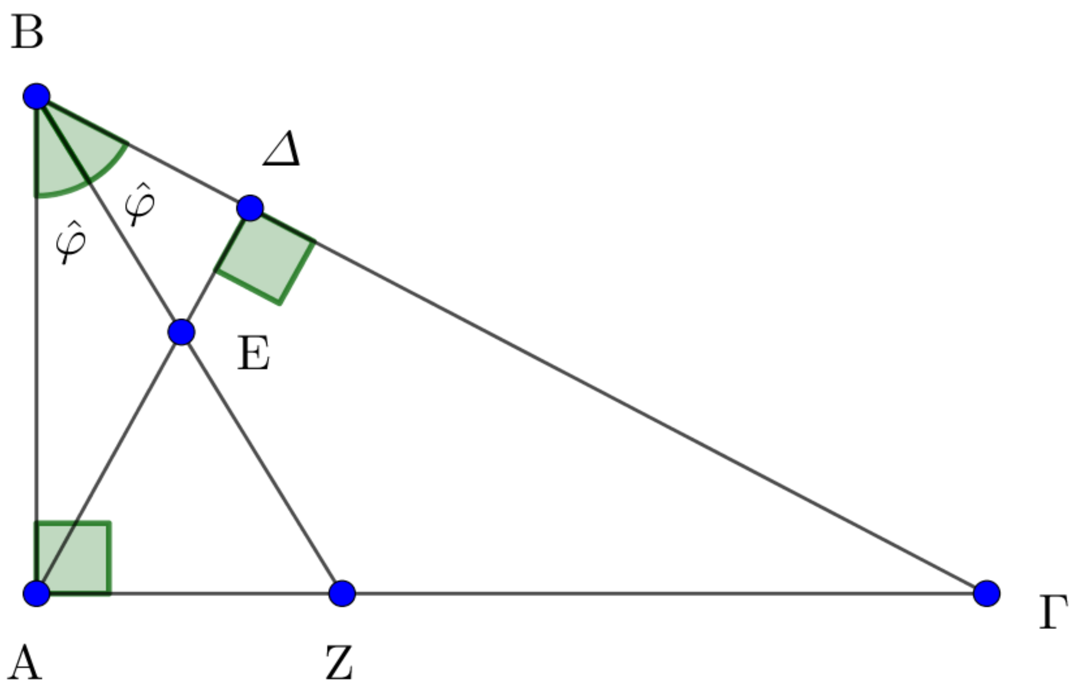
$B\textit{γάζω κοινό παράγοντα το } 2:$
$(\mathrm{I})\Pi\textit{ετάω το 2 έξω απο την παράσταση}$
$(\mathrm{II})A\textit{νοίγω παρένθεση και μέσα σε αυτήν γράφω την παράσταση χωρίς το 2}$

$$\hat{A} = 180^0 - 2\hat{\varphi} = 2 \bullet 90^0 - 2\hat{\varphi} = 2\left(90^0 - \hat{\varphi}\right) \overset{90^0 - \hat{\varphi} = E\hat{\Delta}\Gamma}{=} 2E\hat{\Delta}\Gamma$$

7.

$\Sigma\textit{ε ορθογώνιο τρίγωνο } AB\Gamma\left(\hat{A} = 90^0\right) \textit{ το ύψος του } A\Delta \textit{ και η διχοτόμος του } BZ \textit{ τέμνονται στο σημείο } E. N\textit{α αποδείξετε ότι το } AEZ \textit{ είναι ισοσκελές.}$

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\hat{A} = 90^0$ $BZ: \Delta\textit{ιχοτόμος της } \hat{B}$ $A\Delta \perp B\Gamma$	$AE = AZ$



Επειδή BZ *διχοτόμος της* $\hat{\mathrm{B}}$ *θα έχω*:

$\mathrm{A\hat{B}Z} = \mathrm{Z\hat{B}\Gamma} = \hat{\varphi}\,(1)$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{BAZ}\left(\mathrm{B\hat{A}Z} = 90^0\right)$ <u>*το άθροισμα των οξειών γωνιών του είναι ίσο με* 90^0</u>. Οπότε *θα έχω*:

$$\mathrm{A\hat{B}Z} + \mathrm{A\hat{Z}B} = 90^0 \xRightarrow{\mathrm{A\hat{B}Z}=\hat{\varphi}} \hat{\varphi} + \mathrm{A\hat{Z}B} = 90^0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{A\hat{Z}B} = 90^0 - \hat{\varphi}}\,(2)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{B\Delta E}\left(\mathrm{B\hat{\Delta}E} = 90^0\right)$ <u>*το άθροισμα των οξειών γωνιών του είναι ίσο με* 90^0</u>. Οπότε *θα έχω*:

$$\mathrm{E\hat{B}\Delta} + \mathrm{B\hat{E}\Delta} = 90^0 \xRightarrow{\mathrm{E\hat{B}\Delta}=\hat{\varphi}} \hat{\varphi} + \mathrm{B\hat{E}\Delta} = 90^0 \Rightarrow \mathrm{B\hat{E}\Delta} = 90^0 - \hat{\varphi}\,(3)$$

Έχω: $\mathrm{A\hat{E}Z} = \mathrm{B\hat{E}\Delta}$ (*Ως κατακορυφήν*) (4)

Απο τις σχέσεις (3),(4) *θα έχω*:

$\underline{\textit{γωνιών του είναι ίσο με } 90^0}$. *Οπότε θα έχω*:

$$\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Delta + \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Delta = 90^0 \xRightarrow{\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \hat{\varphi}} \hat{\varphi} + \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Delta = 90^0 \Rightarrow \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Delta = 90^0 - \hat{\varphi} \,(3)$$

Έχω: $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Delta$ (*Ως κατακορυφήν*) (4)

Απο τις σχέσεις $(3),(4)$ *θα έχω*:

$$\left.\begin{cases} \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Delta \\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Delta = 90^0 - \hat{\varphi} \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = 90^0 - \hat{\varphi}} \,(5)$$

Απο τις σχέσεις $(2),(5)$ *θα έχω*:

$$\left.\begin{cases} \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E} = 90^0 - \hat{\varphi} \\ \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = 90^0 - \hat{\varphi} \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$$

Στο τρίγωνο ΑΖΕ *έχω* $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$. *Συνεπώς το τρίγωνο* ΑΖΕ *είναι ισοσκελές γιατί έχει δυο τουλάχιστον γωνίες ίσες.*

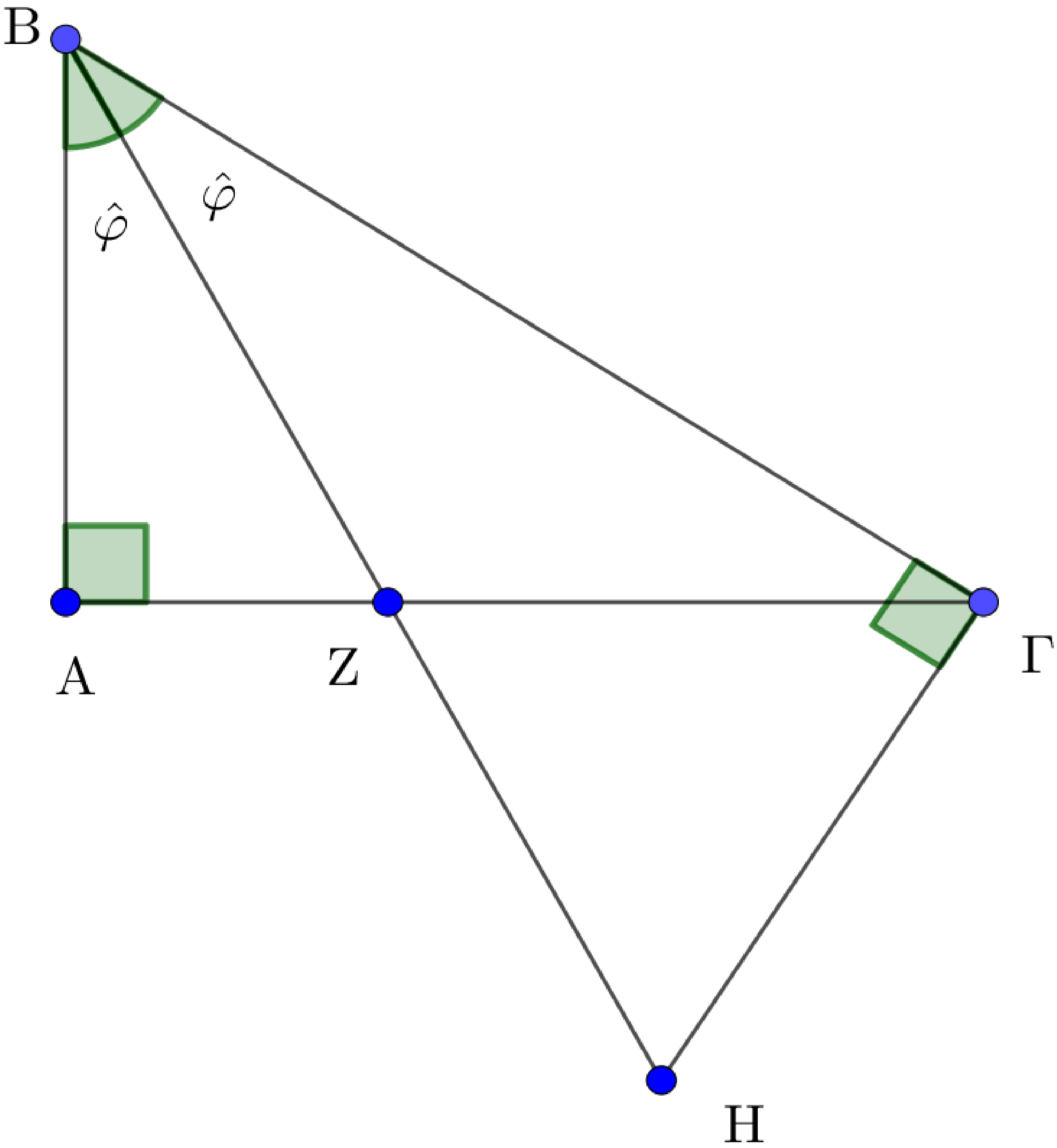
8.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{\mathrm{A}} = 90^0\right)$. Η *διχοτόμος της γωνίας* $\hat{\mathrm{B}}$ *τέμνει την* ΑΓ *στο* Ζ *και την κάθετη στη* ΒΓ *στο σημείο* Γ, *στο* Η. Ν*α αποδείξετε ότι* ΖΓ = ΓΗ.

ΥΠΟΘΕΣΗ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
$\hat{\mathrm{A}} = 90^0$ ΒΖ : *Διχοτόμος της* $\hat{\mathrm{B}}$ $\Gamma\mathrm{H} \perp \mathrm{B}\Gamma$	ΖΓ = ΓΗ.

Ε*πειδή* ΒΖ *διχοτόμος της* $\hat{\mathrm{B}}$ *θα έχω*:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \hat{\varphi}\,(1)$$



Σ*το ορθογώνιο τρίγωνο* $\mathrm{B\Gamma H}\left(\mathrm{B\hat{\Gamma}H}=90^0\right)$ *<u>το άθροισμα των οξειών γωνιών του είναι ίσο με</u>* <u>90^0</u>. Ο*πότε θα έχω*:

$$\mathrm{H\hat{B}\Gamma}+\mathrm{B\hat{H}\Gamma}=90^0 \overset{\mathrm{H\hat{B}\Gamma}=\hat{\varphi}}{\Longrightarrow} \hat{\varphi}+\mathrm{B\hat{H}\Gamma}=90^0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{B\hat{H}\Gamma}=90^0-\hat{\varphi}}\,(2)$$

$\Sigma\tau o\ o\rho\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{BAZ}\left(\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}=90^0\right)$ $\underline{\tau o\ \acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \tau\omega\nu\ o\xi\varepsilon\iota\acute{\omega}\nu}$

$\underline{\gamma\omega\nu\iota\acute{\omega}\nu\ \tau o\upsilon\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma o\ \mu\varepsilon\ 90^0}.\ \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z}+\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}=90^0 \xRightarrow{\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z}=\hat{\varphi}} \hat{\varphi}+\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}=90^0 \Rightarrow \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}=90^0-\hat{\varphi}\,(2)$$

$\acute{E}\chi\omega:\mathrm{H}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma=\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}\,(3)\,(\Omega\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\nu)$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (2),(3)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{cases}\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}=90^0-\hat{\varphi}\\ \mathrm{H}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma=\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}\end{cases}\right\}\Rightarrow \boxed{\mathrm{H}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma=90^0-\hat{\varphi}}\,(4)$$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (2),(4)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{cases}\mathrm{Z}\hat{\mathrm{H}}\Gamma=90^0-\hat{\varphi}\\ \mathrm{H}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma=90^0-\hat{\varphi}\end{cases}\right\}\Rightarrow \mathrm{Z}\hat{\mathrm{H}}\Gamma=\mathrm{H}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$$

$\Sigma\tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{ZH}\Gamma\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \mathrm{Z}\hat{\mathrm{H}}\Gamma=\mathrm{H}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma.\ \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \mathrm{Z}\Gamma=\Gamma\mathrm{H}.$

$\left(\begin{array}{l}\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \sigma\tau o\ \acute{\iota}\delta\iota o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \alpha\pi o\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa o\nu\tau\alpha\iota\\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\end{array}\right)$

ΜΙΑ ΧΡΗΣΙΜΗ ΣΧΕΣΗ

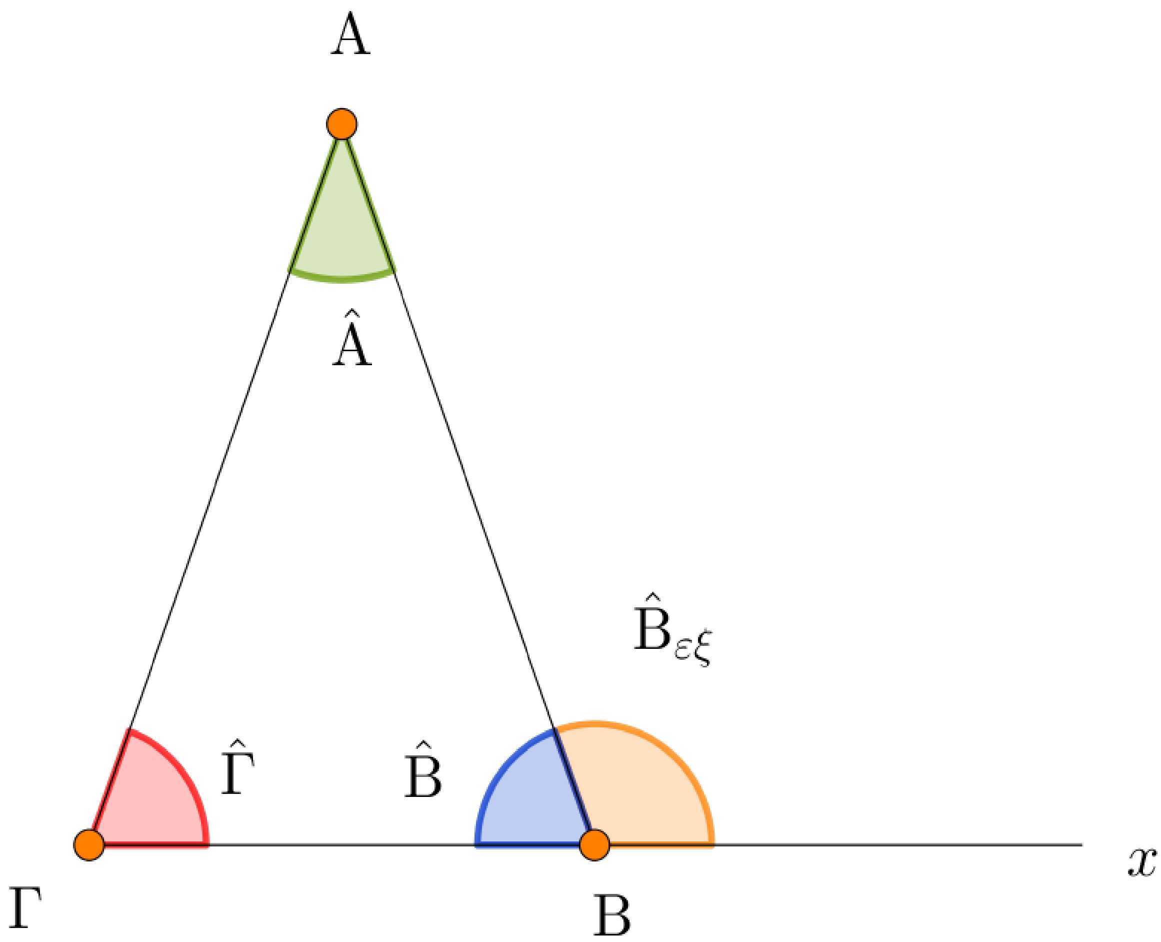
Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών γωνιών

$\Sigma\tau o\ \tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \mathrm{AB}\Gamma$ $\underline{\tau o\ \acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \tau\omega\nu\ \gamma\omega\nu\iota\acute{\omega}\nu\ \tau o\upsilon\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma o\ \mu\varepsilon\ 180^0}$

$$\boxed{\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=180^0}\,(1)$$

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ \hat{\mathrm{B}}_{\varepsilon\xi}=x\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \varepsilon\xi\omega\tau\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\eta}\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\ \tau o\upsilon\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\ \mathrm{AB}\Gamma.\ \mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ o\iota$

$\gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \hat{\mathrm{B}}_{\varepsilon\xi},\hat{\mathrm{B}}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\pi\lambda\eta\rho\omega\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma.\ \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$



$\boxed{\hat{B}_{\varepsilon\xi}+\hat{B}=180^0}\,(2)$

Απο τις σχέσεις (1),(2) *θα έχω*:

$$\left.\begin{cases}\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^0\\ \hat{B}_{\varepsilon\xi}+\hat{B}=180^0\end{cases}\right\}\Rightarrow \hat{A}+\cancel{\hat{B}}+\hat{\Gamma}=\hat{B}_{\varepsilon\xi}+\cancel{\hat{B}}\overset{\alpha+\beta=\alpha+\gamma\Leftrightarrow\beta=\gamma}{\Longrightarrow}\hat{B}_{\varepsilon\xi}=\hat{A}+\hat{\Gamma}$$