ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

1.

$$\text{Αν } \vec{\alpha}=(\kappa,1) \text{ και } \vec{\beta}=(4,3), \text{ να βρείτε τον } \kappa\in\mathbb{R} \text{ ώστε να ισχύει: } \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|},\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}}$$

$$\boxed{\text{Αν } \vec{\alpha}=(x_1,y_1),\vec{\beta}=(x_2,y_2) \text{ τότε θα έχω: } \vec{\alpha}\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2}$$

$$\boxed{\text{Αν } \vec{\alpha}=(x,y) \text{ τότε θα έχω } |\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\vec{\alpha}\vec{\beta}\overset{\substack{\vec{\alpha}=(\kappa,1)\\ \vec{\beta}=(4,3)}}{=}4\kappa+3$$

$$|\vec{\alpha}|\overset{\vec{\alpha}=(\kappa,1)}{=}\sqrt{\kappa^2+1}$$

$$|\vec{\beta}|\overset{\vec{\beta}=(4,3)}{=}\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{4\kappa+3}{5\sqrt{\kappa^2+1}}\overset{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4\kappa+3}{5\sqrt{\kappa^2+1}}\Leftrightarrow\sqrt{2}\bullet5\sqrt{\kappa^2+1}=2(4\kappa+3)\overset{2=\left(\sqrt{2}\right)^2=\sqrt{2}\sqrt{2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\sqrt{2}\bullet5\sqrt{\kappa^2+1}=\sqrt{2}\bullet\sqrt{2}(4\kappa+3)\overset{\substack{\text{Αν } \alpha\neq0 \text{ τότε ισχύει η ισοδυναμία:}\\ \alpha\beta=\alpha\gamma\Leftrightarrow\beta=\gamma}}{\Longleftrightarrow}$$

$$5\sqrt{\kappa^2+1}=\sqrt{2}(4\kappa+3)$$

$$\boxed{\text{Αν } \sqrt{\mathrm{A}(x)}=\mathrm{B}(x) \text{ θα πρέπει: }\left\{\begin{matrix}\mathrm{A}(x)\geq0\\ \mathrm{B}(x)\geq0\end{matrix}\right\}}$$

$\kappa^2 \geq 0 \Rightarrow \kappa^2 + 1 \geq 1 > 0 \Rightarrow \kappa^2 + 1 > 0$

$\text{Οπότε για κάθε } \kappa \in \mathbb{R} \text{ ισχύει } \kappa^2 + 1 > 0$

$$\left\{\begin{matrix} 5\sqrt{\kappa^2+1} = \sqrt{2}\left(4\kappa+3\right) \\ 4\kappa+3 \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \left(5\sqrt{\kappa^2+1}\right)^2 = \left[\sqrt{2}\left(4\kappa+3\right)\right]^2 \\ 4\kappa \geq -3 \end{matrix}\right\} \overset{(\alpha\beta)^\nu = \alpha^\nu \beta^\nu}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} 25\left(\sqrt{\kappa^2+1}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2\left(4\kappa+3\right)^2 \\ \kappa \geq -\dfrac{3}{4} \end{matrix}\right\} \overset{\substack{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha, \alpha \geq 0 \\ (\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} 25\left(\kappa^2+1\right) = 2\left[\left(4\kappa\right)^2 + 2\bullet4\kappa\bullet3 + 3^2\right] \\ \kappa \geq -\dfrac{3}{4} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} 25\kappa^2 + 25 = 2\left[\left(4\kappa\right)^2 + 2\bullet4\kappa\bullet3 + 3^2\right] \\ \kappa \geq -\dfrac{3}{4} \end{matrix}\right\} \overset{(\alpha\beta)^\nu = \alpha^\nu \beta^\nu}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} 25\kappa^2 + 25 = 2\left(16\kappa^2 + 24\kappa + 9\right) \\ \kappa \geq -\dfrac{3}{4} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 25\kappa^2 + 25 = 2\bullet16\kappa^2 + 2\bullet24\kappa + 2\bullet9 \\ \kappa \geq -\dfrac{3}{4} \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 25\kappa^2 + 25 = 32\kappa^2 + 48\kappa + 18 \\ \kappa \geq -\dfrac{3}{4} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 25\kappa^2 + 25 - 32\kappa^2 - 48\kappa - 18 = 0 \\ \kappa \geq -\dfrac{3}{4} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} -7\kappa^2 - 48\kappa + 7 = 0 \\ \kappa \geq -\dfrac{3}{4} \end{matrix}\right\} \overset{\text{Άθροισμα} = -\left(\substack{\text{Αλλάζω τα πρόσημα} \\ \text{των όρων} \\ \text{του αθροίσματος}}\right)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} -\left(7\kappa^2 + 48\kappa - 7\right) = 0 \\ \kappa \geq -\dfrac{3}{4} \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} 7\kappa^2+48\kappa-7=0(1) \\ \kappa \geq -\dfrac{3}{4} \end{Bmatrix}$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=48^2-4\bullet 7\bullet(-7)=48^2+4\bullet 49 \overset{\text{Θέτω } 49=48+1}{=}$$

$$48^2+4\bullet(48+1)=48^2+4\bullet 48+4 \overset{\substack{4=2^2 \\ 4\bullet 48=2\bullet 48\bullet 2}}{=} 48^2+2\bullet 48\bullet 2+2^2$$

$\textit{Έχω την ταυτότητα } (\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\bullet\alpha\bullet\beta+\beta^2 \textit{ με } \alpha=48 \textit{ και } \beta=2$

$$\Delta=48^2+2\bullet 48\bullet 2+2^2=(48+2)^2=50^2>0$$

Ε*πειδή* $\Delta>0$ *η δευτεροβάθμια εξίσωση* (1) *έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες* :

$$\kappa_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-48\pm 50}{2\bullet 7}=\frac{-2\bullet 24\pm 2\bullet 25}{2\bullet 7}=\frac{\cancel{2}\bullet(-24\pm 25)}{\cancel{2}\bullet 7}=$$

$$=\frac{-24\pm 25}{7}= \begin{matrix} \nearrow \frac{-24+25}{7}=\frac{1}{7} \\ \searrow \frac{-24-25}{7}=\frac{-49}{7}=-7 \end{matrix}$$

Θ*α πρέπει* $\kappa \geq -\frac{3}{4}$.Ο*πότε η τιμή* $\kappa=\frac{1}{7}$ *γίνεται δεκτή ενω η τιμή* $\kappa=-\frac{1}{7}$ *απορρίπτεται*

2.

Α*ν* $\vec{\alpha}=(\kappa,1)$ *και* $\vec{\beta}=(4,3)$, *να βρείτε τον* $\kappa\in\mathbb{R}$ *ώστε να ισχύει* : $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$

$$\boxed{\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha}\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|}$$

$$\vec{\alpha}\vec{\beta} \overset{\substack{\vec{\alpha}=(\kappa,1) \\ \vec{\beta}=(4,3)}}{=} 4\kappa+3$$

$$\left|\vec{\alpha}\right| \overset{\vec{\alpha}=(\kappa,1)}{=} \sqrt{\kappa^2+1}$$

$$\left|\vec{\beta}\right| \overset{\vec{\beta}=(4,3)}{=} \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha}\vec{\beta}\right| = \left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \left|4\kappa+3\right| = 5\sqrt{\kappa^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\left|4\kappa+3\right|^2 = \left(5\sqrt{\kappa^2+1}\right)^2 \overset{\substack{|\alpha|^2=\alpha^2 \\ (\alpha\beta)^\nu=\alpha^\nu\beta^\nu}}{\Leftrightarrow} \left(4\kappa+3\right)^2 = 25\left(\sqrt{\kappa^2+1}\right)^2 \overset{\substack{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq 0 \\ (\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(4\kappa\right)^2 + 2\cdot 4\kappa\cdot 3 + 3^2 = 25\left(\kappa^2+1\right) \Leftrightarrow 16\kappa^2 + 24\kappa + 9 = 25\kappa^2 + 25$$

$$\Leftrightarrow 16\kappa^2 + 24\kappa + 9 - 25\kappa^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-9\kappa^2 + 24\kappa - 16 = 0 \overset{\text{Άθροισμα}=-\left(\substack{\text{Αλλάζω τα πρόσημα} \\ \text{των όρων} \\ \text{του αθροίσματος}}\right)}{\Leftrightarrow} -\left(9\kappa^2 - 24\kappa + 16\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3\kappa\right)^2 - 24\kappa + 4^2 = 0 \overset{24\kappa=2\cdot 3\kappa\cdot 4}{\Leftrightarrow} \left(3\kappa\right)^2 - 2\cdot 3\kappa\cdot 4 + 4^2 = 0$$

Έχω την ταυτότητα $\left(\alpha-\beta\right)^2 = \alpha^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2$ *με* $\alpha = 3\kappa$ *και* $\beta = 4$

Ο*πότε θα ισχύει*: $\left(3\kappa\right)^2 - 2\cdot 3\kappa\cdot 4 + 4^2 = \left(3\kappa-4\right)^2$

$$\left(3\kappa\right)^2 - 2\cdot 3\kappa\cdot 4 + 4^2 = 0 \overset{(3\kappa)^2-2\cdot 3\kappa\cdot 4+4^2=(3\kappa-4)^2}{\Leftrightarrow} \left(3\kappa-4\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\kappa - 4 = 0 \Leftrightarrow 3\kappa = 4 \Leftrightarrow \kappa = \frac{4}{3}$$

3.

Ν*α εξετάσετε πότε ισχύει* $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| = \left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right|$

$$\text{Διακρίνω τις περιπτώσεις} \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{I})\, \vec{\alpha} = \vec{0} \\ (\mathrm{II})\, \vec{\beta} = \vec{0} \\ (\mathrm{III})\, \vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0} \end{array} \right\}$$

Π*ερίπτωση* (I): Α*ν* $\vec{\alpha} = \vec{0}$ *θα έχω*:

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| = \left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right| \overset{\vec{\alpha}=\vec{0}}{\Leftrightarrow} \left|\vec{0}+\vec{\beta}\right| = \left|\vec{0}\right| + \left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \left|\vec{\beta}\right| = \left|\vec{\beta}\right| (\text{Ισχύει})$$

$\text{Οπότε αν } \vec{\alpha}=\vec{0} \text{ η σχέση } \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right| \text{ισχύει.Επειδή το}$
μηδενικό διάνυσμα είναι ομόρροπο σε κάθε διάνυσμα
θα έχω $\vec{\alpha} \nearrow\nearrow \vec{\beta}$

Περίπτωση (II): Αν $\vec{\beta}=\vec{0}$ *θα έχω*:

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right| \overset{\vec{\beta}=\vec{0}}{\Longleftrightarrow} \left|\vec{\alpha}+\vec{0}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{0}\right| \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\alpha}\right| (\text{Ισχύει})$$

$\text{Οπότε αν } \vec{\beta}=\vec{0} \text{ η σχέση } \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right| \text{ισχύει.Επειδή το}$
μηδενικό διάνυσμα είναι ομόρροπο σε κάθε διάνυσμα
θα έχω $\vec{\alpha} \nearrow\nearrow \vec{\beta}$

Περίπτωση (III): $\vec{\alpha},\vec{\beta} \neq \vec{0}$

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2=\left(\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|\right)^2$$

$$\boxed{\left|\vec{x}\right|^2=\vec{x}^{\,2}, \vec{x}: \text{Διάνυσμα}}$$

$$\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\beta}\right|^2 \Leftrightarrow$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!!!</u>

Η *ταυτότητα* $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^{\,2}+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^{\,2}$ *εφαρμόζεται όπως θα την εφάρμοζα αν στην θέση των διανυσμάτων* $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ *είχα πραγματικές μεταβλητές δηλαδή*:

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2, x,y\in\mathbb{R}$

$$\vec{\alpha}^{\,2}+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^{\,2}=\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\beta}\right|^2 \overset{\substack{\vec{\alpha}^{\,2}=\left|\vec{\alpha}\right|^2 \\ \vec{\beta}^{\,2}=\left|\vec{\alpha}\right|^2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\cancel{\left|\vec{\alpha}\right|^2}+2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)+\cancel{\left|\vec{\beta}\right|^2}=\cancel{\left|\vec{\alpha}\right|^2}+2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|+\cancel{\left|\vec{\beta}\right|^2} \Leftrightarrow$$

$$2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{matrix}\vec{\alpha}\neq\vec{0}\\ \vec{\beta}\neq\vec{0}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\left|\vec{\alpha}\right|>0\\ \left|\vec{\beta}\right|>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|>0\Rightarrow\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\neq 0$$

$$2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\overset{2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\neq 0}{\Longleftrightarrow}\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|}{2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|}\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=1$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ 0\leq\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\leq\pi\ \kappa\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=1\ \pi\rho o\kappa\acute{\upsilon}\pi\tau\varepsilon\iota\ \acute{o}\tau\iota$

$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=0.\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}.$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \eta\ \iota\sigma o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{\iota}\alpha:$

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$$

4.

$\boxed{\mathrm{N}\alpha\ \varepsilon\xi\varepsilon\tau\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\tau\varepsilon\ \pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\left|\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\right|=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|}$

$$\Delta\iota\alpha\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\iota\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\vec{\alpha}=\vec{0}\\ (\mathrm{II})\vec{\beta}=\vec{0}\\ (\mathrm{III})\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}\end{matrix}\right\}$$

$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\ (\mathrm{I}):\mathrm{A}\nu\ \vec{\alpha}=\vec{0}\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left|\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\right|=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|\overset{\vec{\alpha}=\vec{0}}{\Longleftrightarrow}\left|\left|\vec{0}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\right|=\left|\vec{0}+\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\left|-\left|\vec{\beta}\right|\right|=\left|\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow$$

$$\left|\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\beta}\right|(\mathrm{I}\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota)$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha\nu\ \vec{\alpha}=\vec{0}\ \ \eta\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \left|\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\right|=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota.\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \tau o$

$\mu\eta\delta\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\rho\rho o\pi o\ \sigma\varepsilon\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha$

$\theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}$

$\Pi\varepsilon\rho i\pi\tau\omega\sigma\eta\,(\mathrm{II}): \mathrm{A}\nu\ \vec{\beta}=\vec{0}\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left\|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right\|=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|\overset{\vec{\beta}=\vec{0}}{\Longleftrightarrow}\left\|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{0}\right\|=\left|\vec{\alpha}+\vec{0}\right|\Leftrightarrow\left\|\vec{\alpha}\right\|=\left|\vec{a}\right|$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \left|\vec{\alpha}\right|\geq 0\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \left\|\vec{\alpha}\right\|=\left|\vec{\alpha}\right|.\mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{a}\right|(\mathrm{I}\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota)$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha\nu\ \vec{\beta}=\vec{0}\ \ \eta\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \left\|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right\|=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota.\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \tau o$ $\mu\eta\delta\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\rho\rho o\pi o\ \sigma\varepsilon\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha$ $\theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}$

$\Pi\varepsilon\rho i\pi\tau\omega\sigma\eta\,(\mathrm{III}): \vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$

$$\left\|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right\|=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\left\|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right\|^2=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2\overset{\substack{|x|^2=x^2,\,x\in\mathbb{R}\\ |\vec{u}|^2=\vec{u}^2,\,\vec{u}:\Delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\right)^2=\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2\overset{(\vec{x}+\vec{y})^2=\vec{x}^2+2\vec{x}\vec{y}+\vec{y}^2}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left|\vec{\alpha}\right|^2-2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\beta}\right|^2=\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2\overset{|\vec{u}|^2=\vec{u}^2,\,\vec{u}:\Delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha}{\Longleftrightarrow}$$

$$\cancel{\left|\vec{\alpha}\right|^2}-2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|+\cancel{\left|\vec{\beta}\right|^2}=\cancel{\left|\vec{\alpha}\right|^2}+2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)+\cancel{\left|\vec{\beta}\right|^2}\Leftrightarrow$$

$$2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=-2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|$$

$$\acute{E}\chi\omega:\begin{Bmatrix}\vec{\alpha}\neq\vec{0}\\ \vec{\beta}\neq\vec{0}\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\left|\vec{\alpha}\right|>0\\ \left|\vec{\beta}\right|>0\end{Bmatrix}\Rightarrow\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|>0\Rightarrow\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\neq 0$$

$$2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=-2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\overset{2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\neq 0}{\Longleftrightarrow}\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=-\frac{2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|}{2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|}\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=-1$$

$\text{Επειδή } 0 \le \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) \le \pi \text{ και } \sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = -1 \text{ προκύπτει ότι}$

$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \pi. \text{Συνεπώς θα έχω } \vec{\alpha} \nearrow\swarrow \vec{\beta}.$

Συνεπώς ισχύει η ισοδυναμία :

$\left\|\vec{\alpha}\right| - \left|\vec{\beta}\right\| = \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \nearrow\swarrow \vec{\beta}.$

5.

Τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και μη συγραμμικά. Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ ισχύει: $\lambda^2\vec{\alpha}^2 + 2\lambda\mu\left(\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}\right) + \mu^2\vec{\beta}^2 \ge 0$ Πότε ισχύει το "=";

$\boxed{\left(\lambda\vec{\alpha}\right)^2 = \lambda^2\vec{\alpha}^2 \text{ όπου } \lambda \text{ πραγματικός αριθμός } \vec{\alpha} \text{ διάνυσμα}}$

$\boxed{\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2}$

$\left(\lambda\vec{\alpha}\right)\left(\mu\vec{\beta}\right) = \lambda\mu\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)$ όπου λ,μ πραγματικοί αριθμοί και $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ διανύσματα

$\lambda^2\vec{\alpha}^2 + 2\lambda\mu\left(\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}\right) + \mu^2\vec{\beta}^2 \ge 0 \Leftrightarrow$

$\left(\lambda^2\vec{\alpha}\right)^2 + 2\left(\lambda\vec{\alpha}\right)\left(\mu\vec{\beta}\right) + \left(\mu\vec{\beta}\right)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left|\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\right|^2 \ge 0 (\text{Ισχύει})$

$\lambda^2\vec{\alpha}^2 + 2\lambda\mu\left(\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}\right) + \mu^2\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow \left|\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\right|^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\left|\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\right| = 0 \Leftrightarrow \lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta} = \vec{0} (1)$

Έστω $\lambda \neq 0$. *Τότε απο την σχέση* (1) *θα έχω*:

$$\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow\lambda\vec{\alpha}=-\mu\vec{\beta}\overset{\lambda\neq 0}{\Longleftrightarrow}\vec{\alpha}=-\frac{\mu}{\lambda}\vec{\beta}\Rightarrow\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$$

Άτοπο γιατί τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ *είναι μη συγραμμικά.*

Συνεπώς $\lambda = 0$. *Τότε απο την σχέση* (1) *θα έχω*:

$$\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=\vec{0}\overset{\lambda=0}{\Longleftrightarrow}0\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=\vec{0}\overset{0\vec{\alpha}=\vec{0}}{\Longleftrightarrow}\vec{0}+\mu\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow\mu\vec{\beta}=\vec{0}$$

Επειδή $\mu\vec{\beta}=\vec{0}$ *και* $\vec{\beta}\neq\vec{0}$ *θα έχω* $\mu = 0$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!!!</u>

$\lambda\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\lambda=0 \text{ ή } \vec{\alpha}=\vec{0}\right)$

6.

(I) *Να αποδείξετε ότι*: $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2+\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2=2\left|\vec{u}\right|^2+2\left|\vec{v}\right|^2$

(II) *Στην συνέχεια να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ένος παραλληλογράμμου είναι ίσο με το άθροισμα τετραγώνων των πλευρών του*

(I) $\boxed{\vec{x}^{\,2}=\left|\vec{x}\right|^2 \text{ όπου } \vec{x} \text{ διάνυσμα}}$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!!!</u>

Οι ταυτότητες $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^{\,2}+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^{\,2}$ *και*

$\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^{\,2}-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^{\,2}$ *εφαρμόζονται όπως θα τις εφάρμοζα αν στην θέση των διανυσμάτων* $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ *είχα πραγματικές μεταβλητές δηλαδή*:

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2, x,y\in\mathbb{R}$

$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2, x,y\in\mathbb{R}$

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2+\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2+\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=$$

$$=\vec{u}^2+\cancel{2\vec{u}\vec{v}}+\vec{v}^2+\vec{u}^2-\cancel{2\vec{u}\vec{v}}+\vec{v}^2=2\vec{u}^2+2\vec{v}^2=2\left|\vec{u}\right|^2+2\left|\vec{v}\right|^2$$

(II) Θεωρώ το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θέτω $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{u}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\vec{v}$. Τότε επειδή ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο θα έχω:

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\vec{u}+\vec{v}$$

$$\overrightarrow{\Delta\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}\text{Διάνυσμα θέσης}\\ \text{πέρατος}\\ \text{με αρχή Α}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Διάνυσμα θέσης}\\ \text{αρχής}\\ \text{με αρχή Α}\end{pmatrix}=$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\vec{u}-\vec{v}$$

Επειδή ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο θα έχω:

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right|=\left|\vec{u}\right|,\left|\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right|=\left|\vec{v}\right|$$

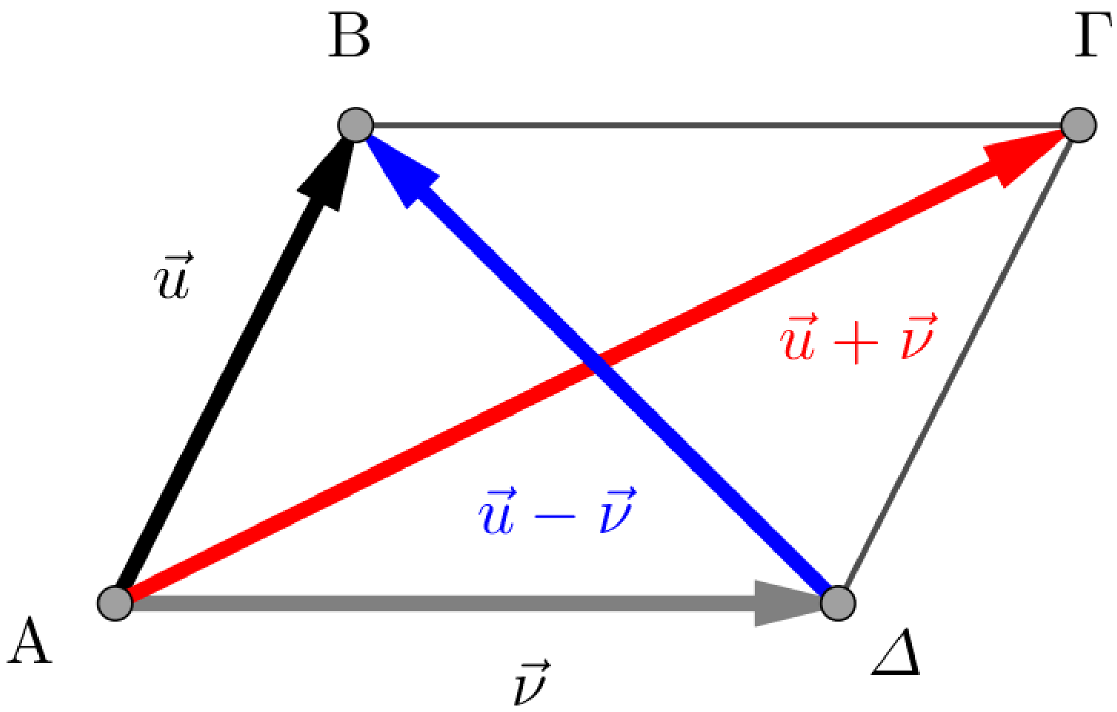
Οπότε θα έχω:

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2+\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2=2\left|\vec{u}\right|^2+2\left|\vec{v}\right|^2\overset{\substack{\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\vec{u}+\vec{v}\\ \overrightarrow{\Delta\mathrm{B}}=\vec{u}-\vec{v}\\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\vec{u}\right|\\ \left|\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right|=\left|\vec{v}\right|}}{\Longleftrightarrow}\left|\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\Delta\mathrm{B}}\right|^2=2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+2\left|\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma}^2+\Delta\mathrm{B}^2=2\mathrm{AB}^2+2\mathrm{A\Delta}^2\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{A\Gamma}^2+\Delta\mathrm{B}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AB}^2+\mathrm{A\Delta}^2+\mathrm{A\Delta}^2\overset{\substack{\mathrm{AB}=\Gamma\Delta\\ \mathrm{A\Delta}=\mathrm{B\Gamma}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\mathrm{A\Gamma}^2+\Delta\mathrm{B}^2=\mathrm{AB}^2+\Gamma\Delta^2+\mathrm{A\Delta}^2+\mathrm{B\Gamma}^2$$



7.

$$(\mathrm{I})\ N\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota: \vec{u}\vec{v}=\frac{1}{4}\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2-\frac{1}{4}\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2$$

(II) Στην συνέχεια να αποδείξετε την ισοδυναμία

$$\vec{u}\vec{v}>0 \Leftrightarrow \left|\vec{u}+\vec{v}\right|>\left|\vec{u}-\vec{v}\right|$$

$$(\mathrm{I})\ \frac{1}{4}\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2-\frac{1}{4}\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2=\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=$$

$$=\frac{\vec{u}^2+2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2-\left(\vec{u}^2-2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2\right)}{4}=\frac{\vec{u}^2+2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2-\vec{u}^2+2\vec{u}\vec{v}-\vec{v}^2}{4}=$$

$$=\frac{4\vec{u}\vec{v}}{4}=\vec{u}\vec{v}$$

$$(\mathrm{II})\ \vec{u}\vec{v}>0 \Leftrightarrow \frac{\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2-\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2}{4}>0 \Leftrightarrow \left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2-\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2>0 \Leftrightarrow$$

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2>\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2 \Leftrightarrow \sqrt{\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2}>\sqrt{\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2} \overset{\sqrt{x^2}=|x|}{\Leftrightarrow} \left|\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\right|>\left|\left|\vec{u}-\vec{v}\right|\right| \overset{|x|=x,x\geq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|>\left|\vec{u}-\vec{v}\right|$$

8.

$\text{Να αποδείξετε ότι}: -1 \le \dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}} \le 1$

$(\alpha,\beta)\ne(0,0),(\gamma,\delta)\ne(0,0)$

$\text{Θεωρώ τα διανύσματα } \vec{x}=(\alpha,\beta) \text{ και } \vec{y}=(\gamma,\delta) \text{ με } \vec{x},\vec{y}\ne\vec{0}$

$\text{Τότε θα έχω}:$

$$\text{συν}\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)=\frac{\vec{x}\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}$$

$$-1\le \text{συν}\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)\le 1 \Rightarrow -1\le \frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}\le 1$$

9.

$\text{Αν τα διανύσματα } \vec{\alpha}=(\kappa,\lambda) \text{ και } \vec{\beta}=(\mu,\nu) \text{ είναι κάθετα και}$
$\text{έχουν μέτρα ίσα με την μονάδα, να αποδείξετε ότι}:$
$(\kappa\nu-\lambda\mu)^2=1$

$$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Rightarrow\vec{\alpha}\vec{\beta}=0\Rightarrow\kappa\mu+\lambda\nu=0\Rightarrow(\kappa\mu+\lambda\nu)^2=0\overset{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\Longrightarrow}$$

$$(\kappa\mu)^2+2\kappa\mu\lambda\nu+(\lambda\nu)^2=0\overset{(\alpha\beta)^\nu=\alpha^\nu\beta^\nu}{\Longrightarrow}\kappa^2\mu^2+2\kappa\mu\lambda\nu+\lambda^2\nu^2=0(1)$$

$$\begin{Bmatrix}|\vec{\alpha}|=1\\|\vec{\beta}|=1\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}|\vec{\alpha}|^2=1\\|\vec{\beta}|^2=1\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\kappa^2+\lambda^2=1\\\mu^2+\nu^2=1\end{Bmatrix}\overset{(\cdot)}{\Longrightarrow}$$

$$(\kappa^2+\lambda^2)(\mu^2+\nu^2)=1\cdot1\Rightarrow\kappa^2\mu^2+\kappa^2\nu^2+\lambda^2\mu^2+\lambda^2\nu^2=1(2)$$

$\text{Απο τις σχέσεις } (1),(2) \text{ θα έχω}:$

$$\begin{Bmatrix}\kappa^2\mu^2+\kappa^2\nu^2+\lambda^2\mu^2+\lambda^2\nu^2=1\\\kappa^2\mu^2+2\kappa\mu\lambda\nu+\lambda^2\nu^2=0\end{Bmatrix}(-)$$

$$\kappa^2\mu^2+\kappa^2\nu^2+\lambda^2\mu^2+\lambda^2\nu^2-\left(\kappa^2\mu^2+2\kappa\mu\lambda\nu+\lambda^2\nu^2\right)=1\Rightarrow$$

$$\cancel{\kappa^2\mu^2}+\kappa^2\nu^2+\lambda^2\mu^2+\cancel{\lambda^2\nu^2}-\cancel{\kappa^2\mu^2}-2\kappa\mu\lambda\nu-\cancel{\lambda^2\nu^2}=1\Rightarrow$$

$$(\kappa\nu)^2-2\kappa\nu\bullet\lambda\mu+(\lambda\mu)^2=1\overset{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}{\Longrightarrow}(\kappa\nu-\lambda\mu)^2=1$$

10.

$\text{Αν}\ |\vec{\alpha}|=2, |\vec{\beta}|=1, |\vec{\gamma}|=3\ \kappa\alpha\iota\ 2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, *να υπολογίσετε τα:*

$(\mathrm{I})\ \vec{\alpha}\vec{\beta}, \vec{\beta}\vec{\gamma}, \vec{\gamma}\vec{\alpha}$

$(\mathrm{II})\ \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}), \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}), \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}})$ *και να αποδείξετε ότι* $\vec{\alpha}=-2\vec{\beta}$ *και* $\vec{\gamma}=3\vec{\beta}$

(I) *Για να βρώ το* $\vec{\alpha}\vec{\beta}$ *στην σχέση* $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ *μεταφέρω το* $\vec{\gamma}$ *στο δεύτερο μέλος και κατόπιν την σχέση που έχει δημιουργηθεί την υψώνω στο τετράγωνο. Έτσι θα σχηματιστούν οι παραστάσεις* $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|, |\vec{\gamma}|$ *και* $\vec{\alpha}\vec{\beta}$. *Λύνω την σχέση που έχει σχηματιστεί ως προς* $\vec{\alpha}\vec{\beta}$.

$$2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}\Rightarrow 2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=-\vec{\gamma}\Rightarrow(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=(-\vec{\gamma})^2\overset{(\vec{x}+\vec{y})^2=\vec{x}^2+2\vec{x}\vec{y}+\vec{y}^2}{\Longrightarrow}$$

$$(2\vec{\alpha})^2+2(2\vec{\alpha})\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=\vec{\gamma}^2\overset{\substack{(\lambda\vec{x})(\mu\vec{y})=\lambda\mu(\vec{x}\vec{y}),\lambda,\mu\in\mathbb{R}\\(\lambda\vec{x})^2=\lambda^2\vec{x}^2,\lambda\in\mathbb{R}}}{\Longrightarrow}4\vec{\alpha}^2+4(\vec{\alpha}\vec{\beta})+\vec{\beta}^2=\vec{\gamma}^2$$

$$\overset{|\vec{x}|^2=\vec{x}^2}{\Longrightarrow}4|\vec{\alpha}|^2+4(\vec{\alpha}\vec{\beta})+|\vec{\beta}|^2=|\vec{\gamma}|^2\overset{|\vec{\alpha}|=2,|\vec{\beta}|=1,|\vec{\gamma}|=3}{\Longrightarrow}4\bullet2^2+4(\vec{\alpha}\vec{\beta})+1^2=3^2\Rightarrow$$

$$17+4(\vec{\alpha}\vec{\beta})=9\Rightarrow4(\vec{\alpha}\vec{\beta})=9-17\Rightarrow4(\vec{\alpha}\vec{\beta})=-8\Rightarrow\vec{\alpha}\vec{\beta}=\frac{-8}{4}\Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}\vec{\beta}=-2$$

$\underline{\Gamma\iota\alpha\ \nu\alpha\ \beta\rho\acute{\omega}\ \tau o\ \vec{\beta}\vec{\gamma}\ \sigma\tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ 2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}\ \mu\varepsilon\tau\alpha\varphi\acute{\varepsilon}\rho\omega\ \tau o}$

$\underline{\vec{\alpha}\ \sigma\tau o\ \delta\varepsilon\acute{\upsilon}\tau\varepsilon\rho o\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \kappa\alpha\tau\acute{o}\pi\iota\nu\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \pi o\upsilon\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota}$

<u>δημιουργηθεί την υψώνω στο τετράγωνο. Έτσι θα</u>

$\underline{\sigma\chi\eta\mu\alpha\tau\iota\sigma\tau o\acute{\upsilon}\nu\ o\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\sigma\tau\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ |\vec{\alpha}|,|\vec{\beta}|,|\vec{\gamma}|\ \kappa\alpha\iota\ \vec{\beta}\vec{\gamma}.\ \Lambda\acute{\upsilon}\nu\omega\ \tau\eta\nu}$

$\underline{\sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \pi o\upsilon\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \sigma\chi\eta\mu\alpha\tau\iota\sigma\tau\varepsilon\acute{\iota}\ \omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \vec{\beta}\vec{\gamma}.}$

$$2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}\Rightarrow\vec{\beta}+\vec{\gamma}=-2\vec{\alpha}\Rightarrow\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)^2=\left(-2\vec{\alpha}\right)^2\overset{\substack{(\vec{x}+\vec{y})^2=\vec{x}^2+2\vec{x}\vec{y}+\vec{y}^2\\(\lambda\vec{x})^2=\lambda^2\vec{x}^2,\lambda\in\mathbb{R}}}{\Longrightarrow}$$

$$\vec{\beta}^2+2\vec{\beta}\vec{\gamma}+\vec{\gamma}^2=4\vec{\alpha}^2\overset{|\vec{x}|^2=\vec{x}^2}{\Longrightarrow}|\vec{\beta}|^2+2\left(\vec{\beta}\vec{\gamma}\right)+|\vec{\gamma}|^2=4|\vec{\alpha}|^2\overset{|\vec{\alpha}|=2,|\vec{\beta}|=1,|\vec{\gamma}|=3}{\Longrightarrow}$$

$$1^2+2\left(\vec{\beta}\vec{\gamma}\right)+3^2=4\bullet2^2\Rightarrow10+2\left(\vec{\beta}\vec{\gamma}\right)=16\Rightarrow2\left(\vec{\beta}\vec{\gamma}\right)=16-10\Rightarrow$$

$$\vec{\beta}\vec{\gamma}=\frac{6}{2}\Rightarrow\vec{\beta}\vec{\gamma}=3$$

$\underline{\Gamma\iota\alpha\ \nu\alpha\ \beta\rho\acute{\omega}\ \tau o\ \vec{\gamma}\vec{\alpha}\ \pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\acute{\alpha}\zeta\omega\ \kappa\alpha\iota\ \tau\alpha\ \delta\upsilon o\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \tau\eta\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\varsigma}$

$\underline{2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}\ \mu\varepsilon\ \tau o\ \vec{\gamma}\ \acute{\varepsilon}\tau\sigma\iota\ \theta\alpha\ \varepsilon\mu\varphi\alpha\nu\iota\sigma\tau\varepsilon\iota\ \tau o\ \vec{\gamma}\vec{\alpha},\ \vec{\beta}\vec{\gamma},|\vec{\gamma}|.\Lambda\acute{\upsilon}\nu\omega\ \tau\eta\nu}$

$\underline{\sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \pi o\upsilon\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \sigma\chi\eta\mu\alpha\tau\iota\sigma\tau\varepsilon\acute{\iota}\ \omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \vec{\gamma}\vec{\alpha}}$

$$2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}\Rightarrow\vec{\gamma}\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=\vec{\gamma}\vec{0}\Rightarrow$$

$$\vec{\gamma}\left(2\vec{\alpha}\right)+\vec{\gamma}\vec{\beta}+\vec{\gamma}^2=0\overset{\substack{\vec{x}(\lambda\vec{y})=\lambda(\vec{x}\vec{y}),\lambda\in\mathbb{R}\\|\vec{x}|^2=\vec{x}^2}}{\Longrightarrow}2\left(\vec{\gamma}\vec{\alpha}\right)+\vec{\gamma}\vec{\beta}+|\vec{\gamma}|^2=0\overset{\substack{\vec{\gamma}\vec{\beta}=\vec{\beta}\vec{\gamma}=3\\|\vec{\gamma}|=3}}{\Longrightarrow}$$

$$2\left(\vec{\gamma}\vec{\alpha}\right)+3+3^2=0\Rightarrow2\left(\vec{\gamma}\vec{\alpha}\right)+12=0\Rightarrow2\left(\vec{\gamma}\vec{\alpha}\right)=-12\Rightarrow$$

$$\vec{\gamma}\vec{\alpha}=\frac{-12}{2}\Rightarrow\vec{\gamma}\vec{\alpha}=-6$$

$$(\mathrm{II})\,\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}\overset{\substack{\vec{\alpha}\vec{\beta}=-2\\ |\vec{\alpha}|=2,\,|\vec{\beta}|=1}}{=}\frac{-2}{2\bullet 1}=-1$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=\frac{\vec{\beta}\vec{\gamma}}{|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|}\overset{\substack{\vec{\beta}\vec{\gamma}=3\\ |\vec{\alpha}|=2,\,|\vec{\beta}|=1,\,|\vec{\gamma}|=3}}{=}\frac{3}{1\bullet 3}=1$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}}\right)=\frac{\vec{\gamma}\vec{\alpha}}{|\vec{\gamma}||\vec{\alpha}|}\overset{\substack{\vec{\gamma}\vec{\alpha}=-6\\ |\vec{\alpha}|=2,\,|\vec{\gamma}|=3}}{=}\frac{-6}{2\bullet 3}=-1$$

Επειδή $0\le\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\le\pi$ και $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=-1$ προκύπτει ότι $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\pi$

Συνεπώς θα ισχύει $\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}$. Επειδή $\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}|=2|\vec{\beta}|$

θα έχω $\vec{\alpha}=-2\vec{\beta}$.

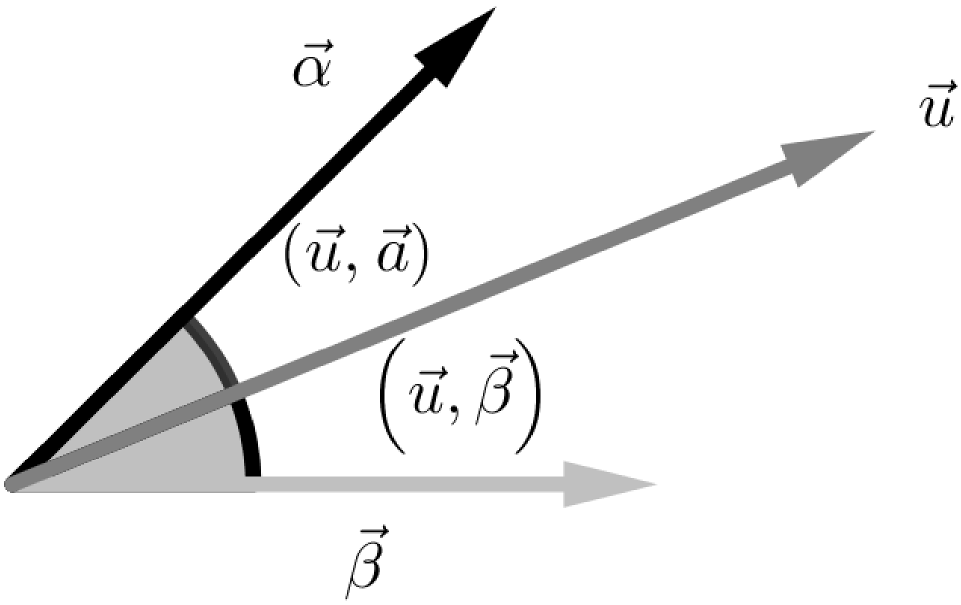
Επειδή $0\le\left(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\beta}}\right)\le\pi$ και $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\beta}}\right)=1$ προκύπτει ότι $\left(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\beta}}\right)=0$.

Συνεπώς θα ισχύει $\vec{\gamma}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$. Επειδή $\vec{\gamma}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$ και $|\vec{\gamma}|=3|\vec{\beta}|$

θα έχω $\vec{\gamma}=3\vec{\beta}$.

11.

Δίνονται τα μη μηδενικά και μη συγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι ο φορέας του διανύσματος $\vec{u}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$ διχοτομεί την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$



$$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{u},\vec{\alpha}\right)=\frac{\vec{u}\vec{\alpha}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{\alpha}\right|}\overset{\vec{u}=\left|\vec{\beta}\right|\vec{\alpha}+\left|\vec{\alpha}\right|\vec{\beta}}{=}\frac{\left(\left|\vec{\beta}\right|\vec{\alpha}+\left|\vec{\alpha}\right|\vec{\beta}\right)\vec{\alpha}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{\alpha}\right|}=\frac{\left(\left|\vec{\beta}\right|\vec{\alpha}\right)\vec{\alpha}+\left(\left|\vec{\alpha}\right|\vec{\beta}\right)\vec{\alpha}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{\alpha}\right|}$$

$$\overset{\left(\lambda\vec{x}\right)\vec{y}=\lambda\left(\vec{x}\vec{y}\right),\lambda\in\mathbb{R}}{=}\frac{\left|\vec{\beta}\right|\vec{\alpha}^{2}+\left|\vec{\alpha}\right|\left(\vec{\beta}\vec{\alpha}\right)}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{\alpha}\right|}\overset{\substack{\left|\vec{x}\right|^{2}=\vec{x}^{2}\\ \vec{\beta}\vec{\alpha}=\vec{\alpha}\vec{\beta}}}{=}\frac{\left|\vec{\beta}\right|\left|\vec{\alpha}\right|^{2}+\left|\vec{\alpha}\right|\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{\alpha}\right|}\overset{\substack{\text{Απο τον αριθμητή βγάζω}\\ \text{κοινό παράγοντα το }\left|\vec{\alpha}\right|}}{=}$$

$$\frac{\cancel{\left|\vec{\alpha}\right|}\left(\left|\vec{\beta}\right|\left|\vec{\alpha}\right|+\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)}{\left|\vec{u}\right|\cancel{\left|\vec{\alpha}\right|}}=\frac{\left|\vec{\beta}\right|\left|\vec{\alpha}\right|+\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\left|\vec{u}\right|}$$

$$\text{Οπότε } \sigma\upsilon\nu\left(\vec{u},\vec{\alpha}\right)=\frac{\left|\vec{\beta}\right|\left|\vec{\alpha}\right|+\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\left|\vec{u}\right|}(1)$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{u},\vec{\beta}\right)=\frac{\vec{u}\vec{\beta}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{\beta}\right|}\overset{\vec{u}=\left|\vec{\beta}\right|\vec{\alpha}+\left|\vec{\alpha}\right|\vec{\beta}}{=}\frac{\left(\left|\vec{\beta}\right|\vec{\alpha}+\left|\vec{\alpha}\right|\vec{\beta}\right)\vec{\beta}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{\alpha}\right|}=\frac{\left(\left|\vec{\beta}\right|\vec{\alpha}\right)\vec{\beta}+\left(\left|\vec{\alpha}\right|\vec{\beta}\right)\vec{\beta}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{\alpha}\right|}$$

$$\overset{(\lambda\vec{x})\vec{y}=\lambda(\vec{x}\vec{y}),\lambda\in\mathbb{R}}{=} \frac{|\vec{\beta}|(\vec{\alpha}\vec{\beta})+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}^2}{|\vec{u}||\vec{\alpha}|} \overset{|\vec{x}|^2=\vec{x}^2}{=} \frac{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|^2+|\vec{\beta}|(\vec{\alpha}\vec{\beta})}{|\vec{u}||\vec{\alpha}|} \overset{\substack{\text{Απο τον αριθμητή βγάζω}\\ \text{κοινό παράγοντα το } |\vec{\beta}|}}{=}$$

$$\frac{\cancel{|\vec{\beta}|}\left(|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|+\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)}{|\vec{u}|\,\cancel{|\vec{\beta}|}}=\frac{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|+\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{u}|}$$

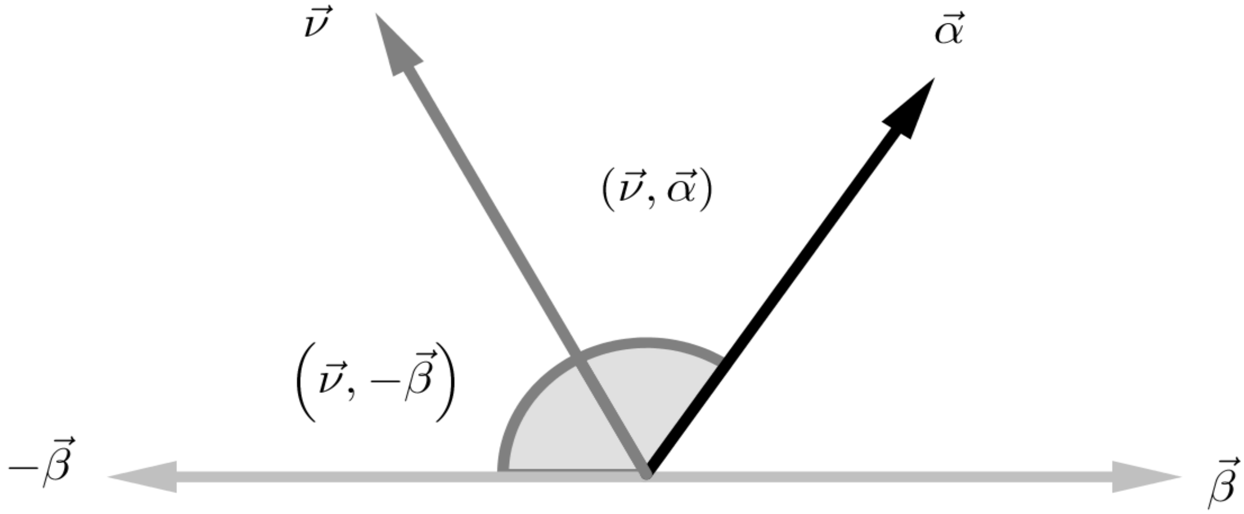
$$\text{Οπότε}: \sigma\upsilon\nu\left(\vec{u},\vec{\beta}\right)=\frac{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|+\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{u}|}\ (2)$$

Απο τις σχέσεις (1),(2) θα έχω $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{u},\vec{\alpha}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\vec{u},\vec{\beta}\right)$

Επειδή $0\le\left(\vec{u},\vec{\alpha}\right),\left(\vec{u},\vec{\beta}\right)\le\pi$ και $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{u},\vec{\alpha}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\vec{u},\vec{\beta}\right)$ θα έχω $\left(\vec{u},\vec{\alpha}\right)=\left(\vec{u},\vec{\beta}\right)$

12.

Δίνονται τα μη μηδενικά και μη συγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι ο φορέας του διανύσματος $\vec{v}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}-|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$ διχοτομεί την παραπληρωματική γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$



$Έχω:\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)+\left(\vec{\alpha},-\vec{\beta}\right)=180^0$

Οπότε η παραπληρωματική γωνία της $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$ είναι η

γωνία $\left(\vec{\alpha},-\vec{\beta}\right)$

$$συν\left(\vec{v},\vec{\alpha}\right)=\frac{\vec{v}\vec{\alpha}}{\left|\vec{v}\right|\left|\vec{\alpha}\right|}\overset{\vec{v}=\left|\vec{\beta}\right|\vec{\alpha}-\left|\vec{\alpha}\right|\vec{\beta}}{=}\frac{\left(\left|\vec{\beta}\right|\vec{\alpha}-\left|\vec{\alpha}\right|\vec{\beta}\right)\vec{\alpha}}{\left|\vec{v}\right|\left|\vec{\alpha}\right|}=\frac{\left(\left|\vec{\beta}\right|\vec{\alpha}\right)\vec{\alpha}-\left(\left|\vec{\alpha}\right|\vec{\beta}\right)\vec{\alpha}}{\left|\vec{v}\right|\left|\vec{\alpha}\right|}$$

$$\overset{\left(\lambda\vec{x}\right)\vec{y}=\lambda\left(\vec{x}\vec{y}\right),\lambda\in\mathbb{R}}{=}\frac{\left|\vec{\beta}\right|\vec{\alpha}^2-\left|\vec{\alpha}\right|\left(\vec{\beta}\vec{\alpha}\right)}{\left|\vec{v}\right|\left|\vec{\alpha}\right|}\overset{\substack{\left|\vec{x}\right|^2=\vec{x}^2\\ \vec{\beta}\vec{\alpha}=\vec{\alpha}\vec{\beta}}}{=}\frac{\left|\vec{\beta}\right|\left|\vec{\alpha}\right|^2-\left|\vec{\alpha}\right|\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)}{\left|\vec{v}\right|\left|\vec{\alpha}\right|}\overset{\substack{\text{Απο τον αριθμητή βγάζω}\\ \text{κοινό παράγοντα το }\left|\vec{\alpha}\right|}}{=}$$

$$\frac{\cancel{\left|\vec{\alpha}\right|}\left(\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|-\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)}{\left|\vec{v}\right|\cancel{\left|\vec{\alpha}\right|}}=\frac{\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|-\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\left|\vec{v}\right|}$$

Οπότε: $συν\left(\vec{v},\vec{\alpha}\right)=\dfrac{\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|-\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\left|\vec{v}\right|}(1)$

$$συν\left(\vec{v},-\vec{\beta}\right)=\frac{\vec{v}\left(-\vec{\beta}\right)}{\left|\vec{v}\right|\left|\vec{\alpha}\right|}\overset{\vec{v}=\left|\vec{\beta}\right|\vec{\alpha}-\left|\vec{\alpha}\right|\vec{\beta}}{=}\frac{\left(\left|\vec{\beta}\right|\vec{\alpha}-\left|\vec{\alpha}\right|\vec{\beta}\right)\left(-\vec{\beta}\right)}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{\alpha}\right|}=\frac{-\left(\left|\vec{\beta}\right|\vec{\alpha}\right)\vec{\beta}+\left(\left|\vec{\alpha}\right|\vec{\beta}\right)\vec{\beta}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{\alpha}\right|}$$

$$\overset{\left(\lambda\vec{x}\right)\vec{y}=\lambda\left(\vec{x}\vec{y}\right),\lambda\in\mathbb{R}}{=}\frac{-\left|\vec{\beta}\right|\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)-\left|\vec{\alpha}\right|\vec{\beta}^2}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{\alpha}\right|}\overset{\substack{\left|\vec{x}\right|^2=\vec{x}^2\\ \vec{\beta}\vec{\alpha}=\vec{\alpha}\vec{\beta}}}{=}\frac{-\left|\vec{\beta}\right|\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)+\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|^2}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{\alpha}\right|}\overset{\substack{\text{Απο τον αριθμητή βγάζω}\\ \text{κοινό παράγοντα το }\left|\vec{\beta}\right|}}{=}$$

$$\frac{\cancel{\left|\vec{\beta}\right|}\left(-\vec{\alpha}\vec{\beta}+\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\right)}{\left|\vec{u}\right|\cancel{\left|\vec{\beta}\right|}}=\frac{\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|-\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\left|\vec{u}\right|}$$

Οπότε $συν\left(\vec{v},-\vec{\beta}\right)=\dfrac{\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|-\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\left|\vec{u}\right|}(2)$

$A\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ (1),(2)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega : \sigma\upsilon\nu\left(\vec{\nu},\vec{\alpha}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\nu},-\vec{\beta}\right)$

$E\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ 0\le\left(\vec{\nu},\vec{\alpha}\right),\left(\vec{\nu},-\vec{\beta}\right)\le\pi\ \kappa\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\left(\vec{\nu},\vec{\alpha}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\nu},-\vec{\beta}\right)$

$\theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\left(\vec{\nu},\vec{\alpha}\right)=\left(\vec{\nu},-\vec{\beta}\right)$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!!

$\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$

$\vec{\alpha}\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}$

$|\vec{\alpha}\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\Leftrightarrow\vec{\alpha}//\vec{\beta}$

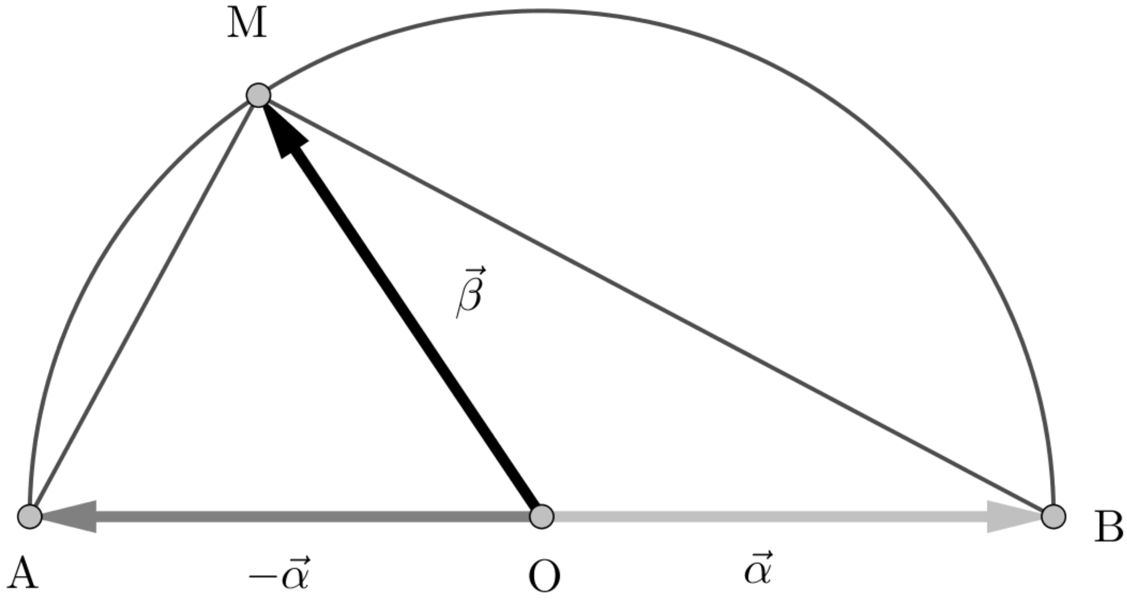
$\Pi\acute{\alpha}\nu\tau\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ |\vec{\alpha}\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$

13.

Σε ημικύκλιο με διάμετρο AB *και κέντρου* O *παίρνουμε σημείο* M.

(I) N*α εκφράσετε τα διανύσματα* $\overrightarrow{MA}$ *και* $\overrightarrow{MB}$ *ως συνάρτηση των* $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$

(II) N*α βρείτε το γινόμενο* $\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MB}$. T*ι συμπεραίνετε για την γωνία των διανυσμάτων* $\overrightarrow{MA}$ *και* $\overrightarrow{MB}$. Π*οιά πρόταση της* E*υκλείδιας* Γ*εωμετρίας έχει αποδειχτει;*



$(\mathrm{I})\,\Theta \acute{\varepsilon} \tau \omega : \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{\beta}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\alpha}$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}$ O τo $\mu\acute{\varepsilon}\sigma o$ $\tau o\upsilon$ $\varepsilon\upsilon\theta\upsilon\gamma\rho\acute{\alpha}\mu\mu o\upsilon$ $\tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma$ AB $\theta\alpha$ $\acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\vec{\alpha}$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}$ $\mathrm{M}, \mathrm{A} \in (\mathrm{O}, \rho)$ $\theta\alpha$ $\acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}} = \begin{pmatrix} \Delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\varsigma \\ \pi\acute{\varepsilon}\rho\alpha\tau o\varsigma \\ \mu\varepsilon\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\ \mathrm{O} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\varsigma \\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\varsigma \\ \mu\varepsilon\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\ \mathrm{O} \end{pmatrix} =$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} \overset{\substack{\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\vec{\alpha} \\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{\beta}}}{=} -\vec{\alpha} - \vec{\beta} = -\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \begin{pmatrix} \Delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\varsigma \\ \pi\acute{\varepsilon}\rho\alpha\tau o\varsigma \\ \mu\varepsilon\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\ \mathrm{O} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\varsigma \\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\varsigma \\ \mu\varepsilon\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\ \mathrm{O} \end{pmatrix} =$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} \overset{\substack{\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{\alpha} \\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{\beta}}}{=} \vec{\alpha} - \vec{\beta}$$

$$(\mathrm{II})\,\overrightarrow{\mathrm{MA}}\,\overrightarrow{\mathrm{MB}} = -\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) = -\left(\vec{\alpha}^{2} - \vec{\beta}^{2}\right) \overset{\left|\vec{x}\right|^2 = \vec{x}^2}{=}$$

$$-\left(\left|\vec{\alpha}\right|^2 - \left|\vec{\beta}\right|^2\right) = -\left(\rho^2 - \rho^2\right) = 0$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!!!</u>

H $\tau\alpha\upsilon\tau\acute{o}\tau\eta\tau\alpha$ $\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) = \vec{\alpha}^{2} - \vec{\beta}^{2}$

εφαρμόζεται όπως θα την εφάρμοζα αν στην θέση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ *είχα πραγματικές μεταβλητές δηλαδή*:

$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2, x, y \in \mathbb{R}$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}$ $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\,\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$ $\theta\alpha$ $\acute{\varepsilon}\chi\omega$ $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{MB}}$

Οπότε <u>*κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή*.</u>

14.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα δυο ύψη του ΒΕ και ΓΖ τέμνονται στο Η.

Έστω $\overrightarrow{\mathrm{HA}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\mathrm{HB}} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\mathrm{H\Gamma}} = \vec{\gamma}$

(Ι) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$

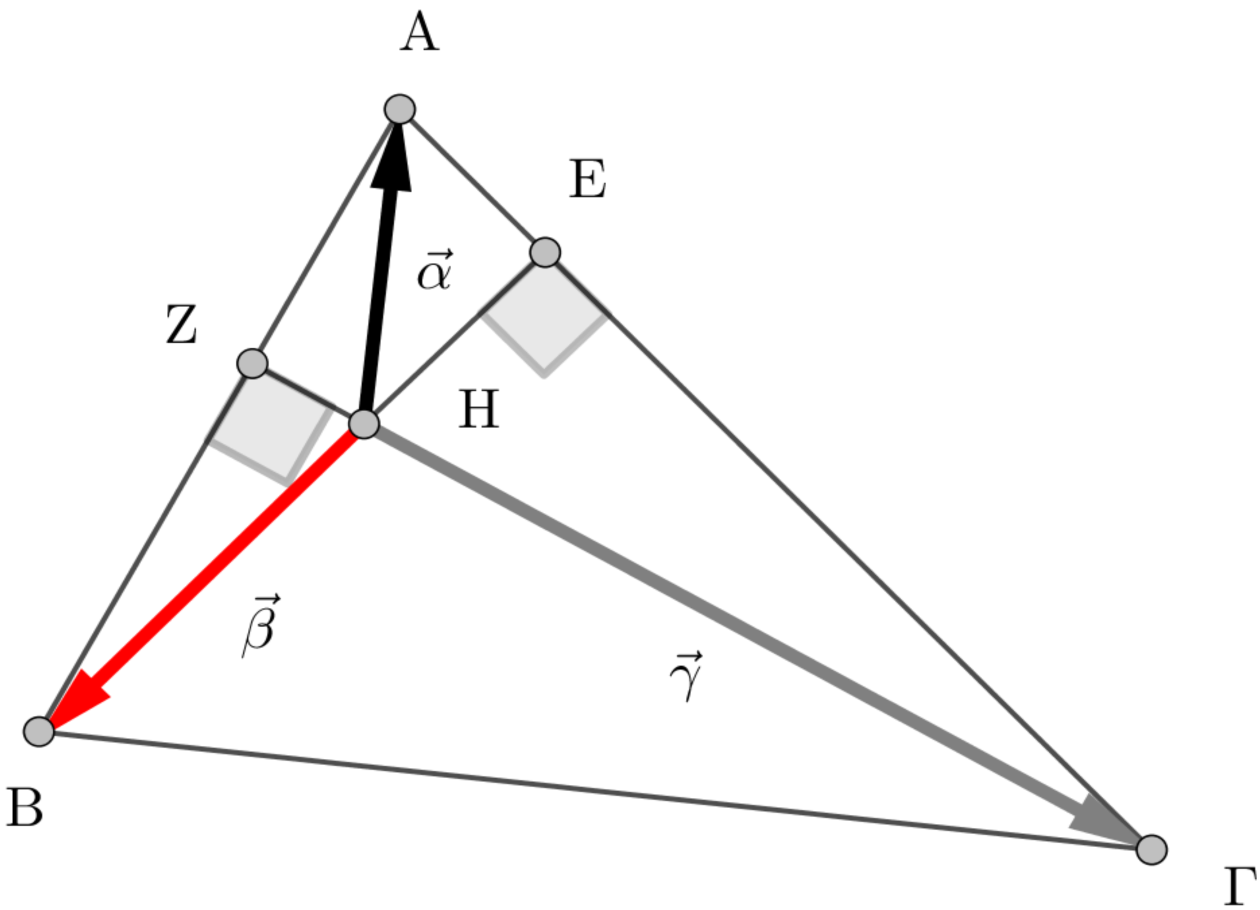
(ΙΙ) Να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma}\vec{\alpha} = \vec{\gamma}\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}\vec{\beta} = \vec{\alpha}\vec{\beta}$

(ΙΙΙ) Απο το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι

$\vec{\gamma}\vec{\alpha} = \vec{\alpha}\vec{\beta}$

Με την βοήθεια της σχέσης αυτής να αποδείξετε ότι $\mathrm{AH} \perp \mathrm{B\Gamma}$.

Ποιά πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;



$$(\mathrm{I})\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}\Delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\varsigma\\ \pi\acute{\varepsilon}\rho\alpha\tau o\varsigma\\ \mu\varepsilon\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\ \mathrm{H}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\Delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\varsigma\\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\varsigma\\ \mu\varepsilon\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\ \mathrm{H}\end{pmatrix}=$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{HB}}-\overrightarrow{\mathrm{HA}}\overset{\overrightarrow{\mathrm{HA}}=\vec{\alpha},\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\vec{\beta}}{=}\vec{\beta}-\vec{\alpha}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\begin{pmatrix}\Delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\varsigma\\ \pi\acute{\varepsilon}\rho\alpha\tau o\varsigma\\ \mu\varepsilon\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\ \mathrm{H}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\Delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\varsigma\\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\varsigma\\ \mu\varepsilon\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\ \mathrm{H}\end{pmatrix}=$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{H\Gamma}}-\overrightarrow{\mathrm{HA}}\overset{\overrightarrow{\mathrm{H\Gamma}}=\vec{\gamma},\overrightarrow{\mathrm{HA}}=\vec{\alpha}}{=}\vec{\gamma}-\vec{\alpha}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=\begin{pmatrix}\Delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\varsigma\\ \pi\acute{\varepsilon}\rho\alpha\tau o\varsigma\\ \mu\varepsilon\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\ \mathrm{H}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\Delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\varsigma\\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\varsigma\\ \mu\varepsilon\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\ \mathrm{H}\end{pmatrix}=$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{H\Gamma}}-\overrightarrow{\mathrm{HB}}\overset{\overrightarrow{\mathrm{H\Gamma}}=\vec{\gamma},\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\vec{\beta}}{=}\vec{\gamma}-\vec{\beta}$$

$$(\mathrm{II})\vec{\gamma}\vec{\beta}=\vec{\gamma}\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{\gamma}\vec{\beta}-\vec{\gamma}\vec{\alpha}=0\Leftrightarrow\vec{\gamma}\left(\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right)=0\overset{\substack{\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}\\ \overrightarrow{\mathrm{H\Gamma}}=\vec{\gamma}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{H\Gamma}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left(\mathrm{I}\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\right)$$

$$\vec{\gamma}\vec{\beta}=\vec{\alpha}\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\gamma}\vec{\beta}-\vec{\alpha}\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\left(\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\right)\vec{\beta}=0\overset{\substack{\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\\ \overrightarrow{\mathrm{HB}}=\vec{\beta}}}{\Longleftrightarrow}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\,\overrightarrow{\mathrm{HB}}=0\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\perp\overrightarrow{\mathrm{HB}}\left(\mathrm{I}\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\right)$$

$$(\mathrm{III})\left\{\begin{matrix}\vec{\gamma}\vec{\alpha}=\vec{\gamma}\vec{\beta}\\ \vec{\alpha}\vec{\beta}=\vec{\gamma}\vec{\beta}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\vec{\gamma}\vec{\alpha}-\vec{\alpha}\vec{\beta}=0\Rightarrow\vec{\alpha}\left(\vec{\gamma}-\vec{\beta}\right)=0\overset{\overrightarrow{\mathrm{HA}}=\vec{\alpha},\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=\vec{\gamma}-\vec{\beta}}{\Longrightarrow}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\,\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=0\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{HA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$$

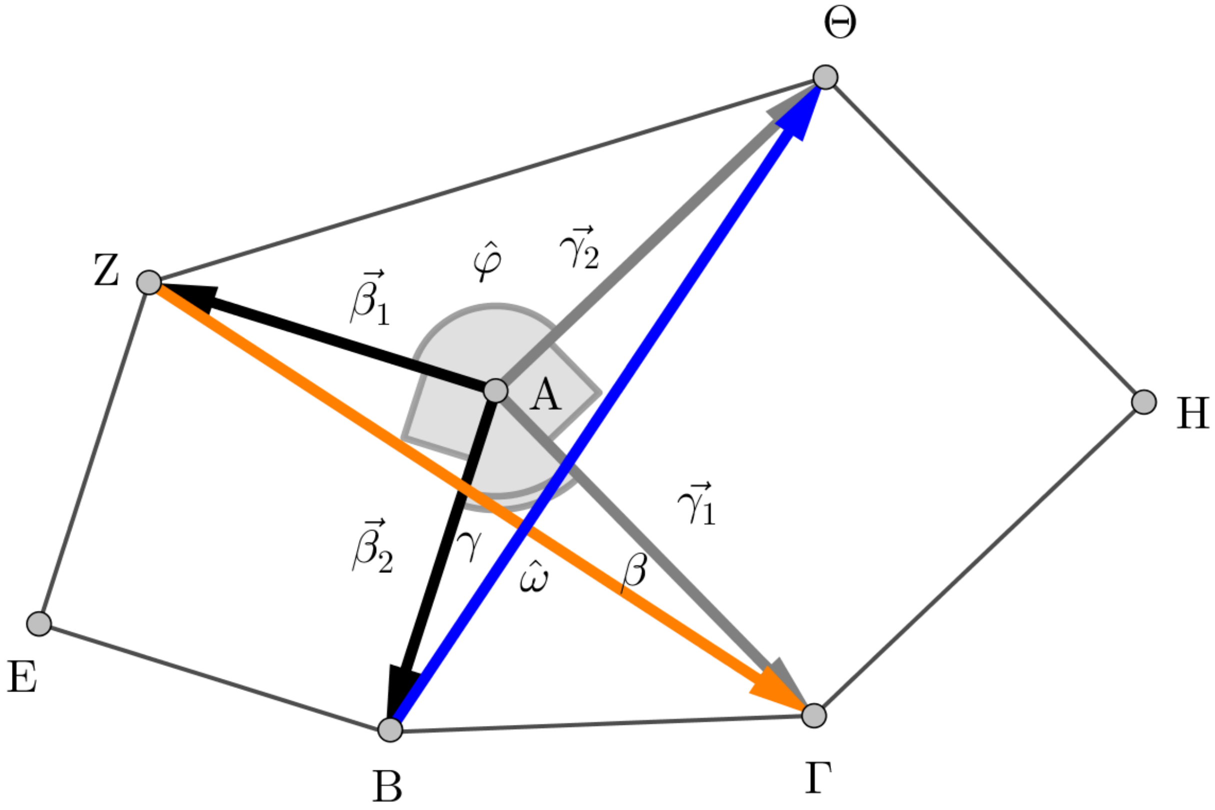
Άρα το σημείο τομής των υψών ΒΕ *και* ΓΖ *βρίσκεται πάνω στο ύψος που φέρουμε απο την κορυφή* Α. *Οπότε τα ύψη του τριγώνου συντρέχουν δηλαδή περνάνε απο το ίδιο σημείο. Το κοινό σημείο των υψών καλείται ορθόκεντρο.*

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

Τρείς ή περισσότερες ευθείς καλούνται συντρέχουσες όταν διέρχονται απο το ίδιο σημείο

15.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ *και εξωτερικώς αυτούκατασκευάζουμε τα τετράγωνα* ΑΒΕΖ *και* ΑΓΗΘ. Ν*α εκφράσετε* $\overrightarrow{\mathrm{B\Theta}}$ *και* $\overrightarrow{\mathrm{Z\Gamma}}$ *ως συνάρτηση των* $\vec{\beta_1}, \vec{\beta_2}, \vec{\gamma_1}, \vec{\gamma_2}$ *και να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο* $\overrightarrow{\mathrm{B\Theta}}\,\overrightarrow{\mathrm{Z\Gamma}}$. Τ*ι συμπεραίνουμε για τα τμήματα* ΒΘ *και* ΓΖ;



$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \overrightarrow{\mathrm{AZ}} = \vec{\beta_1}, \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\beta_2}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\gamma_1}, \overrightarrow{\mathrm{A\Theta}} = \vec{\gamma_2}, \left(\widehat{\vec{\beta_1}, \vec{\gamma_2}}\right) = \hat{\varphi}, \left(\widehat{\vec{\beta_2}, \vec{\gamma_1}}\right) = \hat{\omega}$

Ε*πειδή* ΑΒΕΖ *και* ΑΓΗΘ *είναι τετράγωνα θα έχω*:

$\vec{\beta_1}\vec{\beta_2} = \vec{\gamma_1}\vec{\gamma_2} = 0, \left|\vec{\beta_1}\right| = \left|\vec{\beta_2}\right| = \gamma, \left|\vec{\gamma_1}\right| = \left|\vec{\gamma_2}\right| = \beta$

$$\overrightarrow{\mathrm{B\Theta}} = \begin{pmatrix} \Delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\varsigma \\ \pi\acute{\varepsilon}\rho\alpha\tau o\varsigma \\ \mu\varepsilon\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\ \mathrm{A} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\varsigma \\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\varsigma \\ \mu\varepsilon\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\ \mathrm{A} \end{pmatrix} =$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Theta}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \overset{\overrightarrow{\mathrm{A\Theta}}=\overrightarrow{\gamma_2},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\beta_2}}{=} \overrightarrow{\gamma_2} - \overrightarrow{\beta_2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{Z\Gamma}} = \begin{pmatrix} \Delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\varsigma \\ \pi\acute{\varepsilon}\rho\alpha\tau o\varsigma \\ \mu\varepsilon\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\ \mathrm{A} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta\iota\acute{\alpha}\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\varsigma \\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\varsigma \\ \mu\varepsilon\ \alpha\rho\chi\acute{\eta}\ \mathrm{A} \end{pmatrix} =$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{AZ}} \overset{\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\overrightarrow{\gamma_1},\ \overrightarrow{\mathrm{AZ}}=\overrightarrow{\beta_1}}{=} \overrightarrow{\gamma_1} - \overrightarrow{\beta_1}$$

$$\acute{E}\chi\omega : \mathrm{Z\hat{A}B} + \mathrm{B\hat{A}\Gamma} + \mathrm{\Gamma\hat{A}\Theta} + \mathrm{\Theta\hat{A}Z} = 360^0 \xRightarrow[\mathrm{B\hat{A}\Gamma}=\hat{\omega},\ \mathrm{\Theta\hat{A}Z}=\hat{\varphi}]{\mathrm{Z\hat{A}B}=\mathrm{\Gamma\hat{A}\Theta}=180^0}$$

$$90^0 + \hat{\omega} + 90^0 + \hat{\varphi} = 360^0 \Rightarrow 180^0 + \hat{\omega} + \hat{\varphi} = 360^0 \Rightarrow$$

$$\hat{\omega} = 360^0 - 180^0 - \hat{\varphi} \Rightarrow \hat{\omega} = 180^0 - \hat{\varphi}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{B\Theta}}\overrightarrow{\mathrm{Z\Gamma}} = \left(\overrightarrow{\gamma_2} - \overrightarrow{\beta_2}\right)\left(\overrightarrow{\gamma_1} - \overrightarrow{\beta_1}\right) = \overrightarrow{\gamma_2}\overrightarrow{\gamma_1} - \overrightarrow{\gamma_2}\overrightarrow{\beta_1} - \overrightarrow{\beta_2}\overrightarrow{\gamma_1} - \overrightarrow{\beta_2}\left(-\overrightarrow{\beta_1}\right) =$$

$$\overrightarrow{\gamma_2}\overrightarrow{\gamma_1} - \overrightarrow{\gamma_2}\overrightarrow{\beta_1} - \overrightarrow{\beta_2}\overrightarrow{\gamma_1} + \overrightarrow{\beta_2}\overrightarrow{\beta_1} \overset{\overrightarrow{\beta_1}\overrightarrow{\beta_2}=\overrightarrow{\gamma_1}\overrightarrow{\gamma_2}=0}{=} -\overrightarrow{\gamma_2}\overrightarrow{\beta_1} - \overrightarrow{\beta_2}\overrightarrow{\gamma_1} =$$

$$-\left|\overrightarrow{\gamma_2}\right|\left|\overrightarrow{\beta_1}\right|\sigma\upsilon\nu\,\hat{\varphi} - \left|\overrightarrow{\beta_2}\right|\left|\overrightarrow{\gamma_1}\right|\sigma\upsilon\nu\,\hat{\omega} \overset{\substack{\left|\overrightarrow{\beta_1}\right|=\left|\overrightarrow{\beta_2}\right|=\gamma,\ \left|\overrightarrow{\gamma_1}\right|=\left|\overrightarrow{\gamma_2}\right|=\beta \\ \hat{\omega}=180^0-\hat{\varphi}}}{=}$$

$$-\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\,\hat{\varphi} - \gamma\beta\sigma\upsilon\nu\left(180^0 - \hat{\varphi}\right) \overset{\sigma\upsilon\nu\left(180^0-\hat{x}\right)=-\sigma\upsilon\nu\,\hat{x}}{=}$$

$$-\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\,\hat{\varphi} - \beta\gamma\left(-\sigma\upsilon\nu\,\hat{\varphi}\right) = -\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\,\hat{\varphi} + \beta\gamma\sigma\upsilon\nu\,\hat{\varphi} = 0$$

Ε*πειδή* $\overrightarrow{\mathrm{B\Theta}}\ \overrightarrow{\mathrm{Z\Gamma}} = 0$ *προκύπτει ότι* $\mathrm{B\Theta} \perp \mathrm{Z\Gamma}$

16.

Έστω O *και* A *δυο σταθερά σημεία του επιπέδου με* $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = 3$ Π*οια γραμμή γράφουν τα σημεία* M *του επιπέδου για τα*   *οποία είναι* $\overrightarrow{OM}\left(\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OA}\right) = 7$

Έχω: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$

$$\overrightarrow{OM}\left(\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OA}\right) = 7 \overset{\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{OA}\right) = 7 \Leftrightarrow$$

$$\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{OA}\right) = 7 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{OA}\right) = 7$$

$$\overset{\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 7 \overset{\left|\vec{x}\right|^2=\vec{x}^2}{\Longleftrightarrow} \left|\overrightarrow{AM}\right|^2 - \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 = 7 \overset{\left|\overrightarrow{OA}\right|=3}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left|\overrightarrow{AM}\right|^2 - 3^2 = 7 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AM}\right|^2 = 9 + 7 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AM}\right|^2 = 16 \overset{\left|\overrightarrow{AM}\right|\geq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{16} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AM}\right| = 4$$

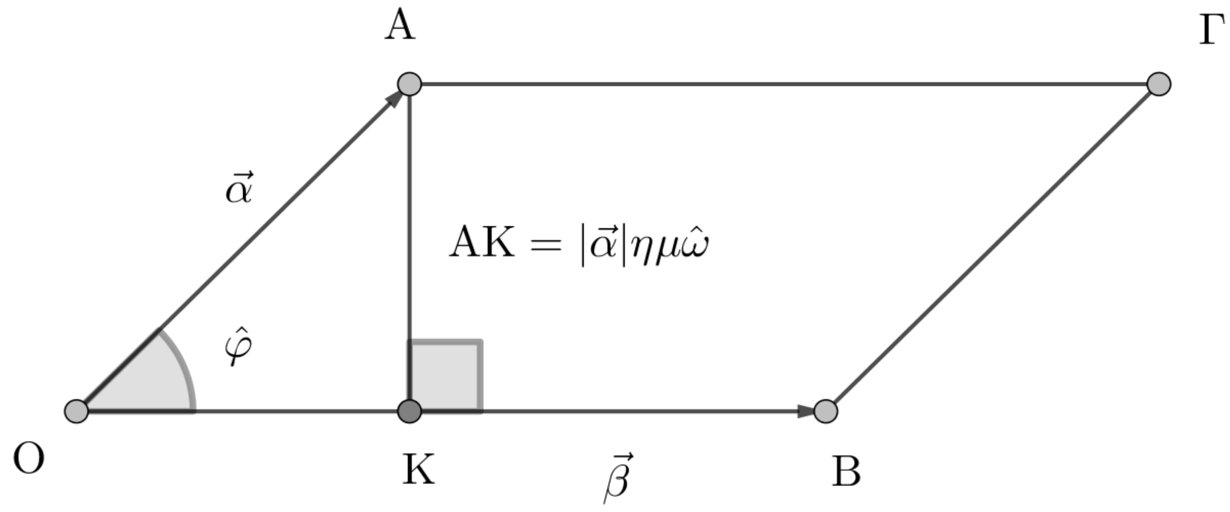
O*πότε το μεταβλητό σημείο* M *απέχει απο το σταθερό σημείο* A *σταθερή απόσταση ίση* 4. O*πότε το* M *βρίσκεται σε ένα κύκλο με κέντρο* A *και ακτίνα* 4.

17.

Δ*ίνονται δυο μη μηδενικά διανύσματα* $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$. A*ν υπάρχει* $\lambda \in \mathbb{R}$, *τέτοιος ώστε* $\left\|\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}\right\| = 1$, *να αποδείξετε ότι το εμβαδόν*   *του παραλληλόγραμμου* ΟΑΓΒ *με* $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ *και* $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ *είναι*   *μικρότερο ή ίσο του* $\left\|\vec{\beta}\right\|$.

Φ*έρνω* $OK \perp OB$. Θ*έτω* $K\hat{O}A = \hat{\varphi}$. Σ*το ορθογώνιο τρίγωνο*

$AKO\left(\hat{K} = 90^0\right)$ *θα έχω*:



$$\eta\mu\hat{\varphi}=\frac{\text{AK}}{\text{OA}}\overset{\text{OA}=|\vec{\alpha}|}{\Longrightarrow}\eta\mu\hat{\varphi}=\frac{\text{AK}}{|\vec{\alpha}|}\Rightarrow \text{AK}=|\vec{\alpha}|\eta\mu\hat{\varphi}$$

Το *εμβαδό του παραλληλογράμμου* ΟΑΓΒ *θα είναι*:

$$\text{E}=(\text{ΟΑΓΒ})=\text{ΟΒ}\bullet\text{ΑΚ}\overset{\substack{\text{OB}=|\vec{\beta}|\\ \text{AK}=|\vec{\alpha}|\eta\mu\hat{\varphi}}}{=}|\vec{\beta}|\left(|\vec{\alpha}|\eta\mu\hat{\varphi}\right)$$

<u>Ο*πότε για να δείξω ότι* $\text{E}\le|\vec{\beta}|$ *αρκεί να δείξω ότι* $|\vec{\alpha}|\eta\mu\hat{\varphi}\le 1$</u>

$$|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|=1\Leftrightarrow|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|^2=1\overset{\vec{x}^2=|\vec{x}|^2}{\Longleftrightarrow}\left(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right)^2=1\overset{\left(\vec{x}+\vec{y}\right)^2=\vec{x}^2+2\vec{x}\vec{y}+\vec{y}^2}{\Longleftrightarrow}$$

$$\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\left(\lambda\vec{\beta}\right)+\left(\lambda\vec{\beta}\right)^2=1\overset{\substack{\left(\lambda\vec{x}\right)^2=\lambda^2\vec{x}^2,\lambda\in\mathbb{R}\\ \left(\lambda\vec{x}\right)\left(\mu\vec{y}\right)=(\lambda\mu)\left(\vec{x}\vec{y}\right),\lambda,\mu\in\mathbb{R}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\vec{\alpha}^2+2\lambda\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)+\lambda^2\vec{\beta}^2=1\overset{\vec{x}^2=|\vec{x}|^2}{\Longleftrightarrow}\lambda^2|\vec{\beta}|^2+2\lambda|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\hat{\varphi}+|\vec{\alpha}|^2-1=0\;(1)$$

Ε*πειδή υπάρχει* $\lambda\in\mathbb{R}$ *που ικανοποιεί την σχέση* $|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|=1$ *θα υπάρχει* $\lambda\in\mathbb{R}$ *που είναι λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης* (1).

Σ*υνεπώς θα ισχύει*:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0 \Leftrightarrow \left(2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\hat{\varphi}\right)^2 - 4|\vec{\beta}|^2\left(|\vec{\alpha}|^2 - 1\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\sigma\upsilon\nu^2\hat{\varphi} - 4|\vec{\beta}|^2\left(|\vec{\alpha}|^2 - 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$4|\vec{\beta}|^2\left[|\vec{\alpha}|^2\sigma\upsilon\nu^2\hat{\varphi} - \left(|\vec{\alpha}|^2 - 1\right)\right] \geq 0 \overset{\vec{\beta}\neq\vec{0}\Rightarrow|\vec{\beta}|>0\Rightarrow 4|\vec{\beta}|^2}{\Longleftrightarrow} |\vec{\alpha}|^2\sigma\upsilon\nu^2\hat{\varphi} - |\vec{\alpha}|^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$-|\vec{\alpha}|^2\left(1 - \sigma\upsilon\nu^2\hat{\varphi}\right) \geq -1 \overset{\eta\mu^2\hat{\varphi} = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\hat{\varphi}}{\Longleftrightarrow} -|\vec{\alpha}|^2\eta\mu^2\hat{\varphi} \geq -1$$

Όταν διαιρώ και τα δυο μέλη της ανίσωσης με ένα αρνητικό αριθμό προκύπτει ετερόστροφη ανίσωση

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{-|\vec{\alpha}|^2\eta\mu^2\hat{\varphi}}{-1} \leq \frac{-1}{-1} \overset{(\alpha\beta)^\nu = \alpha^\nu\beta^\nu}{\Longleftrightarrow} \left(|\vec{\alpha}|\eta\mu\hat{\varphi}\right)^2 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(|\vec{\alpha}|\eta\mu\hat{\varphi}\right)^2} \leq 1 \overset{\sqrt{x^2}=|x|}{\Longleftrightarrow} \left||\vec{\alpha}|\eta\mu\hat{\varphi}\right| \leq 1 \overset{|xy|=|x||y|}{\Longleftrightarrow} \left||\vec{\alpha}|\right|\left|\eta\mu\hat{\varphi}\right| \leq 1 \overset{|x|=x,\, x\geq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$|\vec{\alpha}|\left|\eta\mu\hat{\varphi}\right| \leq 1$$

Επειδή $0 \leq \hat{\varphi} \leq \pi$ θα έχω $\eta\mu\hat{\varphi} \geq 0$. Συνεπώς θα ισχύει $\left|\eta\mu\hat{\varphi}\right| = \eta\mu\hat{\varphi}$. Οπότε θα έχω:

$$|\vec{\alpha}|\left|\eta\mu\hat{\varphi}\right| \leq 1 \overset{|\eta\mu\hat{\varphi}| = \eta\mu\hat{\varphi}}{\Longrightarrow} |\vec{\alpha}|\eta\mu\hat{\varphi} \leq 1 \overset{\substack{\vec{\beta}\neq\vec{0}\Rightarrow|\vec{\beta}|>0 \\ \text{Πολλαπλασιάζω} \\ \text{και τα δυο μέλη της} \\ \text{ανίσωσης με θετικό} \\ \text{αριθμό οπότε προκύπτει} \\ \text{ομόστροφη ανίσωση}}}{\Longrightarrow} |\vec{\beta}||\vec{\alpha}|\eta\mu\hat{\varphi} \leq |\vec{\beta}|$$

$$\overset{\mathrm{E} = |\vec{\beta}||\vec{\alpha}|\eta\mu\hat{\varphi}}{\Longrightarrow} \mathrm{E} \leq |\vec{\beta}|$$

18.

Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(0,-1), \mathrm{B}(\lambda,1)$ και $\Gamma(\lambda-2,\lambda-3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

(A) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

(I) Τα σημεία A, B και Γ να είναι κορυφές τριγώνου

(II) Το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με $\hat{\mathrm{A}} = 90^0$

(B) Για $\lambda = -2$, να βρείτε:

(I) Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$

(II) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

(A)

$$(\mathrm{I})\ \boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(\boxed{\begin{pmatrix} \text{Τετμημένη του} \\ \text{πέρατος} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Τετμημένη της} \\ \text{αρχής} \end{pmatrix}}, \boxed{\begin{pmatrix} \text{Τεταγμένη του} \\ \text{πέρατος} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Τεταγμένη της} \\ \text{αρχής} \end{pmatrix}} \right)}$$

$$\boxed{\det\left(\vec{a},\vec{\beta}\right) = \begin{vmatrix} \text{Τετμημένη του } \vec{a} & \text{Τεταγμένη του } \vec{a} \\ \text{Τετμημένη του } \vec{\beta} & \text{Τεταγμένη του } \vec{\beta} \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{\vec{a} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \det\left(\vec{a},\vec{\beta}\right) = 0}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \beta\delta}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\boxed{\begin{array}{l}\Gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\omega\ \tau\eta\nu\ \tau\varepsilon\tau\mu\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\\ \tau o\upsilon\ \mathrm{A}\ \kappa\alpha\iota\ \delta\acute{\iota}\pi\lambda\alpha\ \sigma\varepsilon\\ \alpha\upsilon\tau\acute{\eta}\nu\ \gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\omega\ \tau\eta\nu\\ \tau\varepsilon\tau\mu\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau o\upsilon\ \mathrm{B}\\ \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\zeta o\nu\tau\alpha\varsigma\\ \tau\alpha\upsilon\tau\acute{o}\chi\rho o\nu\alpha\\ \tau o\ \pi\rho\acute{o}\sigma\eta\mu o\ \tau\eta\varsigma\end{array}},\boxed{\begin{array}{l}\Gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\omega\ \tau\eta\nu\ \tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\\ \tau o\upsilon\ \mathrm{A}\ \kappa\alpha\iota\ \delta\acute{\iota}\pi\lambda\alpha\ \sigma\varepsilon\\ \alpha\upsilon\tau\acute{\eta}\nu\ \gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\omega\ \tau\eta\nu\\ \tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau o\upsilon\ \mathrm{B}\\ \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\zeta o\nu\tau\alpha\varsigma\\ \tau\alpha\upsilon\tau\acute{o}\chi\rho o\nu\alpha\\ \tau o\ \pi\rho\acute{o}\sigma\eta\mu o\ \tau\eta\varsigma\end{array}}\right)$$

$$\underset{\mathrm{A}(0,-1)}{\overset{\mathrm{B}(\lambda,1)}{=}}(\lambda,1+1)=(\lambda,2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\left(\boxed{\begin{array}{l}\Gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\omega\ \tau\eta\nu\ \tau\varepsilon\tau\mu\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\\ \tau o\upsilon\ \mathrm{A}\ \kappa\alpha\iota\ \delta\acute{\iota}\pi\lambda\alpha\ \sigma\varepsilon\\ \alpha\upsilon\tau\acute{\eta}\nu\ \gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\omega\ \tau\eta\nu\\ \tau\varepsilon\tau\mu\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau o\upsilon\ \Gamma\\ \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\zeta o\nu\tau\alpha\varsigma\\ \tau\alpha\upsilon\tau\acute{o}\chi\rho o\nu\alpha\\ \tau o\ \pi\rho\acute{o}\sigma\eta\mu o\ \tau\eta\varsigma\end{array}},\boxed{\begin{array}{l}\Gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\omega\ \tau\eta\nu\ \tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\\ \tau o\upsilon\ \mathrm{A}\ \kappa\alpha\iota\ \delta\acute{\iota}\pi\lambda\alpha\ \sigma\varepsilon\\ \alpha\upsilon\tau\acute{\eta}\nu\ \gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\omega\ \tau\eta\nu\\ \tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau o\upsilon\ \Gamma\\ \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\zeta o\nu\tau\alpha\varsigma\\ \tau\alpha\upsilon\tau\acute{o}\chi\rho o\nu\alpha\\ \tau o\ \pi\rho\acute{o}\sigma\eta\mu o\ \tau\eta\varsigma\end{array}}\right)$$

$$\underset{\mathrm{A}(0,-1)}{\overset{\Gamma(\lambda-2,\lambda-3)}{=}}(\lambda-2,\lambda-3+1)=(\lambda-2,\lambda-2)$$

Τα *σημεία* Α,Β ,Γ *δεν είναι κορυφές τριγώνου*

$\Leftrightarrow$ Τα *σημεία* Α,Β ,Γ *είναι συνευθειακά* $\Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}//\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\lambda & 2\\ \lambda-2 & \lambda-2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$$\lambda(\lambda-2)-2(\lambda-2)=0\Leftrightarrow(\lambda-2)(\lambda-2)=0\Leftrightarrow(\lambda-2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\lambda-2=0\Leftrightarrow\lambda=2$$

$\text{Τ}\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha$ Α,Β ,Γ *δεν είναι κορυφές τριγώνου αν και μόνο αν* $\lambda = 2$.Ο*πότε τα σημεία* Α,Β ,Γ *είναι κορυφές τριγώνου όταν το* λ *παίρνει κάθε τιμή που δεν είναι* 2. Ο*πότε* $\lambda \neq 2$

(ΙΙ)Τ*ο τρίγωνο* ΑΒΓ *είναι ορθογώνιο στο* Α *αν και μόνο αν ισχύει*:

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{\mathrm{A}} = 90^0 \\ \text{Τα σημεία Α,Β,Γ είναι μη} \\ \text{συνευθεικά}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = 0 \\ \lambda \neq 2\end{array}\right\} \overset{\substack{\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\lambda,2) \\ \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(\lambda-2,\lambda-2)}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\lambda(\lambda-2)+2(\lambda-2)=0 \\ \lambda \neq 2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}(\lambda-2)(\lambda+2)=0 \\ \lambda \neq 2\end{array}\right\} \overset{\alpha\beta=0\Leftrightarrow\left\{\substack{\alpha=0 \\ \acute{\eta} \\ \beta=0}\right\}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{pmatrix}\lambda-2=0 \\ \lambda \neq 2\end{pmatrix} \acute{\eta} \begin{pmatrix}\lambda+2=0 \\ \lambda \neq 2\end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{pmatrix}\lambda=2(\text{Απορρίπτεται}) \\ \lambda \neq 2\end{pmatrix} \acute{\eta} \begin{pmatrix}\lambda=-2(\text{Δεκτή}) \\ \lambda \neq 2\end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow \lambda = -2$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ !!!</u>

<u>Α*ν τα διανύσματα* $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ *είναι κάθετα μεταξύ δεν έπεται ότι υπάρχει τρίγωνο* ΑΒΓ.*Έστω το σημείο* Α *ταυτίζεται με το* Γ.Τ*ότε το διάνυσμα* $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ *ταυτίζεται με το μηδενικό διάνυσμα*. Σ*υνεπώς ισχύει η σχέση* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = 0$ *όμως δεν υπάρχει τρίγωνο που να έχει κορυφές τα* Α,Β,Γ *γιατι αυτά δεν είναι ανα δυο διακεκριμένα*!!!</u>

$(\mathrm{B})(\mathrm{I})$ Για $\lambda=-2$ γνωρίζω ότι θα ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=0$ γιατι

γνωρίζω ότι η τιμή $\lambda=-2$ είναι λύση της εξίσωσης $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=0$

και υπάρχει τρίγωνο

με κορυφές τα $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma$

(II) Για $\lambda=-2$ υπάρχει τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ που είναι ορθογώνιο

στο $\mathrm{A}\left(\hat{\mathrm{A}}=90^0\right)$. Τότε θα έχω:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\lambda,2)\overset{\lambda=-2}{=}(-2,2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(\lambda-2,\lambda-2)\overset{\lambda=-2}{=}(-2-2,-2-2)=(-4,-4)$$

$$\boxed{\vec{\alpha}=(x,y),\left|\vec{\alpha}\right|=\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{2\bullet4}\overset{\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta},\alpha,\beta\geq0}{=}\sqrt{2}\sqrt{4}=2\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{2\bullet16}\overset{\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta},\alpha,\beta\geq0}{=}\sqrt{2}\sqrt{16}=4\sqrt{2}$$

Γνωρίζω <u>το εμβαδό ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο των δυο καθετων πλευρών του.</u> Οπότε θα έχω:

$$(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right|=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\sqrt{2}\bullet4\sqrt{2}=4\left(\sqrt{2}\right)^2\overset{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq0}{=}4\bullet2=8\tau.\mu$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ</u>

1.

Αν $\lambda\in\mathbb{R}$ και $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ να αποδείξετε ότι: $\left(\lambda\vec{\alpha}\right)\vec{\beta}=\vec{\alpha}\left(\lambda\vec{\beta}\right)=\lambda\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)$

$$\left(\lambda\vec{\alpha}\right)\vec{\beta}\overset{\vec{\alpha}=(x_1,y_1)}{=}\left(\lambda(x_1,y_1)\right)\vec{\beta}\overset{\vec{\beta}=(x_2,y_2)}{=}(\lambda x_1,\lambda y_1)(x_2,y_2)=\lambda x_1x_2+\lambda y_1y_2$$

$$\lambda\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right) \overset{\substack{\vec{\alpha}=(x_1,y_1)\\ \vec{\beta}=(x_2,y_2)}}{=} \lambda\left((x_1,y_1)(x_2,y_2)\right) = \lambda\left(x_1x_2 + \lambda y_1y_2\right) = \lambda x_1x_2 + \lambda y_1y_2$$

$$\vec{\alpha}\left(\lambda\vec{\beta}\right) \overset{\vec{\beta}=(x_2,y_2)}{=} \vec{\alpha}\left(\lambda\left(x_2,y_2\right)\right) \overset{\vec{\alpha}=(x_1,y_1)}{=} \left(x_1,y_1\right)\left(\lambda x_2,\lambda y_2\right) = \lambda x_1x_2 + \lambda y_1y_2$$

$$\text{Ο}\pi\acute{o}\tau\varepsilon : \left(\lambda\vec{\alpha}\right)\vec{\beta} = \vec{\alpha}\left(\lambda\vec{\beta}\right) = \lambda\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)$$

2.

$\text{Α}\nu\ \vec{\alpha} = (x_1,y_1), \vec{\beta} = (x_2,y_2), \vec{\gamma} = (x_3,y_3)\ \nu\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota :$
$\vec{\alpha}\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right) = \vec{\alpha}\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)$

$$\vec{\alpha}\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right) \overset{\substack{\vec{\beta}=(x_2,y_2)\\ \vec{\gamma}=(x_3,y_3)}}{=} \vec{\alpha}\left[\left(x_2,y_2\right)+\left(x_3,y_3\right)\ \right] \overset{\vec{\alpha}=(x_1,y_1)}{=} \left(x_1,y_1\right)\left(x_2+x_3,y_2+y_3\right) =$$

$$x_1\left(x_2+x_3\right) + y_1\left(y_2+y_3\right) = x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3$$

$$\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\gamma} \overset{\vec{\alpha}=(x_1,y_1),\vec{\beta}=(x_2,y_2),\vec{\gamma}=(x_3,y_3)}{=} \left(x_1,y_1\right)\left(x_2,y_2\right) + \left(x_1,y_1\right)\left(x_3,y_3\right) =$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 + x_1x_3 + y_1y_3$$

$$\text{Ο}\pi\acute{o}\tau\varepsilon : \vec{\alpha}\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right) = \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\gamma}$$

3.

$\text{Α}\nu\ \mu\varepsilon\ \vec{\alpha} = (x_1,y_1), \vec{\beta} = (x_2,y_2), x_1, x_2 \neq 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \eta\ \iota\sigma o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{\iota}\alpha :$
$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}}\lambda_{\vec{\beta}} = -1$

$\lambda_{\vec{u}} = \dfrac{y}{x}, \vec{u} = (x,y), x \neq 0\ \acute{o}\pi o\upsilon\ \lambda_{\vec{u}}\ o\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma\ \delta\iota\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\upsilon\nu\sigma\eta\varsigma\ \tau o\upsilon\ \vec{u}$

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = 0 \overset{\vec{\alpha}=(x_1,y_1),\vec{\beta}=(x_2,y_2)}{\Longleftrightarrow} \left(x_1,y_1\right)\left(x_2,y_2\right) = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$y_1y_2 = -x_1x_2 \overset{\substack{\Delta\iota\alpha\iota\rho\acute{\omega}\ \kappa\alpha\iota\ \tau\alpha\ \delta\upsilon o\\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\varsigma\\ \mu\varepsilon\ \tau o\ x_1x_2}}{\Longleftrightarrow} \frac{y_1y_2}{x_1x_2} = -\frac{x_1x_2}{x_1x_2} \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2} = -1 \overset{\substack{\lambda_{\vec{\alpha}}=\frac{y_1}{x_1},x_1\neq 0\\ \lambda_{\vec{\beta}}=\frac{y_2}{x_2},x_2\neq 0}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\lambda_{\vec{\alpha}}\lambda_{\vec{\beta}} = -1$$