

Ρυθμός μεταβολής μια συνάρτησης f στο σημείο x_0 είναι η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο x_0 δηλ.

Ρυθμός μεταβολής της f στο σημείο $x_0 = f'(x_0)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Η ακτίνα $r(\text{cm})$ ενός σφαιρικού μπαλονιού μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου $t(\text{sec})$ και δίνεται από τον τύπο $r(t) = 10 e^{-t}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας του μπαλονιού κατά την χρονική στιγμή $t=2\text{sec}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$r'(t) = (10 e^{-t})' = 10 (e^{-t})' = 10 e^{-t}(-t)' = 10 e^{-t}(-1) = -10 e^{-t}$$

$$[\lambda f(x)]' = \lambda f'(x) \text{ λ: Σταθερά}$$

$$(e^f)' = e^f f'$$

$$(f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1} f'$$

$$\text{Έχω : } r(2) = 10 e^{-2} \text{ cm και } r'(2) = -10 e^{-2} \text{ cm/sec}$$

Η επιφάνεια της μπάλας δίνεται από την σχέση :

$$E(t) = 4\pi R^2(t)$$

$$E'(t) = [4\pi^2 r(t)]' = 4\pi [r^2(t)]' = 4\pi \cdot 2 r(t) r'(t) = 8\pi r(t) r'(t)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας του μπαλονιού όταν $t = 2 \text{ sec}$ είναι :

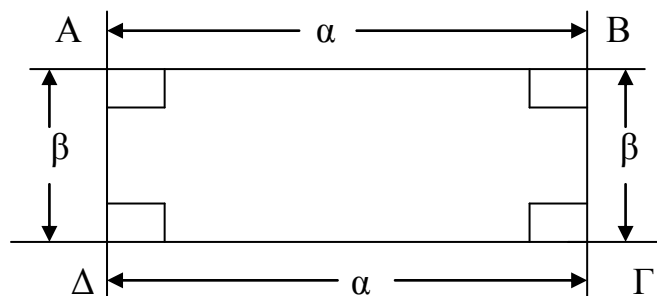
$$E'(2) = 8\pi r(2) r'(2) = 8\pi \cdot 10 e^{-2} \cdot (-10 e^{-2}) = -800 \pi e^{-4} \text{ cm}^2/\text{sec}$$

2.

Οι διαστάσεις x και y ενός ορθογωνίου αυξάνουν με ρυθμό 2cm/sec και 4cm/sec αντίστοιχα. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του εμβαδού του ορθογωνίου ως προς το χρόνο t κατά την χρονική στιγμή t_0 που είναι $x=25\text{cm}$ και $y=32\text{cm}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εμβαδό ορθογωνίου
 $E = x y$
 E : Το εμβαδό του ορθογωνίου
 x, y : Οι διαστάσεις του ορθογωνίου



Το εμβαδό του ορθογωνίου δίνεται από την σχέση : $E(t) = x(t) y(t)$

Έχω : $x'(t) = 2\text{cm/sec}$ και $y'(t) = 4\text{cm/sec}$

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$E'(t) = [x(t)y(t)]' = x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$$

$$E'(t) = x'(t)y(t) + x(t)y'(t) \quad (1)$$

Την χρονική στιγμή t_0 έχω : $x(t_0) = 25\text{cm}$ και $y(t_0) = 32\text{cm}$. Θέτω $t = t_0$ στην σχέση (1) :

$$E'(t_0) = x'(t_0)y(t_0) + x(t_0)y'(t_0) = 2 \cdot 32 + 25 \cdot 4 = 64 + 100 = 164\text{cm}^2/\text{sec}$$

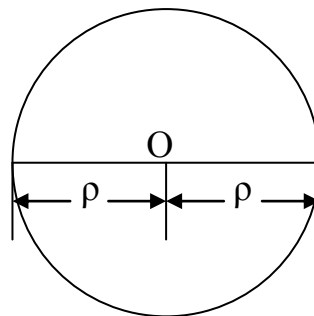
Ο ρυθμός αύξησης του εμβαδού του ορθογωνίου κατά την χρονική στιγμή t_0 που είναι $E'(t_0) = 164\text{cm}^2/\text{sec}$

3.

Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει και η ακτίνα της ελαττώνεται σύμφωνα με τον τύπο $R(t) = 9 - 4t$, όπου t ο χρόνος σε sec και η ακτίνα σε cm $0 \leq t \leq \frac{9}{4}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μείωσης του όγκου και της επιφάνειας της μπάλας όταν $t = 1 \text{ sec}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

V : Ο όγκος της σφαίρας με κέντρο O και ακτίνα ρ
 E : Τα εμβαδό της επιφάνειας της σφαίρας
 ρ : Η ακτίνα της σφαίρας
 $\pi \approx 3,14$
 $V = \frac{4}{3} \pi \rho^3$
 $E = 4 \pi \rho^2$



Ο όγκος της μπάλας δίνεται από την σχέση :

$$V(t) = \frac{4}{3} \pi R^3(t)$$

$$R'(t) = (9 - 4t)' = (9)' - (4t)' = 0 - 4(t)' = -4 \cdot 1 = -4 \text{ cm/sec}$$

$$V'(t) = \left[\frac{4}{3} \pi R^3(t) \right]' = \frac{4}{3} \pi [R^3(t)]' = \frac{4}{3} \pi \cancel{3} R^2(t) R'(t)$$

$$= 4\pi R^2(t) R'(t)$$

$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$
$[\lambda f(x)]' = \lambda f'(x)$ λ: Σταθερά
$(c)' = 0$, c: Σταθερά
$(x)' = 1$
$(f^a)' = a f^{a-1} f'$

$$R(1) = 9 - 4 \cdot 1 = 9 - 4 = 5 \text{ cm}$$

Ο ρυθμός μείωσης του όγκου της μπάλας όταν $t = 1 \text{ sec}$ είναι :

$$V'(1) = 4\pi R^2(1)R'(1) = 4\pi \cdot 5^2 \cdot (-4) = 4\pi \cdot 25 \cdot (-4) = -400\pi \text{ cm}^3/\text{sec}$$

Η επιφάνεια της μπάλας δίνεται από την σχέση :

$$E(t) = 4\pi R^2(t)$$

$$E'(t) = [4\pi R^2(t)]' = 4\pi [R^2(t)]' = 4\pi \cdot 2R(t) R'(t) = 8\pi R(t)R'(t)$$

Ο ρυθμός μείωσης της επιφάνειας της μπάλας όταν $t = 1 \text{ sec}$ είναι :

$$E'(1) = 8\pi R(1)R'(1) = 8\pi \cdot 5 \cdot (-4) = -160\pi \text{ cm}^2/\text{sec}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Ο όγκος μίας σφαίρας αυξάνει με ρυθμό $10\text{m}^3/\text{s}$ να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης της επιφάνειας τη χρονική στιγμή που η ακτίνα της είναι $r = 5 \text{ m}$

2.

Από ένα σφαιρικό μπαλόνι διαφεύγει αέριο με ρυθμό $3 \text{ cm}^3/\text{sec}$ Να βρείτε το ρυθμό μείωσης της επιφάνειας του μπαλονιού όταν η ακτίνα του είναι 20 cm

3.

Χρωματισμένο υγρό πέφτει σε ρούχο που απλώνεται σχηματίζοντας κυκλική κυλίδα της οποίας το εμβαδό αυξάνει με ρυθμό μεταβολής $5 \text{ cm}^2/\text{min}$ Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας κατά τη χρονική στιγμή κατά την οποία το εμβαδό της κυλίδας είναι $36 \pi \text{ cm}^2$

4.

Ένα σημείο M κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της

συνάρτησης $f(x) = \sqrt{6x}, x > 0$ Να βρεθούν :

I) Η απόσταση του d(x) του σημείου M από την αρχή των αξόνων ως συνάρτηση του x

II) Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης d(x) ως προς x όταν $x = 2$

5.

Ένα σημείο κινείται στην καμπύλη $3x^2 + y^2 = 52$ έτσι ώστε η τεταγμένη y να αυξάνει με ρυθμό 6 m/s Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης x όταν $x = 4 \text{ m}$

6.

Κατά την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος το κόστος παραγωγής K(x) και η τιμή πώλησης Π(x) είναι αντίστοιχα :

$$K(x) = 800 + 550x - 15x^2 + \frac{1}{3}x^3 \text{ και } \Pi(x) = 425x$$

I) Πότε ο ρυθμός του μεταβολής του κέρδους είναι θετικός ;;;

II) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους

$$K_{\mu}(x) = \frac{K(x)}{x} \text{ μηδενίζεται όταν το μέσο κόστος με το οριακό κόστος}$$

7.

Μια μελέτη που έγινε για τον πληθυσμό μιας πόλης προβλέπει ότι ύστερα από t χρόνια η πόλη θα έχει πληθυσμό $P(t) = 25 e^{0,02t}$ χιλιάδες. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής (αύξησης) του πληθυσμού αυτής της πόλης ύστερα από 50 χρόνια

8.

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου της V μιας σφαίρας την

$$\text{χρονική στιγμή } t_0 \text{ όταν } r(t_0) = \sqrt{2} \text{ cm και } r'(t_0) = 1 \text{ cm/sec}$$

9.

Ένας δάσκαλος βρήκε ότι μετά t ώρες διδασκαλίας ένας τακτικός

$$\text{μαθητής μπορεί να γράψει } w(t) = \frac{50t^2}{10 + t^2} \text{ λέξεις. Βρείτε πόσες}$$

λέξεις μπορεί να γράφει ο παραπάνω μαθητής ανα λεπτό